Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Monica Milasi

Disequazioni variazionali e il problema dell'equilibrio di mercato: esistenza della soluzione, stabilità, calcolo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 283–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 283-286

Disequazioni variazionali e il problema dell'equilibrio di mercato: esistenza della soluzione, stabilità, calcolo

Monica Milasi

In questa tesi si è studiata un'applicazione della teoria delle disequazioni variazionali ad un problema di equilibrio economico in cui i mercati sono distribuiti nello spazio. Cournot è stato i primo autore che ha introdotto matematicamente il concetto di rete in economia dando una formulazione matematica a concetti economici quali la merce e i prezzi della merce. Intorno al '50 diversi autori si sono occupati dello studio di questo tipo di problema, in particolare hanno cercato una formulazione che offrisse alcuni metodi per il calcolo della soluzione. Il modello del problema economico preso in esame in questa tesi è stato formulato matematicamente da Samuelson [3]. I primi matematici che hanno caratterizzato la soluzione di equilibrio di mercato come soluzione di una disequazione variazionale sono stati Florian e Los intorno al 1980. Negli ultimi anni si è esteso lo studio di questi modelli di mercato dal caso statico al caso dinamico, cioè a dire considerando la dipendenza dei dati dal tempo. Questi modelli in evoluzione sono sicuramente più verosimili: è naturale pensare a fenomeni della realtà come dipendenti dal tempo.

Prima di introdurre il concetto di equilibrio di mercato economico formulato da Samuelson è necessario introdurre le seguenti notazioni. Durante un intervallo di tempo $[0, T]$, la merce M_1 viene prodotta in n mercati produttori P_i e venduta ad m mercati consumatori Q_j. Si denoti con $g_i(t)$ la merce offerta dal mercato produttore i al tempo t e con $f_j(t)$ la merce richiesta dal mercato consumatore j al tempo t. Con $x_{ij}(t)$ si denoti l'unità di merce non-negativa che al tempo t viene trasportata dal mercato i al mercato j. Ad ogni mercato produttore i al tempo t si associ un prezzo di offerta $p_i(t)$ e siano fissati un prezzo di offerta minimo $\underline{p}_i(t) \geq 0$ e un prezzo di offerta massimo $\overline{p}_i(t) \geq 0$. Ad ogni mercato consumatore j al tempo t si associ un prezzo di domanda $q_j(t)$ e siano fissati un prezzo di domanda minimo $\underline{q}_j(t) \geq 0$ e un prezzo di domanda massimo $\overline{q}_j(t) \geq 0$. Con $c_{ij}(t)$ si denoti il costo al tempo t del trasporto dell'unità di merce non-negativa associata al commercio tra la coppia (i,j). Inoltre siano $s_i(t)$ l'eccesso di offerta al tempo t del mercato produttore i e $\tau_j(t)$ l'eccesso di domanda al tempo t del mercato consumatore j.

Raggruppando in vettori le quantità introdotte si ha: $g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))$ è l'offerta totale, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t))$ è la domanda totale,

$$x(t) = (x_{11}(t), ..., x_{1m}, ..., x_{nm})$$

è il flusso di merce trasportata e

$$s(t) = (s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t)) \text{ e } \tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), ..., \tau_m(t))$$

sono rispettivamente i vettori di eccesso di offerta totale e di eccesso di domanda totale. Posto

$$w(t) = (g(t), f(t), x(t), s(t), \tau(t))$$

si supponga che $w(t) \in \widetilde{L}$ dove

$$\widetilde{L} = L^2([0,T], R^n) \times L^2([0,T], R^m) \times L^2([0,T], R^{nm}) \times L^2([0,T], R^n) \times L^2([0,T], R^m).$$

Siano verificate, quasi-ovunque nell'intervallo $[0,T]$, le seguenti condizioni di ammissibilità per ogni $i = 1,2,...,n$, e $j = 1,2,...,m$:

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}(t) + s_i(t), \quad f_j(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}(t) + \tau_j(t). \tag{1}$$

Dunque, l'insieme dei vettori ammissibili è:

$$\widetilde{K} = \{w = (g, f, x, s, \tau) \in \widetilde{L} : w(t) \geq 0, \text{ q. o. in } [0,T], w(t) \textit{ soddisfa } 1\}. \tag{2}$$

$\widetilde{K}$ risulta essere un sottoinsieme convesso, chiuso e illimitato dello spazio di Hilbert $\widetilde{L}$. Siano date le seguenti mappe: $p(\cdot)$ assegna ad ogni offerta totale g un prezzo di offerta $p(g(t))$ e la mappa $q(\cdot)$ assegna ad ogni domanda totale f un prezzo di domanda $q(f(t))$; e la mappa $c(\cdot)$ assegna ad ogni merce trasportata x il costo del trasporto di tale merce $c(x(t))$. Le funzioni prezzo sono limitate dai prezzi minimi e massimi fissati: $\underline{p}(t) \leq p(g(t)) \leq \overline{p}(t)$, $\underline{q}(t) \leq q(f(t)) \leq \overline{q}(t)$, $\underline{c}(t) \leq c(x(t)) \leq \overline{c}(t)$.

L'equilibrio di mercato dinamico assume la seguente forma:

Definizione 1. – $w^* = (g^*, f^*, x^*, s^*, \tau^*) \in \widetilde{K}$ *è un equilibrio di mercato dinamico se e solo se per ogni* $i = 1,2,..,n$ *e* $j = 1,2,..,m$ *le seguenti condizioni sono verificate quasi-ovunque in* $[0,T]$:

$$\begin{cases} \text{se} \quad s_i^*(t) > 0 \Rightarrow p_i(g^*(t)) = \underline{p}_i(t) \\ \text{se} \quad \underline{p}_i(t) < p_i(g^*(t)) \Rightarrow s_i^*(t) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \text{se} \quad \tau_j^*(t) > 0 \Rightarrow q_j(f^*(t)) = \overline{q}_j(t) \\ \text{se} \quad q_j(f^*(t)) < \overline{q}_j(t) \Rightarrow \tau_j^*(t) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \text{se} \quad x_{ij}^*(t) > 0 \Rightarrow p_i(g^*(t)) + c_{ij}(x^*(t)) = q_j(f^*(t)) \\ \text{se} \quad p_i(g^*(t)) + c_{ij}(x^*(t)) > q_j(f^*(t)) \Rightarrow \quad x_{ij}^*(t) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

La condizione (3) asserisce che se nel mercato di offerta i c'è eccesso di offerta al tempo t allora il prezzo dell'offerta in i deve essere uguale al prezzo minimo di offerta in i al tempo t. Se il prezzo di offerta in i non è uguale al prezzo minimo al tempo t, allora in i al tempo t non c'è eccesso di offerta. La condizione (4) ha un analogo significato. La condizione (5) afferma che se il commercio tra la coppia (i,j) al tempo t è maggiore di zero, allora il prezzo di offerta nel mercato di offerta i più il costo del trasporto tra la coppia dei mercati allo stesso tempo t deve essere uguale al prezzo di domanda del mercato di domanda j al tempo t; mentre se il prezzo di offerta più il costo del trasporto allo stesso tempo t eccede il prezzo di domanda al tempo t, allora il commercio tra la coppia di mercati offerta-domanda al tempo t sarà uguale a zero.

Poniamo $K = \{u = (x, s, \tau) \in L : \ u(t) \geq 0 \ q.o. \, in \, [0, T]\} \subseteq L$

$$L = L^2([0, T], R^{nm}) \times L^2([0, T], R^n) \times L^2([0, T], R^m),$$

$$p(x(t), s(t)) = p\left(\sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t) + s_1(t), ..., \sum_{j=1}^{m} x_{nj}(t) + s_n(t) \right),$$

$$q(x(t), \tau(t)) = q\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}(t) + \tau_1(t), ..., \sum_{i=1}^{n} x_{im}(t) + \tau_m(t) \right);$$

$$v(u) = \Big(p(x, s) - q(x, \tau) + c(x), p(x, s) - \underline{p}, \overline{q} - q(x, \tau)\Big), \quad \forall u \in L.$$

Si ha il seguente teorema di caratterizzazione:

TEOREMA 1 [2]. – $u^* = (x^*, s^*, \tau^*) \in K$ *è un equilibrio di mercato dinamico se e solo se* u^* *è soluzione della disequazione variazionale in evoluzione*

$$\langle v(u^*), u - u^* \rangle_L \geq 0 \qquad \forall u \in K \, . \tag{6}$$

Grazie a questa caratterizzazione è possibile utilizzare gli strumenti della teoria delle disequazioni variazionali in spazi di dimensione infinita per dare un'analisi qualitativa del mercato economico considerato. In particolare abbiamo dato condizioni sull'operatore della disequazione variazionale che garantiscono l'esistenza della soluzione in equilibrio. Abbiamo presentato alcuni risultati riguardanti l'analisi della sensitività [1]: perturbazioni sui dati (funzioni prezzo offerta, prezzo domanda e costo del trasporto) inducono perturbazioni sui rispettivi equilibri (offerta, domanda e merce trasportata). Un altro aspetto rilevante per lo studio di un problema di equilibrio è il calcolo numerico della soluzione: la necessità di descrivere al meglio fenomeni realistici porta a modelli sempre più complessi e la teoria delle disequazioni variazionali si rivela anche una metodologia efficiente ai fini del calcolo numerico della soluzione. Abbiamo presentato varie procedure computazionali e fra queste il cosiddetto metodo del "subgradiente", grazie al quale si riesce a dare un'approssimazione globale dell'equilibrio nell'intervallo di tempo $[0, T]$, senza fare alcuna discretizzazione.

Nella teoria economica la teoria lagrangiana assume un ruolo importante, poiché fornisce interessanti contributi fondamentali per comprendere al meglio un problema di equilibrio; in effetti siamo riusciti a caratterizzare le condizioni di equilibrio di mercato dinamico mediante i moltiplicatori di Lagrange. A tale scopo abbiamo utilizzato la teoria della dualità che ci consente di studiare il problema primale:

$$\min_{u \in K} \langle v(u^*), u - u^* \rangle_L$$

(dove u^* è una soluzione in equilibrio di mercato) per mezzo del problema duale ad esso associato:

$$\max_{l \in C^*} \inf_{u \in L} \big\{ \langle v(u^*), u - u^* \rangle_L - \langle \alpha, x \rangle_L - \langle \beta, s \rangle_L - \langle \gamma, \tau \rangle_L \big\}.$$

(dove C^* è il cono duale di $L : \ C^* = \{l = (\alpha, \beta, \gamma) \in L \ : l(y) \geq 0, \ \forall y \in C\} = C$).

In letteratura, in spazi di dimensione finita, è ben nota l'equivalenza tra un problema primale e il duale ad esso associato. Tale equivalenza viene garantita dai classici teoremi di separazione nei quali è fondamentale fare l'ipotesi che l'interno del cono sia non vuoto. Osserviamo però che, estendendo il problema economico al caso dinamico, si è in spazi 2-sommabili, cioè a dire in spazi infinito dimensionali in cui l'interno del cono è vuoto. Dunque non è possibile applicare la classica teoria della dualità. In questa tesi abbiamo superato questa difficoltà sfruttando un risultato che generalizza la regola dei moltiplicatori di Lagrange e non richiede alcuna condizione sull'insieme dei vincoli o sul funzionale da minimizzare, ma richiede l'ipotesi di regolarità:

$$\begin{pmatrix} g'(u^*) \\ h'(u^*) \end{pmatrix} Cone\Big(L - \{u^*\}\Big) + Cone\begin{pmatrix} C + \{g(u^*)\} \\ \{0_L\} \end{pmatrix} \text{ chiuso},$$

($g'(\,\cdot\,)$ è la derivata secondo Fréchet del vincolo di disuguaglianza $g(u) = -u$ e $h'(\,\cdot\,)$ è la derivata secondo Fréchet del vincolo di uguaglianza $h(u) = 0$).

La caratterizzazione delle soluzioni in equilibrio di mercato è allora garantita dal seguente teorema che mette in evidenza l'importanza delle funzioni α^*, β^*, γ^* che risultano capaci di descrivere il comportamento del nostro mercato dinamico.

Teorema 2. – Sia $u^* \in K$ una soluzione del problema (6). Allora esistono tre funzioni $\alpha^* \in L^2([0,T], R^{nm})$, $\beta^* \in L^2([0,T], R^n)$, $\gamma^* \in L^2([0,T], R^m)$ tali che:

i) $\alpha^*(t), \beta^*(t), \gamma^*(t) \geq 0 \quad q.o.\ in\ [0,T]$;
ii) $\langle \alpha^*, x^* \rangle = 0, \quad \langle \beta^*, s^* \rangle = 0, \quad \langle \gamma^*, \tau^* \rangle = 0$;
iii)
$$\begin{cases} p(x^*, s^*) - q(x^*, \tau^*) + c(x^*) = \alpha^*, \\ p(x^*, s^*) - \underline{p} = \beta^*, \\ \overline{q} - q(x^*, \tau^*) = \gamma^*. \end{cases}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Donato M.B., Milasi M. e Vitanza C., *Sensitivity analysis for time depending spatial price equilibrium problem*, Mathematics and computers in simulation, **71** (2006), 229-239.

[2] Milasi M. e Vitanza C., *Variational inequality and evolutionary market disequilibria: the case of quantity formulation*, Variational Analysis and Applications, F. Giannessi and A. Maugeri editors (2005), 681-696.

[3] Samuelson P.A., *Spatial price equilibrium and linear programming*, American Economics Review, **42** (1952), 283-303.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Messina
e-mail: monica@dipmat.unime.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Messina) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Carmela Vitanza, Università degli Studi di Messina