Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Vittorio Martino

La forma di Levi per ipersuperfici in C^{n+1} e l'equazione di pseudocurvatura media per grafici reali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 279–282.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_279_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 279-282

La forma di Levi per ipersuperfici in $\mathbb{C}^{N+1}$ e l'equazione di pseudocurvatura media per grafici reali

VITTORIO MARTINO

1. – Introduzione.

In questo lavoro vengono trattati alcuni aspetti riguardanti la forma di Levi. Quest'ultima è legata allo studio di problemi nella teoria di più variabili complesse (domini di olomorfia, pseudoconvessità) e in quella delle varietà CR.

Nella prima parte di questa trattazione si adotta un linguaggio più geometrico-differenziale per descivere la forma di Levi: dapprima si introducono le varietà CR, poi come caso particolare le ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^{N+1}$; per quest'ultime si procede ad una comparazione tra la seconda forma fondamentale e la forma di Levi, e in analogia con le classiche curvature, costruite con gli autovalori della seconda forma fondamentale, si definiscono le pseudocurvature della forma di Levi. Si discute poi il caso dimensionalmente più basso, $N = 1$, e con l'ausilio delle equazioni di Codazzi si arriva a due risultati di caratterizzazione per le sfere di tipo Alexandrov. Infine si dimostra un teorema, sempre di tipo Alexandrov ma in dimensione qualsiasi, comparando la curvatura media classica e la pseudocurvatura media.

Nella secoda parte, invece, si affronta un problema analitico: l'equazione di traccia della forma di Levi. Questa equazione alle derivate parziali del secondo ordine viene spesso chiamata anche equazione di pseudocurvatura media (o di curvatura media di Levi), conseguenza sempre della analogia tra la forma di Levi per ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^{N+1}$ e la forma di Gauss per quelle in $\mathbb{R}^{N+1}$: va sottolineato, però, che mentre l'equazione di curvatura media (classica) si scrive in forma di divergenza ed è ellittica, quella di pseudocurvatura media non è possibile scriverla in tale forma e, in più, poichè la parte caratteristica ha un autovalore identicamente nullo, non è ellittica. Il modo di procedere è il seguente: si definisce la forma di Levi per ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^{N+1}$ visti come grafici di funzioni reali in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $n = 2N + 1$, e si definisce l'equazione di traccia della foma di Levi. Dal punto di vista delle soluzioni, questa equazione viene qui studiata inizialmente con i metodi della teoria delle soluzioni deboli, nel senso viscoso, introdotte da Crandall, Ishii e Lions. A questo punto si trova una unica soluzione del problema di Dirichlet; poi si ricava una stima del gradiente per soluzioni (classiche) del problema regolarizzato (in maniera ellittica) e con un discorso di passaggio al limite si arriva alla regolarità lipschitziana (globale); infine si mostra la locale lipschitzianità sotto una opportuna condizione sulla funzione (pseudocurvatura) assegnata, sfruttando una disuguaglianza derivante dalla struttura dell'equazione: va osservato, che una stima interna di questo tipo, esiste anche per l'equazione di curvatura media classica, senza però condizioni sulla curvatura assegnata, ad esempio nel caso di superfici minime (curvatura media nulla), vale una stima del genere (Bombieri, De Giorgi, Miranda); nell'analogo caso Levi-piatto, però, non ci si può aspettare nulla di questo tipo, in quanto, ad esempio, ogni funzione della sola variabile x_n risulta essere soluzione.

Nel caso $N = 1$, i primi a studiare soluzioni viscose (lipschitziane) dell'equazione di pseudocurvatura media, sono stati Slodkowski e Tomassini ([5]); poi Citti, Lanconelli e Montanari ([1]) hanno dimostrato, sotto opportune ipotesi, la regolarità C^∞ delle soluzioni lipschitziane. Per quanto riguarda il caso N-dimensionale ($N > 1$), l'unico risultato in letteratura è un principio del massimo forte, dimostrato (in realtà per una classe più ampia di operatori) da Lanconelli e Montanari ([2]).

2. – Ipersuperfici in $\mathbb{C}^{N+1}$, preliminari.

Consideriamo $\mathbb{C}^{N+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ con la metrica g, la struttura complessa J e la connessione ∇ canoniche, e indichiamo con $T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1})$ il fibrato tangente olomorfo. Sia M una ipersuperficie reale, cioè $dim_{\mathbb{R}} M = 2N + 1 = n$, con la metrica indotta e definiamo

$$T_{1,0}(M) := T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1}) \cap T^{\mathbb{C}}(M) \qquad e \qquad H^{\mathbb{C}}(M) = T_{1,0}(M) \oplus T_{0,1}(M)$$

dove ovviamente la somma diretta è anche g-ortogonale. A questo punto si ha $dim_{\mathbb{R}}\big(H(M)\big) = 2N$, quindi per "completare" lo spazio tangente "manca" una direzione (dimensione).

DEFINIZIONE 1. – *Sia N la normale interna unitaria a M e sia $T := J(N)$. Chiamiamo il sottofibrato unidimensionale generato da T, direzione caratteristica di M.*

DEFINIZIONE 2. – *La forma di Levi per ipersuperfici reali di $\mathbb{C}^{N+1}$ è la forma $\mathbb{C}-$bilineare hermitiana*

$$\mathcal{L} : T_{1,0}(M) \times T_{0,1}(M) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \mathcal{L}(Z, \overline{W}) = \frac{1}{2i}\, g([Z, \overline{W}], T), \qquad Z, W \in T_{1,0}(M)$$

Ricordiamo inoltre che la seconda forma fondamentale II è l'operatore bilineare e simmetrico definito da

$$II(V, U) = g(\nabla_V U, N), \quad \forall\, V, U \in T(M)$$

3. – Teoremi di caratterizzazione delle sfere.

Si studia inizialmente il caso dimensionalmente più basso, $N = 1$, in cui la forma di Levi ha un solo autovalore. Sia allora $M \subseteq \mathbb{C}^2$.

DEFINIZIONE 3. – *Sia $\{X, Y, T\}$ una base ortonormale di $T(M)$ con $X, Y \in H(M)$, $Y = J(X)$ e la si rinomini $\{X_1, X_2, X_0\}$. Chiamiamo h_{ij} il seguente coefficiente della seconda forma fondamentale:*

$$h_{ij} := II(X_i, X_j), \quad i,j = 0, 1, 2$$

DEFINIZIONE 4. – *Sia* $p \in M$. *Diciamo che* T *è autovettore per l'operatore* $A(\,\cdot\,) := -\nabla_{(\cdot)}N$, *se* $h_{01} = h_{01} = 0$; *o equivalentemente* $A(T) = h_{00}T$.

Usando le formule di Codazzi possiamo dimostrare i seguenti risultati:

TEOREMA 1. – *Sia* M *è una varietà compatta con forma di Levi* $\mathcal{L}$ *costante positiva. Se la direzione caratteristica è autovettore per l'operatore* $A(\,\cdot\,)$, *allora* M *è una sfera di raggio* $1/\mathcal{L}$.

TEOREMA 2. – *Sia* K *la curvatura sezionale relativa a* X_1, X_2. *Se* M *ha forma di Levi costante positiva e tale che* $\mathcal{L}^2 = K$, *allora* M *è una sfera di raggio* $1/\mathcal{L}$.

Sia adesso M una ipersuperficie in $\mathbb{C}^{N+1}$ con N qualsiasi. La pseudocurvatura media, o curvatura media di Levi, H_L è la traccia della forma di Levi. La relazione con la curvatura media classica H è

$$H = \frac{1}{2N+1}(2NH_L + II(T,T))$$

Usando una disuguaglianza di tipo Newton e la formula di Minkowski per la curvatura media classica si ha un teorema di caratterizzazione per le sfere:

TEOREMA 3. – *Sia* M *una ipersuperficie in* $\mathbb{C}^{N+1}$, *bordo di un dominio* Ω *limitato e stellato. Se* M *ha curvatura media di Levi* H_L *costante e vale* $H \leq H_L$, *allora* M *è una sfera.*

4. – Equazione di assegnata pseudocurvatura media.

I risultati di questa sezione sono l'oggetto dei lavori ([3]) e ([4]). Per domini di $\mathbb{C}^{N+1}$, che possono essere visti come grafici in $\mathbb{R}^{n+1}$ di una certa funzione u, la pseudocurvatura media $K(u)$ (del grafico) si scrive:

$$K(u) = \frac{1}{2N}\frac{u_t^2+1}{(|Du|^2+1)^{\frac{3}{2}}} tr(A(Du)\,D^2u := tr(\widetilde{A}(Du)\,D^2u) \tag{1}$$

Poichè si dimostra che la matrice A dipende dal gradiente della u ed è semidefinita positiva (in particolare ha un autovalore identicamente nullo), K è un operatore quasilineare ellittico degenere

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n = 2N+1$, $N \geq 1$, e sia $k : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una assegnata funzione. Si consideri il seguente Problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} tr(\widetilde{A}(Du)\,D^2u) = k(x,u) & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

con φ continua su $\partial\Omega$.

Usando un principio del confronto e il metodo di Perron adattati alle soluzioni viscose abbiamo un risultato di esistenza e unicità:

TEOREMA 4. – *Se esistono una subsoluzione viscosa $\underline{u}$ e una supersoluzione viscosa $\overline{u}$ tali che valga $\underline{u} = \overline{u} = \varphi$ su $\partial\Omega$, allora esiste un'unica soluzione viscosa di* (2)

Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$, $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$ con $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \in C^{2,a}$. Basandosi sul metodo della costruzione di funzioni barriera, una condizione che assicura l'esistenza di subsoluzioni e supersoluzioni viscose è:

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} k(x,s) < K_{\partial\Omega}(x)$$

per ogni x in un intorno di $\partial\Omega$, dove $K_{\partial\Omega}$ è la pseudocurvatura media del cilindro in $\mathbb{R}^{n+1}$ con sezione $\partial\Omega$.

Inoltre, se $k \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e vale:

$$k^2 - (n-1)\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial k}{\partial x_k}\right| \geq 0$$

allora ammette l'unica soluzione viscosa di (\refeq:pdtr) è anche lipschitziana.

Dimostriamo ora sotto un'opportuna condizione sulla funzione k, la lipschitzianità locale delle soluzioni viscose dell'equazione di pseudocurvatura media, indipendentemente dal dato al bordo.

TEOREMA 5. – *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia u una soluzione viscosa di*

$$tr(\widetilde{A}(Du)\, D^2u) = k(x,u) \qquad \forall x \in \Omega$$

Se $k \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ e $\dfrac{\partial k}{\partial u} > 0$ allora u è localmente lipschitziana.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] CITTI G., LANCONELLI E. e MONTANARI A., *Smoothness of Lipschitz-continuos graphs with nonvanishing Levi curvature*, Acta Math., **188** (2002), 87-128.

[2] MONTANARI A. e LANCONELLI E., *Pseudoconvex fully nonlinear partial differential operators: strong comparison theorems*, Journal of differential equations, **202** (2004), 306-331.

[3] MARTINO V. e MONTANARI A., *Local Lipschitz continuity of graph with prescribed Levi mean curvature*, in corso di stampa su NoDEA, Nonlinear Differential Equations and Applications.

[4] MARTINO V. e MONTANARI A., *Graphs with prescribed Levi form trace*, Annali dell'Università di Ferrara, **52** (2006), 371-382.

[5] SLODKOWSKI Z., TOMASSINI G., *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of holomorphy*, J. Funct. Anal., **101** (1991), 392-407.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna.
e-mail: martino@dm.unibo.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Angelo Vistoli, Università degli Studi di Bologna