Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefano Lisini

Curve assolutamente continue negli spazi di Wasserstein con applicazioni all'equazione di continuità e ad equazioni di diffusione non lineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 263–266.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_263_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 263-266

Curve assolutamente continue negli spazi di Wasserstein con applicazioni all'equazione di continuità e ad equazioni di diffusione non lineare

STEFANO LISINI

1. – Introduzione.

Questa tesi di dottorato si colloca nell'ambito delle applicazioni della teoria del trasporto ottimo di massa, e della conseguente distanza di Wasserstein, alle equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo.

L'interpretazione di alcune equazioni di diffusione come flusso gradiente rispetto alla distanza di Wasserstein di funzionali di energia ha avuto origine in alcuni lavori di Felix Otto (in particolare si veda [3]). Da allora ne è nato un argomento di ricerca che negli ultimi anni ha avuto un notevole sviluppo. In [3] e [1] gli autori dimostrano esistenza e approssimazione delle soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione di diffusione di tipo Fokker-Planck non lineare

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(\nabla f(u) + u \nabla V) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) & u_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\, dx = 1 \end{cases} \tag{1}$$

per mezzo di un algoritmo che deriva dalla formulazione variazionale del metodo di Eulero implicito per il flusso gradiente del funzionale di energia

$$\phi(u) := \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x))\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x) u(x)\, dx, \tag{2}$$

definito sull'insieme

$$D(\phi) := \{u \in L^1(\mathbb{R}^n), u \geq 0, \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1, \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 u(x)\, dx < +\infty, \phi(u) < +\infty\},$$

dove F è una funzione convessa legata a f dalla relazione $f(u) = uF'(u) - F(u)$, e V è una funzione convessa.

Precisamente, fissato un passo di discretizzazione temporale $\tau > 0$ e un dato iniziale $u_0 \in D(\phi)$ si può costruire ricorsivamente una successione u_τ^k in $D(\phi)$ ponendo $u_\tau^0 = u_0$ e u_τ^k minimizzante in $D(\phi)$ il funzionale

$$u \mapsto \frac{1}{2\tau} W_I(u, u_\tau^{k-1})^2 + \phi(u), \tag{3}$$

dove W_I indica un'opportuna distanza tra le funzioni di $D(\phi)$. Questa successione permette di definire la funzione costante a tratti

$$\overline{u}_\tau(t) := u_\tau^k \qquad \text{se} \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \tag{4}$$

i cui punti limite (rispetto ad un'opportuna convergenza debole) per τ che tende a zero soddisfano la formulazione debole del problema (1).

La distanza W_I in (3) tra misure di probabilità su $\mathbb{R}^n$ (notiamo che le funzioni di $D(\phi)$ possono essere pensate come densità di misure di probabilità su $\mathbb{R}^n$) è definita da

$$W_I(u,w) := \left(\min\left\{ \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |x-y|^2\, d\gamma(x,y) : \gamma \in \Gamma(u,w) \right\}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

dove $\Gamma(u,w)$ è l'insieme di tutte le misure di probabilità su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ che hanno come prima marginale la misura con densità u e come seconda marginale quella con densità w. Tale distanza è nota come distanza di Wasserstein ed è collegata al problema di trasporto ottimo di Monge-Kantorovitch. $W_I(u,w)^2$ esprime il costo minimo per trasportare la massa u sulla massa w, avendo assunto che il costo per trasportare una massa unitaria da un punto ad un altro coincida col quadrato della distanza euclidea tra i due punti.

2. – Equazione di diffusione a coefficienti variabili.

Nella tesi è stato studiato, nello stesso spirito di quanto sopra illustrato per il problema (1), il problema a coefficienti variabili del tipo

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(A\nabla f(u) + uA\nabla V) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) & u_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\,dx = 1, \end{cases} \tag{6}$$

dove $A : \mathbb{R}^n \to M^{n\times n}$ è una funzione a valori nello spazio delle matrici simmetriche soddisfacente l'ipotesi di uniforme ellitticità

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi,\xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda > 0. \tag{7}$$

Siccome la diffusione avviene ora in un mezzo non omogeneo e anisotropo si può euristicamente pensare che si sia modificata la geometria dello spazio. Pertanto la distanza tra le distribuzioni di massa (5) dovrà tener conto della non omogeneità e anisotropia, mentre il funzionale ϕ non risente di modifiche in quanto esprime l'entropia (generalizzata) che dipende solo dalla distribuzione di massa. Più precisamente si è visto che bisogna sostituire la distanza euclidea in (5) con la distanza Riemanniana indotta dal tensore metrico $G := A^{-1}$. Essa è definita da

$$d(x,y) = \inf\left\{ \int_0^1 \sqrt{\langle G(\gamma(t))\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle}\, dt : \gamma \in AC([0,1];\mathbb{R}^n),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y \right\},$$

dove $AC([0,1];\mathbb{R}^n)$ è l'insieme delle curve assolutamente continue da $[0,1]$ in $\mathbb{R}^n$. La distanza di Wasserstein viene quindi definita da

$$W_G(u,w) := \left(\min\left\{\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} d(x,y)^2\,d\gamma(x,y) : \gamma \in \Gamma(u,w)\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

e si può analogamente costruire la successione u_τ^k ponendo $u_\tau^0 = u_0 \in D(\phi)$ e u_τ^k minimizzante in $D(\phi)$ il funzionale

$$u \mapsto \frac{1}{2\tau} W_G(u, u_\tau^{k-1})^2 + \phi(u), \tag{9}$$

e definire $\overline{u}_\tau$ come in (4).

2.1 – *Descrizione dei risultati ottenuti*

Assumendo che A sia misurabile secondo Borel e che l'insieme dei punti di discontinuità di A abbia misura nulla, a meno di ridefinire A su un insieme di misura nulla, il principale risultato ottenuto concerne l'esistenza e approssimazione delle soluzioni deboli di (6) come punti limite di $\overline{u}_\tau$, sotto alcune ipotesi tecniche su F e V.

Il secondo risultato riguarda il comportamento asintotico delle soluzioni u di (6) sotto l'ipotesi di uniforme convessità di V. In tale caso il funzionale ϕ ha un unico punto di minimo u_∞ e, analogamente a quanto accade nel caso $A = I$ (I è la matrice identica), si ha convergenza, per $t \to +\infty$, di $\phi(u(t))$ a $\phi(u_\infty)$ e di $W_G(u(t), u_\infty)$ a zero, entrambe con decadimento esponenziale. Nel caso di diffusione lineare, cioè $f(u) = u$, si ha convergenza anche in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Sempre nel caso di diffusione lineare e $A(x) = a(x)I$ (dove a è una funzione scalare) è stata studiata anche la contrattività di W_G lungo le soluzioni di (6).

Tutti questi risultati sono contenuti in [5].

L'approccio seguito per la dimostrazione dell'esistenza e approssimazione, sotto queste ipotesi deboli di regolarità di A, è stato quello della teoria delle curve di massima pendenza in spazi metrici e della teoria dei movimenti minimizzanti (formulata da De Giorgi e dalla sua scuola) e richiamata in [1].

3. – **Curve assolutamente continue e equazione di continuità.**

Lo studio del problema precedentemente illustrato ha condotto in modo naturale allo studio astratto delle curve assolutamente continue nello spazio delle misure di probabilità in uno spazio metrico (X, d) dotato della distanza di Wasserstein (essa viene definita come in (8) dove $\mathbb{R}^n$ è sostituito dallo spazio metrico X).

Il principale risultato ottenuto è un teorema di rappresentazione delle curve assolutamente continue con energia finita di misure di probabilità come sovrapposizione di curve dello stesso tipo nello spazio di base X. Nello stesso spirito della teoria delle misure di Young, la sovrapposizione è descritta da una misura di probabilità sullo spazio delle funzioni continue $C([0, T]; X)$. Si dimostra che tra tutte le misure che rappresentano la curva ne esiste una che soddisfa una opportuna proprietà di minimalità, ottenendo un'importante relazione tra l'energia della curva e l'energia delle curve sulle quali è concentrata la misura che la rappresenta.

Applicando tale teorema si riescono a caratterizzare le curve geodetiche dello spazio delle misure di probabilità su X spazio metrico geodetico (cioè per ogni coppia di punti esiste una geodetica a velocità costante che li connette), estendendo a spazi metrici non localmente compatti un precedente risultato di Lott e Villani. Un'altra applicazione riguarda lo studio del legame tra le soluzioni di tipo misura dell'equazione di continuità e le curve assolutamente continue di misure di probabilità in un'ampia classe di spazi di Banach, estendendo a tali spazi un risultato di [1] negli spazi di Hilbert separabili.

Tutti questi risultati sono pubblicati in [4].

4. – Convergenza delle mappe di trasporto iterate.

La terza parte della tesi tratta della convergenza della composizione iterata di mappe di trasporto che derivano dal metodo di approssimazione dei movimenti minimizzanti descritto nell'introduzione.

Il problema può essere descritto brevemente come segue. Denotiamo con t_τ^k la mappa di trasporto ottimo tra u_τ^k e u_τ^{k+1}, dove u_τ^k è il minimizzante di (3) con $V = 0$. Consideriamo la mappa iterata $T_\tau^k = t_\tau^k \circ t_\tau^{k-1} \circ \cdots \circ t_\tau^0$ e definiamo la mappa costante a tratti

$$\overline{T}_\tau(t) := T_\tau^k \qquad \text{se} \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau].$$

Il risultato principale mostra che le mappe T_τ convergono per $\tau \to 0$ al flusso del campo vettoriale $v(t,x) = \nabla f(u(t,x))/u(t,x)$, dove u è la soluzione di (1), cioè alla mappa $X(t,x)$ definita dalle soluzioni dei problemi di Cauchy

$$X(t,x) = v(t, X(t,x)), \qquad X(0,x) = x,$$

sotto opportune ipotesi sulla regolarità del dato iniziale u_0 atte a garantire l'unicità del flusso.

I risultati di quest'ultima parte sono pubblicati nell'articolo [2] in collaborazione con Luigi Ambrosio e Giuseppe Savaré.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] AMBROSIO L., GIGLI N. e SAVARÉ G., *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Birkhauser (2005).

[2] AMBROSIO L., LISINI S. e SAVARÉ G., *Stability of flows associated to gradient vector fields and convergence of iterated transport maps*, Manuscripta Math., **121** (2006), 1-50.

[3] JORDAN R., KINDERLEHRER D. e OTTO F., *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 1-17.

[4] LISINI S., *Characterization of absolutely continuous curves in Wasserstein spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **28** (2007), 85-120.

[5] LISINI S., *Nonlinear diffusion equations with variable coefficients as gradient flows in Wasserstein spaces*, Pubblicazione IMATI-PV, (2007), 1-28.

Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia
e-mail: stefano.lisini@unipv.it
Dottorato in Matematica e Statistica
(sede amministrativa: Pavia) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Giuseppe Savaré, Università di Pavia