Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Donatella Iacono

Algebre di Lie differenziali graduate e deformazioni di mappe olomorfe

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 251–254.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_251_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 251-254

Algebre di Lie differenziali graduate e deformazioni di mappe olomorfe

Donatella Iacono

In questa tesi, studiamo le deformazioni di mappe olomorfe, usando le algebre di Lie differenziali graduate. In particolare, definiamo una mappa di semiregolarità che annulla le ostruzioni alle deformazioni di mappe olomorfe tra varietà complesse, compatte, lisce e di Kähler.

1. – Deformazioni di mappe olomorfe.

Lo studio delle piccole deformazioni di strutture complesse è iniziato, alla fine degli anni cinquanta, con i lavori di K. Kodaira e D.C. Spencer e M. Kuranishi.

Successivamente, A. Grothendieck , M. Artin e M. Schlessinger hanno formalizzato questa teoria, introducendo i funtori deformazione di anelli di Artin, ovvero funtori dalla categoria **Art** delle $\mathbb{C}$-algebre locali Artiniane alla categoria **Set** degli insiemi. In questo nuovo linguaggio, si associa un funtore deformazione alle deformazioni infinitesimali di un oggetto geometrico.

L'approccio moderno alla teoria delle deformazioni è attraverso le algebre di Lie differenziali graduate (DGLA).

L'idea principale, dovuta a P. Deligne, V. Drinfeld, D. Quillen e M. Kontsevich [3], afferma che in caratteristica zero ogni problema di deformazione è controllato da una DGLA (definita a meno di quasi-isomorfismi).

Più precisamente, una DGLA è uno spazio vettoriale differenziale graduato con una struttura di algebra di Lie graduata e una condizione di compatibilità tra il differenziale e la struttura di Lie, data dalla regola di Leibniz graduata. Inoltre, usando le soluzioni dell'equazione di Maurer-Cartan $dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0$ e l'azione di gauge, ad ogni DGLA L si associa il funtore deformazione $\mathrm{Def}_L : \mathbf{Art} \longrightarrow \mathbf{Set}$, tale che

$$\mathrm{Def}_L(A) = \frac{\{x \in L^1 \otimes m_A \mid dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0\}}{\mathit{gauge}},$$

dove m_A è l'ideale massimale di A.

Quindi, il principio guida sostiene che possiamo definire, dai dati geometrici del problema, una DGLA L (a meno di quasi-isomorfismi), tale che il funtore Def_L è isomorfo al funtore associato al problema geometrico. Notiamo che il funtore associato ad una DGLA è più semplice da studiare, ma, in generale, non è facile trovare la giusta DGLA.

Ad esempio, siano X una varietà liscia, complessa e compatta e T_X il fibrato tangente olomorfo. Denotiamo con $\mathcal{A}^{0,*}_X(T_X)$ il fascio delle forme differenziali su X di tipo $(0,*)$ a coefficienti in T_X e con $A^{0,*}_X(T_X)$ lo spazio vettoriale graduato delle sue sezioni globali. La DGLA di Kodaira-Spencer di X è lo spazio $A^{0,*}_X(T_X)$, con differenziale l'opposto del differenziale di Dolbeault e bracket l'estensione del bracket tra i campi vettoriali. Usando il teorema di Newlander-Nirenberg, si può dimostrare che le deformazioni di una varietà liscia, complessa e compatta sono controllate dalla sua algebra di Kodaira-Spencer [2, Teorema II.7.3].

Nel caso delle deformazioni di una sottovarietà liscia in una varietà liscia fissata, la costruzione astratta, dovuta a M. Manetti [4], prevede la definizione di un nuovo funtore deformazione. Dato un morfismo di DGLA $h : L \longrightarrow M$, si definisce $\operatorname{Def}_h : \mathbf{Art} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ponendo

$$\operatorname{Def}_h(A) = \frac{\{(l,m) \in (L^1 \otimes m_A) \times (M^0 \otimes m_A) |\ dx + \frac{1}{2}[x,x] = 0 \text{ e } e^m * h(l) = 0\}}{gauge},$$

dove l'equivalenza di gauge è una generalizzazione della precedente.

Per studiare le deformazioni di una sottovarietà liscia X in una varietà liscia Y, consideriamo l'algebra di Kodaira-Spencer di Y, $A^{0,*}_Y(T_Y)$, e la sua sotto-algebra di Lie differenziale graduata $A^{0,*}_Y(T_Y(-\log X))$, definita dall successione esatta

$$0 \longrightarrow A^{0,*}_Y(T_Y(-\log X))h \longrightarrow A^{0,*}_Y(T_Y) \longrightarrow A^{0,*}_X(N_{X|Y}) \longrightarrow 0,$$

dove $N_{X|Y}$ è il fibrato normale di X in Y.

Allora, il funtore Def_h, associato all'inclusione h, è isomorfo al funtore associato alle deformazioni della sottovarietà X in Y.

Nella tesi, generalizziamo queste tecniche, per studiare le deformazioni di mappe olomorfe.

Siano $f : X \longrightarrow Y$ una mappa olomorfa tra varietà lisce, complesse compatte e Γ il grafico di f in $X \times Y$. Una deformazione di f non è altro che una deformazione di Γ in $X \times Y$, tale che la deformazione indotta su $X \times Y$ è prodotto di deformazioni di X e di Y. Si noti che non tutte le deformazioni di un prodotto sono prodotto di deformazioni.

In questo caso, la costruzione astratta prevede la definizione di un funtore deformazione associato a due morfismi di DGLA. Data una coppia di morfismi di DGLA $h : L \longrightarrow M$ e $g : N \longrightarrow M$:

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ N & \xrightarrow{\quad g \quad} & M, \end{array} \tag{1}$$

definiamo il funtore $\operatorname{Def}_{(h,g)} : \mathbf{Art} \longrightarrow \mathbf{Set}$,

$$\operatorname{Def}_{(h,g)}(A) = \{(x, y, e^p) \in (L^1 \otimes m_A) \times (N^1 \otimes m_A) \times \exp(\mathrm{M}^0 \otimes \mathrm{m_A})|$$
$$dx + \frac{1}{2}[x,x] = 0,\ dy + \frac{1}{2}[y,y] = 0,\ g(y) = e^p * h(x)\}/gauge,$$

dove l'equivalenza di gauge generalizza le precedenti.

Per studiare le deformazioni di f, consideriamo l'algebra di Kodaira-Spencer di $X \times Y$ e l'inclusione h

$$0 \longrightarrow A^{0,*}_{X\times Y}(T_{X\times Y}(-\log \Gamma)) \xrightarrow{h} A^{0,*}_{X\times Y}(T_{X\times Y}) \longrightarrow A^{0,*}_{\Gamma}(N_{\Gamma|X\times Y}) \longrightarrow 0,$$

dove $N_{\Gamma|X\times Y}$ è il fibrato normale di Γ in $X \times Y$.

Infine, siano p e q le proiezioni naturali del prodotto $X \times Y$ su X e Y, rispettivamente, e consideriamo il morfismo di DGLA $g = (p^*, q^*) : A^{0,*}_X(T_X) \times A^{0,*}_Y(T_Y) \longrightarrow A^{0,*}_{X\times Y}(T_{X\times Y})$.

Con queste scelte il diagramma (\refumi diagram L M N) diventa

$$\begin{tikzcd} & A^{0,*}_{X\times Y}(T_{X\times Y}(-\log \Gamma)) \arrow[d, hook, "h"] \\ A^{0,*}_X(T_X) \times A^{0,*}_Y(T_Y) \arrow[r, "g=(p^*,q^*)"] & A^{0,*}_{X\times Y}(T_{X\times Y}). \end{tikzcd}$$

Denotiamo con $\mathrm{Def}(f)$ il funtore associato alle deformazioni infinitesimali della mappa f.

TEOREMA 1 [2, Teorema IV.2.5]. – *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una mappa olomorfa tra varietà lisce, complesse e compatte. Allora, nelle notazioni precedenti, esiste un isomorfismo di funtori*

$$\mathrm{Def}_{(h,g)} \cong \mathrm{Def}(f).$$

Inoltre, si può dimostrare per ogni scelta dei morfismi h e g, esistono una DGLA $\mathrm{H}_{(h,g)}$ e un isomorfismo di funtori $\mathrm{Def}_{\mathrm{H}_{(h,g)}} \cong \mathrm{Def}_{(h,g)}$ [2, Teorema III.2.36]. In particolare, vale il seguente teorema.

TEOREMA 2 [2, Teorema IV.2.6]. – *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una mappa olomorfa tra varietà lisce, complesse e compatte. Allora, esiste una DGLA $\mathrm{H}_{(h,g)}$ che controlla le deformazioni di f, ovvero esiste un isomorfismo di funtori*

$$\mathrm{Def}_{\mathrm{H}_{(h,g)}} \cong \mathrm{Def}(f).$$

2. – Ostruzioni e Semiregolarità.

Uno spazio di ostruzione (completo) per un funtore deformazione di anelli di Artin è uno spazio vettoriale V tale che, per ogni estensione piccola $0 \longrightarrow J \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ in **Art** e per ogni elemento $x \in F(A)$, esiste un vettore (detto di ostruzione) $v_x \in V$, associato ad x, che si annulla se e soltanto se esiste un sollevamento di x in $F(B)$.

Quindi è interessante studiare questo spazio per sapere quando possiamo estendere le deformazioni. In generale, conosciamo solo uno spazio vettoriale che contiene tutte le ostruzioni e non sappiamo quali vettori sono effettivamente ostruzioni.

Inoltre, se W è uno spazio vettoriale che contiene V allora anche W è uno spazio di ostruzione. Per questo, l'idea è di cercare il più piccolo spazio che contiene tutti i vettori di ostruzione.

Nel caso di una varietà complessa e compatta X, è noto che lo spazio vettoriale $H^2(X, T_X)$ è uno spazio di ostruzione. Se X è di Kähler, allora A. Beauville, H. Clemens e Z. Ran hanno dimostrato che le ostruzioni sono contenute in un sotto-spazio di $H^2(X, T_X)$, definito come nucleo di una mappa (Principio di Kodaira).

Nel caso di deformazioni di una sotto-varietà liscia X in una varietà complessa compatta Y, le ostruzioni sono contenute nel primo gruppo di co-omologia

$$H^1(X, N_{X|Y})$$

del fibrato normale $N_{X|Y}$ di X in Y. Anche in questo caso, se Y è di Kähler, si può definire su $H^1(X, N_{X|Y})$ una mappa che contiene le ostruzioni nel nucleo. Questa mappa, detta "mappa di semiregolartità", è stata introdotta da S. Bloch ed è stata studiata recentemente, con l'uso delle DGLA, da M. Manetti in [4].

Nel caso di deformazioni di una mappa olomorfa $f : X \longrightarrow Y$ con codominio fissato, E. Horikawa ha dimostrato in [1] che le ostruzioni sono contenute nel secondo gruppo di co-omologia $H^2(C^\cdot_{df})$ del cono $(C^\cdot_{df}, D)$ associato al morfismo $df : A^{0,*}_X(T_X) \longrightarrow A^{0,*}_X(f^*T_Y)$, dove $C^i = A^{0,i}_X(T_X) \oplus A^{0,i-1}_X(f^*T_Y)$ e $D(l,n) = (\overline{\partial} l, df(l) - \overline{\partial} n)$.

Se le varietà sono di Kähler, usando le tecniche precedenti basate sull'uso delle DGLA, riusciamo a generalizzare la mappa di semiregolarità di Bloch al caso di deformazioni di mappe olomorfe.

TEOREMA 3 [2, Corollario V.1.5]. – *Siano $f : X \longrightarrow Y$ una mappa olomorfa tra varietà complesse, compatte e di Kähler e $p = dimY - dimX$. Allora le ostruzioni alle deformazioni di f con codominio fissato sono contenute nel nucleo della seguente mappa*

$$\sigma : H^2(C^\cdot_{df}) \longrightarrow H^{p+1}(Y, \Omega^{p-1}_Y).$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] E. HORIKAWA, *On deformations of holomorphic maps I, II,* J. Math. Soc. Japan, **25**, no. 3, (1973), 372-396; **26**, no. 4 (1974), 647-667.

[2] D. IACONO, *Differential Graded Lie Algebras and Deformations of Holomorphic Maps*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Roma "La Sapienza", (2006); arXiv:math.AG/0701091.

[3] M. KONTSEVICH, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I.,* Letters in Mathematical Physics, **66** (2003), 157-216, arXiv:q-alg/9709040.

[4] M. Manetti, *Lie description of higher obstructions to deforming submanifolds*, Preprint arXiv:math.AG/0507287.

SISSA - ISAS, Trieste
e-mail: iacono@sissa.it
Dottorato in Matematica
(sede amministrativa: Università di Roma "La Sapienza") - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Marco Manetti, Università di Roma "La Sapienza"