Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Filomena Feo

Simmetrizzazione gaussiana ed equazioni ellittiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 239–241.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_239_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 239-241

Simmetrizzazione gaussiana ed equazioni ellittiche

FILOMENA FEO

In questa tesi si studia una classe di problemi di Dirichlet relativi ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo degenere, dove la degenerazione è espressa in termini della funzione densità nella misura di Gauss. L'obiettivo è quello di ottenere stime ottimali delle soluzioni, risultati di esistenza e di regolarità.

La prima parte è dedicata alla presentazione di risultati noti sulla misura di Gauss, sui riordinamenti di funzione e sulla simmetrizzazione rispetto alla misura di Gauss (vedi ad esempio [3]). Per quanto riguarda la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss si espongono approcci indipendenti tra loro che fanno uso di nozioni differenti e seguono strade distinte nelle dimostrazioni. Inoltre si mettono in evidenza i legami tra la disuguaglianza di Sobolev logaritmica, la disuguaglianza isoperimetrica ed il semigruppo di Ornstein-Ulenbeck.

Una prima parte di risultati originali ottenuti riguardano una classe di problemi del tipo

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} - \left(d_i(x)u\right)_{x_i} + b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = g\varphi - \left(f_i\varphi\right)_{x_i} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove

- $\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ è la densità della misura di Gauss γ_n,
- $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \varphi(x)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, q.o. $x \in \Omega$,
- Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ non necessariamente limitato,
- i coefficienti ed i termini noti sono funzioni che appartengono ad opportuni spazi di Lorentz-Zygmund.

Osserviamo che il problema (1) è legato all'operatore di Ornstein-Ulenbeck (vedi ad esempio [2]).

Per la natura dell'operatore lo spazio naturale in cui si cercano le soluzioni è lo spazio di Sobolev $H_0^1(\varphi, \Omega)$ definito come la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto la norma

$$\|u\|_{H_0^1(\varphi,\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \; \varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si dimostrano stime ottimali della soluzione mediante un confronto puntuale con la soluzione di un problema avente una struttura più semplice. L'idea è quella di adattare le tecniche ormai classiche introdotte da Talenti in [5] ed ampiamente utilizzate per studiare problemi uniformemente ellittici, lineari e non, anche di tipo parabolico (vedi [6] per un'ampia bibliografia sull'argomento). Tali tecniche si basano sulla simmetrizzazione di Schwartz e la disuguaglianza isoperimetrica classica e, nel caso di problemi uniformemente ellittici, consentono di confrontare la soluzione del problema di partenza con la soluzione di un problema dello stesso tipo, definito in una sfera, in cui i dati sono a simmetria sferica.

Nel caso in esame la struttura dell'operatore in (1) suggerisce di usare la nozione di riordinamento rispetto alla misura di Gauss e la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss. Tale disuguaglianza afferma, che tra tutti i domini con misura di Gauss fissata, i semispazi hanno perimetro rispetto alla misura di Gauss minimo. Il problema di confronto è un problema del tipo (1), definito in un semispazio che ha la stessa misura di Gauss di Ω, in cui i coefficienti sono funzioni di una sola variabile.

Ad esempio nel caso

- $\left(\sum b_i^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leq B\varphi(x)$ e $\left(\sum d_i^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leq D\varphi(x)$, con $B, D \in \mathbb{R}^+, c(x) \geq 0$,
- $f_i = 0$,
- $g(x)$ appartenente allo spazio di Zygmund con peso $L^2(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$, si ottiene

la stima puntuale

$$u^\star(x) \leq w(x), \tag{2}$$

dove $w(x)$ è la soluzione del problema:

$$\begin{cases} -(w_{x_1}\varphi(x))_{x_1} + (Dw\varphi(x))_{x_1} - Bw_{x_1}\varphi(x) = g^\star(x_1)\varphi(x) & \text{in } \Omega^\star \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega^\star, \end{cases} \tag{3}$$

$u^\star$ e $g^\star$ sono i riordinamenti rispetto alla misura di Gauss rispettivamente di u e g e $\Omega^\star$ è il semispazio $\{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma_n(\Omega) = \gamma_n(\Omega^\star)$.

Risultati in questa direzione sono stati ottenuti nel caso $b_i = d_i = c = f_i = 0$ in [1].

Osserviamo che nel caso $b_i = 0$ oppure $d_i = 0$ la soluzione del problema (3) si scrive in modo esplicito e quindi il confronto (2) dà una stima puntuale della soluzione di (1) in termini dei dati del problema.

Risultati analoghi si ottengono anche quando i coefficienti appartengono ad opportuni spazi di Lorentz-Zygmund e si determinano condizioni ottimali per l'esistenza.

A partire dalle stime ottenute con i risultati di confronto si studiano condizioni per ottenere una maggiore sommabilità della soluzione.

Più precisamente se $u \in H_0^1(\varphi, \Omega)$ è soluzione di (1) dalla disuguaglianza di Gross (vedi [4]) si ha che u appartiene allo spazio di Lorentz-Zygmund con peso $L^2(\log L)^{\frac{1}{2}}(\varphi, \Omega)$. Si studia come varia la sommabilità della soluzione negli spazi di Lorentz-Zygmund al variare dei termini noti nella stessa classe di spazi.

Si ottiene ad esempio che pur migliorando la sommabilità dei dati non è detto che la soluzione sia limitata.

Nell'ordine di idee esposto si studia anche una classe di problemi nonlineari del tipo

$$(4)\qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + H(x,\nabla u) + G(x,u) = g\varphi - \mathrm{div}(f\varphi) & \text{in } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove

- $a(x,\eta,\xi)\xi \geq \varphi(x)|\xi|^p$ con $p > 1$,
- Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) non necessariamente limitato,
- le funzioni $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $G : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni di Carathéodory con opportune condizioni di crescita e i termini noti appartengono a particolari spazi di Lorentz-Zygmund.

Le principali difficoltà nello studio del problema (4) sono dovute alla non linearità dell'operatore ed alla presenza del termine d'ordine inferiore $H(x,u)$ che comporta una perdita di coercività quando la norma $\|b\|_{L^\infty(\log L)^{-\frac{1}{2}}(\varphi,\Omega)}$ non è sufficientemente piccola.

In questo caso una prima questione da affrontare è quella di stabilire condizioni che garantiscano l'esistenza della soluzione. Utilizzando le tecniche descritte per il caso lineare si determinano stime a priori della soluzione che consentono di passare al limite in opportuni problemi approssimanti.

Estensioni dei risultati sopra descritti sono state ottenute anche per equazioni di tipo ellittico legate a misure di probabilità di tipo Boltzmann.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] BETTA M.F., BROCK F., MERCALDO A. e POSTERARO M.R., *A comparison related to Gauss measure*, C. R. Acad. Sci. Paris Serie I, **334** (2002), 451-456.

[2] BOCHACHEV V., *Gaussian measure*, Mathematical Surveys and Monographs, **62** (1998).

[3] EHRHARD A., *Symetrisation dans l'espace de Gauss*, Math. Scand., **53** (1983), 281-301.

[4] GROSS L., *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math., **97** (1976), 1061-1083.

[5] TALENTI G., *Elliptic Equations and Rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **3** (1976), 697-718.

[6] TROMBETTI G., *Metodi di simmetrizzazione nelle equazioni a derivate parziali*, Boll. Un. Mat. Ital., **B 3** (2000), 137-150.

Dipartimento di Matematica e applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli studi di Napoli "Federico II"
e-mail: feo@unina.it
Dottorato in Scienze Matematiche
(sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Maria Rosaria Posteraro, Università di Napoli