Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabrizio Durante

Nuovi risultati su copule e concetti collegati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 231–234.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_231_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 231-234

Nuovi risultati su copule e concetti collegati

FABRIZIO DURANTE

Per ogni numero naturale $n \geq 2$, una *copula* n–dimensionale (in breve, n–copula) è una funzione $C_n\colon [0,1]^n \to [0,1]$ cha soddisfa alle seguenti condizioni:

(C1) $C_n(\boldsymbol{x}) = x_i$ per ogni $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ avente tutte le componenti uguali ad 1 eccetto la i–sima;
(C2) C_n è *crescente* in ogni componente;
(C3) C_n è n–*crescente*, cioè, per ogni $B = \times_{i=1}^n [x_i, y_i] \subseteq [0,1]^n$

$$V_{C_n}(B) = \sum_{\boldsymbol{z} \in \times_{i=1}^n \{x_i, y_i\}} (-1)^{N(\boldsymbol{z})} C_n(\boldsymbol{z}) \geq 0,$$

dove $N(\boldsymbol{z}) = card\{k \mid z_k = x_k\}$.

In altri termini, una n–copula è la restrizione a $[0,1]^n$ di una funzione di ripartizione (=f.r.) n–dimensionale avente leggi marginali unidimensionali uniformemente distribuite su $[0,1]$. Più significativamente, il legame tra copule e funzioni di ripartizione è espresso dal seguente risultato, dovuto ad Abe Sklar [4].

TEOREMA 1 [Sklar (1959)] – *Sia H una f.r. n–dimensionale di un vettore aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ avente $F_1, F_2, \ldots, F_n$ come leggi marginali unidimensionali. Allora esiste una n–copula C_n tale che, per ogni $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_n(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)). \tag{1}$$

Se F_i è continua per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, allora C_n è unica; altrimenti, C_n è univocamente determinata su Ran $F_1 \times$ Ran $F_2 \times \cdots \times$ Ran F_n.

Viceversa, data una n–copula C_n e n f.r. unidimensionali $F_1, F_2, \ldots, F_n$, la funzione $H\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ definita da (1) è una f.r. n–dimensionale, avente $F_1, F_2, \ldots, F_n$ come leggi marginali unidimensionali.

Pertanto, ogni f.r. n–dimensionale può essere costruita a partire dalle leggi marginali e da una copula, che ne descrive le proprietà di dipendenza. Tale procedura ha utilità, in modo speciale, in tutte le situazioni in cui si voglia costruire un modello statistico per un sistema formato da n componenti, generalmente non indipendenti. Per esempio, supponiamo che sia assegnato un campione aleatorio $\{(X_i, Y_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ per una coppia (X, Y) di variabili aleatorie continue. Per identificare la f.r. bidimensionale H che descriva il comportamento di (X, Y) è sufficiente, grazie al Teorema di

Sklar, descrivere il comportamento delle singole componenti X e Y e, quindi, identificare una copula che catturi al meglio la dipendenza tra X e Y. Infatti, il grande vantaggio di tale approccio risiede esattamente nel fatto che possiamo scegliere "liberamente" le leggi marginali e, quindi, costruire l'opportuna f.r. multidimensionale mediante una copula. Questo, invece, non è possibile se adottiamo modelli basati sull'identificazione diretta di una qualche f.r. multivariata: per esempio, modellare la dipendenza attraverso una legge normale multivariata implica che si suppone che anche le leggi marginali siano normali ed identicamente distribuite. Come sottolineato in [2, 3], è pertanto di grande importanza avere a disposizione un'ampia gamma di famiglie di copule che possano descrivere differenti tipi di dipendenza tra variabili aleatorie.

La prima parte della presente Dissertazione è dedicata principalmente a nuovi metodi per costruire copule bidimensionali. Più precisamente, si introducono le tre famiglie di copule riportate di seguito e se ne studiano le principali proprietà (dipendenza, misure di associazione, concordanza, etc.).

TEOREMA 2. – *Sia* $f\colon[0,1]\to[0,1]$ *una funzione continua. Sia* $C_f\colon[0,1]^2\to[0,1]$ *la funzione definita da*

$$C_f(u,v)=\min\{u,v\}f(\max\{u,v\}). \tag{2}$$

Allora C_f *è una* 2*–copula se, e solo se,* f *è una funzione crescente tale che* $f(1)=1$ *e la funzione* $t\mapsto\dfrac{f(t)}{t}$ *è decrescente su* $]0,1]$.

Una copula del tipo (2) può essere adatta a descrivere una dipendenza positiva tra due variabili aleatorie. Essa è una generalizzazione (simmetrica) della f.r. bidimensionale di *Marshall e Olkin* e, come quest'ultima, presenta una naturale interpretazione probabilistica in termini di modelli di tipo shock.

TEOREMA 3. – *Sia* $\delta\colon[0,1]\to[0,1]$ *una funzione crescente e Lipschitziana di costante* 2 *tale che* $\delta(1)=1$ *e* $\delta(t)\le t$ *per ogni* $t\in[0,1]$. *Sia* $C_\delta\colon[0,1]^2\to[0,1]$ *la funzione definita da*

$$C_\delta(u,v)=\max\{0,\delta(\max\{u,v\})-|u-v|\}. \tag{3}$$

Allora C_δ *è una* 2*–copula se, e solo se, esiste una costante* $a\in[0,1/2]$ *tale che* $\delta(t)=0$ *su* $[0,a]$ *e* $t\mapsto(\delta(t)-t)$ *è crescente in* $[a,1]$.

Una copula del tipo (3) può essere adatta a descrivere la dipendenza tra due variabili aleatorie X e Y per cui è nota la legge della variabile aleatoria $\max\{X,Y\}$.

TEOREMA 4. – *Siano* f *e* g *due funzioni continue da* $[0,1]$ *su* $[0,+\infty]$ *tali che* f *è strettamente decrescente e* g *è decrescente con* $g(1)=0$. *Sia* $C_{f,g}\colon[0,1]^2\to[0,1]$ *la* *funzione definita da*

$$C_{f,g}(u,v) := f^{[-1]}(f(\min\{u,v\}) + g(\max\{u,v\})), \tag{4}$$

dove $f^{[-1]}$ *è la pseudo–inversa di* f. *Se* f *è convessa e* $(g-f)$ *è crescente su* $[0,1]$, *allora* $C_{f,g}$ *è una* 2*–copula.*

Una copula del tipo (4) è una diretta generalizzazione della famiglia della copule archimedee, oggi ampiamente utilizzate nelle applicazioni [3].

Si noti che le copule precedentemente introdotte sono tutte simmetriche rispetto ai propri argomenti, vale a dire $C(u,v) = C(v,u)$ per ogni $(u,v) \in [0,1]^2$, e, perciò, possono essere usate per modelli probabilistici scambiabili. Per generare copule asimmetriche, però, nella Dissertazione sono state considerate altre due costruzioni: la prima genera copule asimmetriche partendo da due copule con la stessa sezione diagonale, la seconda è basata su una opportuna modificazione della composizione (puntuale) di due copule. Quest'ultima costruzione è stata anche considerata, con opportuni adattamenti, nella classe delle f.r. bidimensionali, dando luogo alla seguente caratterizzazione.

TEOREMA 5. – *Data una funzione* $H: [0,1]^2 \to [0,1]$, *le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *H induce puntualmente un'operazione* η *sulla classe delle f.r. bidimensionali definita, per ogni f.r. bidimensionale A e B, da*

$$\eta(A,B)(x,y) = H(A(x,y), B(x,y));$$

(b) *H soddisfa alle seguenti condizioni:*

- (b.1) $H(0,0) = 0$ e $H(1,1) = 1$,
- (b.2) *H è una f.r. bidimensionale,*
- (b.3) *le sezioni orizzontali e verticali di H sono funzioni convesse.*

La seconda parte della Dissertazione, invece, è dedicata ad una recenta applicazione della teoria delle copule a problemi di teoria dell'affidabilità, seguendo l'approccio proposto in [1]. Più precisamente, date due variabili aleatorie positive e continue X e Y, che rappresentano, ad esempio, la durata di due dispositivi appartenenti ad uno stesso sistema, le proprietà (bidimensionali) di invecchiamento del vettore (X,Y) possono essere descritte mediante le proprietà di invecchiamento delle singole componenti X e Y e le proprietà di dipendenza di (X,Y). A tal proposito, Bassan e Spizzichino hanno introdotto il nuovo concetto di *semi–copula*, una funzione che soddisfa a tutte le proprietà di una copula eccetto, al più, la proprietà (C3). In sintesi, mentre le proprietà di dipendenza del vettore (X,Y) sono caratterizzate dall'unica copula ad esso associata, le proprietà di affidabilità di (X,Y) sono caratterizzate dall'unica semi–copula ad esso associata, chiamata *funzione di invecchiamento bidimensionale*. Partendo da queste motivazioni, nella Dissertazione si analizzano nei particolari le proprietà analitiche delle semi–copule, fornendo anche alcune caratterizzazioni. Inoltre, la seguente trasformazione svolge un ruolo chiave nell'approccio dato da [1], ed è qui caratterizzata.

TEOREMA 6. – *Sia* $h\colon [0,1] \to [0,1]$ *una funzione strettamente crescente e continua con* $h(1) = 1$. *Per ogni* 2–*copula* C, *sia data la funzione* $C_h\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *definita da*

$$C_h(u,v) = h^{[-1]}(C(h(u),h(v))).$$

Allora, per ogni 2–*copula* C, C_h *è una* 2–*copula se, e solo se,* h *è concava.*

Per concludere, si noti che attraverso tutta la Dissertazione sono presenti numerosi richiami a concetti collegati alla teoria delle copule (ad esempio quasi–copule, norme triangolari, etc.), ma originati in altri contesti quali teoria degli insiemi sfuocati (fuzzy sets), logiche a più valori, spazi metrici probabilistici, metodi di aggregazione dell'informazione. Giusto per fare un esempio, il concetto di semi–copula trova applicazione sia nell'assomiatizzazione di nuove tipi di logiche a più valori sia nello studio delle misure non necessariamente additive (dette anche capacità).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] BASSAN B. e SPIZZICHINO F., *Relations among univariate aging, bivariate aging and dependence for exchangeable lifetimes*, J. Multivariate Anal., **93** (2005), 313-339.
[2] JOE H., *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London (1997).
[3] NELSEN R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York (2006).
[4] SKLAR A., *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8 (1959), 229-231.

Department of Knowledge-Based Mathematical Systems
Johannes Kepler University, Austria
e-mail: fabrizio.durante@jku.at
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Lecce) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Carlo Sempi, Università di Lecce