Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Beniamino Cappelletti Montano

Foliazioni di Legendre su varietà almost S

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.2, p. 195–198.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_2_195_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Agosto 2007, 195-198

Foliazioni di Legendre su varietà almost $\mathcal{S}$

BENIAMINO CAPPELLETTI MONTANO

1. – Introduzione.

In questa tesi di dottorato è stato condotto uno studio sistematico delle proprietà geometriche e topologiche delle foliazioni di Legendre su varietà di contatto e su una loro naturale generalizzazione costituita dalle varietà almost $\mathcal{S}$. Queste ultime sono state introdotte da D. E. Blair in [1], ed in seguito studiate da molti altri autori, nell'ambito delle cosidette f-varietà. Ricordiamo che una *f-struttura* su una varietà differenziabile M è il dato di un campo tensoriale ϕ di tipo $(1,1)$ verificante

$$\phi^3 + \phi = 0. \tag{1}$$

Dalla (1) segue in particolare che ϕ ha rango costante $2n$, per qualche $n \in \mathbb{N}$. In termini di G-strutture, questa definizione equivale alla riducibilità del gruppo di struttura del fibrato tangente di M a $U(n) \times O(r)$, dove $r = \dim(M) - 2n$. Quando tale gruppo è riducibile a $U(n) \times I_r$ diciamo che M è una *f-varietà con nucleo parallelizzabile*. In tal caso esistono r sezioni globali di $\ker(\phi)$, $\xi_1, \ldots, \xi_r$, linearmente indipendenti in ogni punto tali che $\phi^2 E = -E + \sum_{a=1}^{r} \eta_a(E)\xi_a$, per ogni $E \in \Gamma(TM)$, dove, per ciascun $a \in \{1, \ldots, r\}$, η_a denota la 1-forma duale di ξ_a. In particolare, $\dim(M) = 2n + r$. È noto che ogni f-varietà con nucleo parallelizzabile (M, ϕ, ξ_a, η_a) ammette una metrica Riemanniana (in generale non unica), detta *metrica compatibile*, verificante la relazione $g(\phi E, \phi F) = g(E,F) - \sum_{a=1}^{r} \eta_a(E)\eta_a(F)$, per ogni $E, F \in \Gamma(TM)$. Detta Φ la 2-forma su M definita da $\Phi(E,F) = g(E, \phi F)$, detta *2-forma fondamentale*, se per tutti gli $a \in \{1, \ldots, r\}$ si ha $d\eta_a = \Phi$, la varietà M munita della struttura geometrica (ϕ, ξ_a, η_a, g) si dice *varietà almost $\mathcal{S}$*.

La condizione $d\eta_a = \Phi$ implica che $\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_r \wedge (d\eta_a)^n \neq 0$ ovunque su M. L'interpretazione geometrica di quest'ultima relazione è che la distribuzione $2n$-dimensionale $\mathcal{D} = \bigcap_{a=1}^{r} \ker(\eta_a)$ è quanto più lontana dall'essere integrabile. Si può provare, più precisamente, che qualunque sottofibrato di $\mathcal{D}$ che risulti essere integrabile ha dimensione massima n. Ciò giustifica la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.1. – *Sia $(M^{2n+r}, \phi, \xi_a, \eta_a, g)$ una varietà almost-$\mathcal{S}$. Una foliazione di Legendre su M^{2n+r} è una foliazione n-dimensionale $\mathcal{F}$ di M^{2n+r} il cui fibrato tangente $T\mathcal{F}$ sia un sottofibrato di $\mathcal{D}$.*

Passiamo ora ad illustrare i maggiori risultati riguardanti le foliazioni di Legendre ottenuti nella tesi.

2. – Classificazione delle foliazioni di Legendre.

Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di Legendre sulla varietà almost $\mathcal{S}$ $(M, \phi, \xi_a, \eta_a, g)$. Definiamo una forma bilineare simmetrica sul fibrato tangente alla foliazione ponendo

$$\Pi(X, X') = -\sum_{a=1}^{r} (\mathcal{L}_X \mathcal{L}_{X'} \eta_a)(\xi_a),$$

per ogni $X, X' \in \Gamma L$, dove $L := T\mathcal{F}$. In termini della metrica g e della f-struttura ϕ, Π si può scrivere come $\Pi(X, X') = 2g\left(\left[\bar{\xi}, X\right], \phi X'\right)$, dove $\bar{\xi} = \xi_1 + \cdots + \xi_r$. Π risulta essere un invariante della foliazione di Legendre $\mathcal{F}$ e consente quindi di classificare le foliazioni di Legendre nel modo seguente: una foliazione di Legendre $\mathcal{F}$ si dirà *non degenere*, *degenere* o *piatta* a seconda che, rispettivamente, Π sia non degenere, degenere o si annulli identicamente. L'interpretazione geometrica di questa classificazione è data dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.1. – *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di Legendre su una varietà almost-$\mathcal{S}$ $(M, \phi, \xi_a, \eta_a, g)$. Allora,*

-- *$\mathcal{F}$ è non degenere se e solo se, per ogni $X \in \Gamma L$, $\left[\bar{\xi}, X\right]$ ha proiezione non nulla sul fibrato normale ad $\mathcal{F}$;*

-- *$\mathcal{F}$ è degenere se e solo se esiste un campo $X \in \Gamma L$, $X \neq 0$, tale che $\left[\bar{\xi}, X\right]$ abbia proiezione nulla sul fibrato normale ad $\mathcal{F}$;*

-- *$\mathcal{F}$ è piatta se e solo se $\bar{\xi}$ è un campo foliato, cioè $\left[\bar{\xi}, X\right] \in \Gamma L$ per ogni $X \in \Gamma L$.*

In particolare, se $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sono campi foliati, allora anche la loro somma $\bar{\xi}$ è un campo foliato e quindi $\mathcal{F}$ è piatta. Ciò suggerisce una definizione di piattezza più forte di quella appena descritta: diremo che una foliazione di Legendre $\mathcal{F}$ è *fortemente piatta* se ciascun ξ_a è un campo foliato. Per questo tipo di foliazioni di Legendre è possibile dimostrare un teorema di tipo-Darboux, come segue:

TEOREMA 2.2. – *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di Legendre sulla varietà almost $\mathcal{S}$ M^{2n+r}. $\mathcal{F}$ è fortemente piatta se e solo se ogni punto di M^{2n+r} ammette coordinate locali $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_r\}$ tali che $\mathcal{F}$ sia definita dalle equazioni $\{x_i = \text{const.}, z_a = \text{const.}\}$ e, per ogni $a \in \{1, \ldots, r\}$, $\eta_a = dz_a - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$.*

Nel secondo capitolo della tesi sono dimostrati numerosi risultati riguardanti le foliazioni Legendriane non-degeneri. Qui vengono riportati i più significativi.

TEOREMA 2.3. – *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di Legendre non degenere di una varietà almost-$\mathcal{S}$ $(M, \phi, \xi_a, \eta_a, g)$. Allora su M esiste un'altra struttura almost $\mathcal{S}$, $(\phi', \xi_a, \eta_a, g')$, dove g' è una metrica semi-Riemanniana, tale che $g'|_L = \dfrac{1}{4r}\Pi$. Inoltre tale struttura è determinata in modo unico dalla condizione $h'(L) \subset L$, dove $h' = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_{\bar{\xi}}\phi'$.*

TEOREMA 2.4. – *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di Legendre su una varietà almost $\mathcal{S}$ $(M, \phi, \xi_a, \eta_a, g)$. Se $\mathcal{F}$ è una foliazione Riemanniana allora $\mathcal{F}$ è una foliazione di Legendre non degenere e la metrica verifica $g|_L = \dfrac{1}{4r}\Pi$.*

3. – Strutture bi-Legendriane e classi caratteristiche.

Una struttura bi-Legendriana su una varietà almost $\mathcal{S}$ M^{2n+r} è per definizione una coppia $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ di foliazioni di Legendre su M^{2n+r} complementari tra loro. In tal caso il fibrato tangente di M^{2n+r} si decompone come la somma diretta $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{G} \oplus \mathbb{R}\xi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\xi_r$. È possibile associare ad ogni struttura bi-Legendriana una connessione canonica, chiamata *connessione bi-Legendriana*, che si rivela particolaramente utile nello studio delle foliazioni di Legendre. Più in generale tale connessione è stata definita per ogni coppia di distribuzioni di Legendre L e Q, complementari tra loro, come l'unica connessione lineare su M^{2n+r} rispetto a cui la 2-forma fondamentale sia parallela, che preservi le distribuzioni L, Q e $\mathbb{R}\xi_a$, e la cui torsione verifichi

$$T(X, Y) = 2\Phi(X, Y)\bar{\xi} \quad \text{e} \quad T(E, \xi_a) = [\xi_a, E_L]_Q + [\xi_a, E_Q]_L$$

per ogni $X \in \Gamma L$, $Y \in \Gamma Q$ e per ogni $E \in \Gamma(TM)$ e $a \in \{1, \ldots, r\}$. Riguardo ai tensori di torsione e di curvatura di ∇ si hanno i seguenti risultati.

PROPOSIZIONE 3.1. – *Con le notazioni precedenti, se L e Q sono integrabili allora la connessione bi-Legendriana corrispondente è senza torsione lungo le foglie delle due foliazioni di Legendre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ definite da L e Q, rispettivamente. Inoltre, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fortemente piatte allora ∇ è piatta lungo le foglie di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.*

Utilizzando la Proposizione 3.1 si sono dimostrati teoremi di annullamento per classi caratteristiche di foliazioni di Legendre:

TEOREMA 3.2. – *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di Legendre fortemente piatta su una varietà almost $\mathcal{S}$ M^{2n+r}. Una condizione necessaria perchè $\mathcal{F}$ ammetta una distribuzione di Legendre fortemente piatta trasversa affine è che* $\mathrm{Pont}^j(TM) = 0$ *per* $j > n$.

TEOREMA 3.3. – *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di Legendre fortemente piatta su una varietà almost $\mathcal{S}$ M^{2n+r} tale che esista una distribuzione di Legendre fortemente piatta complementare al fibrato tangente di $\mathcal{F}$. Allora* $\mathrm{Pont}^j(TM) = 0$ *per* $j > 2n$.

L'annullamento di queste classi caratteristiche inoltre ha comportato la possibilità di costruire *classi caratteristiche secondarie* (o esotiche) per una foliazione di Legendre (per maggiori dettagli si rinvia il lettore a [4]).

4. – Connessioni di Ehresmann per foliazioni di Legendre.

Sia $(M, \phi, \xi_a, \eta_a, g)$ una varietà almost $\mathcal{S}$. Si noti che per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, r\}$ si ha $[\xi_\alpha, \xi_\beta] = 0$ e quindi i campi $\xi_1, \ldots, \xi_r$ definiscono una foliazione r-dimensionale di M^{2n+r}. Dal momento che $\mathcal{L}_{\xi_a}\Phi = 0$, tale foliazione è trasversalmente simplettica. Se M^{2n+r} è foliata da una foliazione di Legendre $\mathcal{F}$, allora ci si può porre la questione se $\mathcal{F}$ si proietti (localmente) su una foliazione Lagrangiana. Si ha il seguente teorema.

TEOREMA 4.1. – *Sia* $(M, \phi, \xi_a, \eta_a, g)$ *una varietà almost* $\mathcal{S}$ *munita di una distribuzione Legendriana L. Allora L si proietta, localmente, su una distribuzione Lagrangiana* L' *sullo spazio delle foglie della foliazione definita da* $\xi_1, \ldots, \xi_r$ *se e solo se L è fortemente piatta. Inoltre* L' *è integrabile se e solo se L è integrabile.*

Utilizzando il Teorema 4.1 è possibile dimostrare svariate proprietà riguardanti le foliazioni di Legendre. Una tra queste è che, sotto opportune ipotesi, ogni foliazione di Legendre fortemente piatta ammette una connessione di Ehresmann. Ricordiamo che, in generale, in uno spazio foliato $(M, \mathcal{F})$, una distribuzione D trasversa a $\mathcal{F}$ è chiamata *connessione di Ehresmann* per la foliazione $\mathcal{F}$ se per ogni curva "verticale" α (cioè il cui vettore velocità è tangente ad $\mathcal{F}$) e per ogni curva "orizzontale" β (cioè il cui vettore velocità appartiene a D), con lo stesso punto iniziale, esiste un (unico) rettangolo i cui lati iniziali siano proprio α e β. Qui per *rettangolo* si intende una mappa $\sigma : [0, a] \times [0, b] \to M$ tale che per ogni fissato $s \in [0, b]$ la curva $\sigma_s := \sigma|_{[0,a]\times\{s\}}$ è verticale e per ogni fissato $t \in [0, a]$ la curva $\sigma^t := \sigma|_{\{t\}\times[0,b]}$ è orizzontale. Le curve σ_0, σ_b e σ^0, σ^a sono chiamate, rispettivamente, il *lato verticale iniziale* e *finale* ed il *lato orizzontale iniziale* e *finale* di σ.

Ritornando alle foliazioni di Legendre, è stato provato il seguente risultato.

TEOREMA 4.2. – *Sia* $\mathcal{F}$ *una foliazione di Legendre su una varietà almost* $\mathcal{S}$ *compatta e connessa. Sia Q una distribuzione Legendriana fortemente piatta, trasversa a* $\mathcal{F}$*, tale che la corrispondente connessione bi-Legendriana* ∇ *sia tangenziale. Allora, se le foglie di* $\mathcal{F}$ *sono varietà affini complete (rispetto a* ∇*), la distribuzione* $D := Q \oplus \mathbb{R}\xi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\xi_r$ *è una connessione di Ehresmann per* $\mathcal{F}$.

L'esistenza di una connessione di Ehresmann comporta notevoli conseguenze per la foliazione in oggetto. Ne riportiamo alcune, supponendo di essere sempre sotto le ipotesi del Teorema 4.2.

COROLLARIO 4.3 – *Due qualsiasi foglie della foliazione di Legendre* $\mathcal{F}$ *possono essere unite da una curva orizzontale. Inoltre, i rivestimenti universali delle foglie di* $\mathcal{F}$ *sono isomorfi ed il gruppoide di omotopia di* $\mathcal{F}$ *è una varietà di Hausdorff.*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] D. E. BLAIR, *Geometry of manifolds with structural group* $U(n) \times O(s)$, J. Differential Geometry, **4** (1970), 155-167.

[2] B. CAPPELLETTI MONTANO, *Legendrian foliations on almost* $\mathcal{S}$*-manifolds*, Balkan J. Geom. Appl., **10** (2005), 11-32.

[3] B. CAPPELLETTI MONTANO, *Bi-Legendrian connections*, Ann. Polon. Math., **86** (2005), 79-95.

[4] B. CAPPELLETTI MONTANO, *Characteristic classes and Ehresmann connections for Legendrian foliations*, Publ. Math. Debrecen, **70** (2007), 395-425.

Dipartimento di Matematica, Università di Bari
e-mail: cappelletti@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XVII
Direttori di ricerca: Prof.ssa Anna Maria Pastore (Università di Bari),
Prof. Robert Wolak (Università, Jagiellonski, Cracovia)