
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ANTONIO GIORGILLI

I moti quasi periodici del sistema solare e la stabilità I: Dagli epicicli al punto omocline di Poincaré

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 10-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2007), n.1, p. 55–83.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_1_55_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_1_55_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

I moti quasi periodici e la stabilità del sistema solare. I: Dagli epicicli al punto omoclino di Poincaré

ANTONIO GIORGILLI

1. – Ouverture.

“Uscendo, per così dire, del mondo sensibile e ritirandosi al mondo ideale, comincia architettonicamente a considerare, che essendo la natura principio di moto, conviene che i corpi naturali siano mobili di moto locale. Dichiaro poi i movimenti locali esser di tre generi, cioè circolare, retto, e misto del retto e circolare; e li duoi primi chiama semplici perché di tutte le linee la circolare e la retta sola son semplici”.

Così, all'inizio della giornata prima del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* di Galileo, Salviati inizia ad esporre la teoria aristotelica del movimento ([3], pag. 38). Una classificazione che ci lascia un po' stupiti, e che sembra in profondo contrasto con l'osservazione quotidiana dell'infinita varietà dei movimenti che si svolgono sotto i nostri occhi. Ma è ben noto che la rappresentazione dei moti planetari sviluppata dalla scienza greca — Ipparco e Tolomeo, per citare solo due grandi rappresentanti — si fonda proprio sulla composizione di moti circolari. Del resto, se la rivoluzione Copernicana ha spostato la terra dal centro del mondo — idea che lo stesso Copernico afferma di aver appreso dai classici greci — non ha comunque mutato gli strumenti geometrici sui quali si reggeva tutta l'astronomia greca.

È opinione diffusa che Keplero abbia eliminato gli epicicli dall'astronomia, e la lettura della maggior parte dei testi di Meccanica Classica che possiamo trovare nelle nostre biblioteche ben si presta a confermare questa opinione. Ma lo stesso Keplero ci narra, nell'*Astronomia Nova*, come egli abbia a lungo tentato di aver ragione

del moto della stella Marte approssimandone l'orbita con eccentrici, deferenti ed epicycli, nella migliore tradizione classica. Solo nel capitolo *LVI* della sua opera arriva ad esporre come abbia intuito che l'orbita debba essere ellittica, e ben si vede come nel suo percorso intellettuale abbia avuto un ruolo determinante proprio il ricondursi allo schema classico degli epicycli⁽¹⁾.

Per quanto possa sembrare sorprendente, la rappresentazione del movimento come composizione di moti circolari uniformi continua ad essere una delle solide basi su cui poggia la Meccanica. Il concetto di *moto quasi periodico* ha un ruolo centrale: si intende che la dinamica possa descriversi in modo astratto mediante un sistema di coordinate angolari ϕ_1, \dots, ϕ_n che evolvono nel tempo t come $\phi_1(t) = \omega_1 t, \dots, \phi_n(t) = \omega_n t$, dove $\omega_1, \dots, \omega_n$ sono le *frequenze* del moto. L'evoluzione di una qualunque delle coordinate del sistema può rappresentarsi come una funzione multiperiodica $f(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$.

D'altro canto negli ultimi decenni si è presa coscienza anche dell'esistenza dei moti caotici. La scoperta, a dire il vero, non è recente: risale a Poincaré. Ma la comunità dei fisici e degli astronomi ha impiegato ottant'anni per rendersi conto dell'esistenza del caos in sistemi tradizionalmente considerati come esempi di ordine perfetto.

In questa nota intendo discutere il problema della stabilità del sistema solare seguendo come traccia la contrapposizione tra la rappresentazione mediante epicycli, ovvero con moti quasi periodici, ed il comportamento caotico. Per questo cercherò di sottolineare i passaggi a mio giudizio cruciali ricorrendo a esempi semplici, scelti — accettando il rischio di sfiorare la banalità — in modo da mettere in evidenza le difficoltà che hanno segnato lo sviluppo delle ricerche matematiche in questo campo.

La nota è divisa in due parti. La prima parte inizia con la cinematica Kepleriana e si conclude con il fenomeno del punto omoclino scoperto da Poincaré, passando per la nascita della teoria delle perturbazioni con Lagrange e Laplace e discutendo il problema delle risonanze e dei

⁽¹⁾ Per una ricostruzione storica sintetica del metodo degli epicycli come è stato utilizzato dagli autori sopra menzionati si veda l'interessante articolo [5].

piccoli divisori. Nella seconda parte illustrerò lo sviluppo delle nostre conoscenze nella seconda metà del secolo ormai trascorso. Inizierò con il teorema di Kolmogorov, che sancisce l'esistenza di moti quasi periodici, e proseguirò con quella che può definirsi come la riscoperta del caos da parte degli astronomi. Infine illustrerò il problema della stabilità su tempi lunghi alla luce della teoria della stabilità esponenziale.

2. – La rinascita degli epicicli.

La descrizione kepleriana del moto di ciascun pianeta rispetto al sole si riconduce alla determinazione di cinque quantità costanti ed un angolo variabile nel tempo:

- l'*inclinazione* i e la *longitudine del nodo* Ω , che determinano la giacitura del piano dell'orbita rispetto ad un riferimento assoluto (solidale con le stelle fisse);

- il *semiasse maggiore* a e l'*eccentricità* e che determinano la forma dell'ellisse;

- l'*argomento del perielio* ω , che determina l'orientamento dell'ellisse rispetto al nodo;

- l'*anomalia media* ℓ , un angolo fittizio che evolve uniformemente nel tempo come $\ell(t) = v(t - \tau)$, dove τ è l'istante del passaggio al perielio, e v è la frequenza del moto di rivoluzione, detta anche *moto medio*, calcolabile dal periodo T come $v = 2\pi/T$.

La conoscenza di queste quantità, dette *elementi orbitali*, permette di determinare completamente la posizione e la velocità del pianeta in qualunque istante. La non uniformità del moto sull'orbita viene recuperata grazie all'equazione di Keplero

$$u - e \sin u = \ell ,$$

dove u è l'*anomalia eccentrica*, seguita da una relazione trigonometrica tra u e l'*anomalia vera* ψ . Il lettore non del tutto familiare con questa descrizione potrà vederne la rappresentazione geometrica nelle figure 1 e 2.

È ben noto come la cinematica kepleriana venga completamente giustificata dalla Meccanica di Newton quando si consideri il problema del *moto centrale*, ossia la dinamica di un punto (il pianeta) sotto l'a-

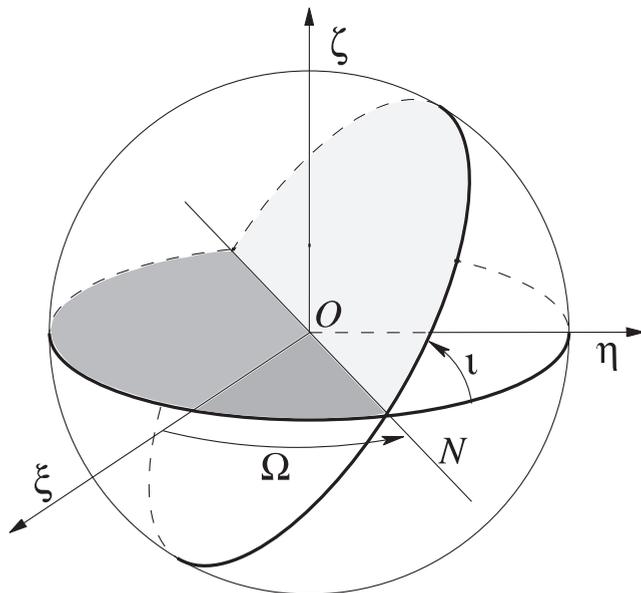


Fig. 1. – Determinazione della giacitura del piano dell'orbita. Assegnato un sistema di riferimento assoluto (solidale con le stelle fisse) con assi ζ , η , ζ , si identifica l'asse dei nodi N mediante l'intersezione del piano ζ , η col piano dell'orbita. L'inclinazione ι è l'angolo tra i due piani (o, equivalentemente, tra le normali ai due piani). La longitudine del nodo è l'angolo Ω tra l'asse ζ e l'asse dei nodi.

zione di un centro fisso (il sole), o anche il *problema dei due corpi*, ossia ammettendo che anche il sole si muova sotto l'azione del pianeta, sicché il centro fisso (o in moto rettilineo uniforme) viene rimpiazzato dal baricentro del sistema sole-pianeta. Ben diversa è la situazione se si considerano più di due corpi interagenti.

Il problema affrontato da Lagrange e Laplace consiste nello studiare la dinamica planetaria quando si tenga conto della mutua attrazione dei pianeti. Il metodo da loro introdotto è la *variazione delle costanti*: si ammette che le 5 quantità a , e , Ω , ι , ω , che sono costanti nella descrizione kepleriana, dipendano a loro volta dal tempo. Il calcolo è ovviamente complesso, e mi limiterò qui a sottolineare i punti salienti.

Si considera dunque il *problema degli N corpi*, uno dei quali (il sole) ha massa preponderante rispetto agli altri (i pianeti). Introducendo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano fisso, si ha il sistema

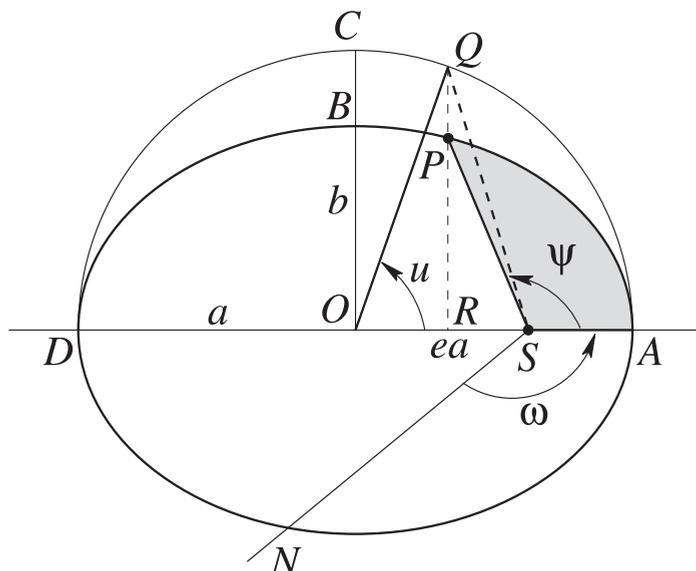


Fig. 2. – Gli elementi orbitali che caratterizzano l'orbita ed il movimento del pianeta. Il sole si trova nel fuoco S , il pianeta nel punto P . L'orientamento dell'ellisse nel piano dell'orbita è determinato mediante l'argomento del perielio ω , ossia l'angolo tra l'asse dei nodi N (si veda la fig. 1) e la semiretta che congiunge il sole S col perielio A . La semiasse maggiore a e l'eccentricità $e = |OS|/a$ determinano la forma dell'ellisse. L'arco $DCQA$ è la semicirconferenza di raggio a . Per la seconda legge di Keplero, l'area del settore di ellisse SAP evolve in modo uniforme. Con semplici considerazioni geometriche si ricava $\text{area}(SAP) = \frac{b}{a} (\text{area}(OAQ) - \text{area}(OSQ)) = \frac{ab}{2}(u - e \sin u)$, dove u è l'anomalia eccentrica, rappresentata in figura. Da qui si ricava subito la relazione tra anomalia eccentrica ed anomalia media, ovvero l'equazione di Keplero. Il lettore osserverà che l'eccentricità dell'ellisse è stata volutamente esagerata ($e = 0.6$) al fine di tracciare una figura comprensibile pur rispettando tutte le proporzioni.

di equazioni

$$(1) \quad m_0 \ddot{\mathbf{x}}_0 = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{F}_{0k}, \quad m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_{j0} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \mathbf{F}_{jk}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dove m_0 ed \mathbf{x}_0 sono rispettivamente la massa e il vettore posizione del sole, m_1, \dots, m_n e $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sono le masse e le posizioni degli n pianeti, e \mathbf{F}_{jk} è la forza che la massa k -esima esercita sulla massa j -esima. Nel caso gravitazionale la forza si scriverà come $\mathbf{F}_{jk} = -Gm_j m_k \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^3}$, dove G è la costante di gravitazione.

Partendo da queste equazioni Lagrange e Laplace dedussero le equazioni per gli elementi orbitali. Il calcolo è alquanto laborioso, e non è certo questa la sede ove svolgerlo in dettaglio. Si deve anche aggiungere che per molti versi risulta alquanto più comodo far ricorso al formalismo Hamiltoniano, ed introdurre le variabili canoniche di Poincaré A, λ, ξ, η , definite in termini degli elementi orbitali come

$$\begin{aligned} A_j &= \mu_j \sqrt{G(m_0 + m_j) a_j}, \\ \xi_j &= \sqrt{2A_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2} \cos(\omega_j + \Omega_j)}, \\ \xi_{m+j} &= \sqrt{2A_j} \sqrt{\sqrt{1 - e_j^2} (1 - \cos i_j) \cos \Omega_j} \\ \lambda_j &= \ell_j + \omega_j + \Omega_j, \\ \eta_j &= -\sqrt{2A_j} \sqrt{1 - \sqrt{1 - e_j^2} \sin(\omega_j + \Omega_j)}, \\ \eta_{m+j} &= -\sqrt{2A_j} \sqrt{\sqrt{1 - e_j^2} (1 - \cos i_j) \sin \Omega_j}, \end{aligned}$$

per $j = 1, \dots, n$, dove $\mu_j = m_0 m_j / (m_0 + m_j)$ sono le masse ridotte dei pianeti. Qui, le variabili A sono in relazione diretta con i semiassi maggiori, e le variabili λ ad esse coniugate sono degli angoli che descrivono la posizione di ciascun pianeta sulla sua orbita. Le variabili ξ, η hanno un significato abbastanza particolare: descrivono la dinamica delle eccentricità ed inclinazioni con gli angoli ad esse associati, argomento del perielio e longitudine del nodo, come oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio.

Evitando i calcoli alquanto laboriosi che servono per ricavare l'Hamiltoniana in variabili di Poincaré, mi limiterò a dire che essa assume la forma

$$(2) \quad H(A, \lambda, \xi, \eta) = H_0(A) + \varepsilon H_1(A, \lambda, \xi, \eta)$$

dove

$$(3) \quad H_0(A) = - \sum_{j=1}^n \frac{G^2 \mu_j^3 (m_0 + m_j)^2}{2A_j^2}$$

è l'Hamiltoniana del moto puramente kepleriano dei singoli pianeti, e $H_1(A, \lambda, \xi, \eta)$ è la perturbazione che include le interazioni tra i pianeti. Il parametro perturbativo

$$(4) \quad \varepsilon = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{m_j}{m_0}$$

posto di fronte alla funzione H_1 dà una misura dell'intensità della perturbazione, ed è di fatto quello che serve per quasi tutti gli sviluppi in serie della teoria classica. Nel caso del nostro sistema solare ε risulta essere il rapporto della massa di Giove con quella del sole, e dunque $\varepsilon \simeq \frac{1}{1047.355}$.

La parte laboriosa del calcolo consiste nel determinare lo sviluppo di H_1 nelle variabili A, λ , che descrivono l'orbita Kepleriana, e nelle variabili ξ, η , dette *secolari* perché descrivono le variazioni molto lente di eccentricità, inclinazione e longitudini di nodi e perielii. Ne risulta una funzione che è una serie di Fourier in λ ed una serie di Taylor in ξ, η , con coefficienti che dipendono da A .

Una prima approssimazione della dinamica delle variabili secolari può ottenersi nel modo seguente. Si fissano i semiassi maggiori dei pianeti (prendendo ad esempio i valori medi osservati), e di conseguenza la n -upla $A = A^*$ delle azioni corrispondenti agli angoli λ , detti *angoli veloci*, e questo determina una n -upla di frequenze $v^* = \frac{\partial H_0}{\partial A}(A^*)$. Questa operazione corrisponde a selezionare una soluzione kepleriana del problema imperturbato. Si introduce poi lo scostamento $\tilde{A} = A - A^*$, riducendo H_0 al solo termine $\tilde{H}_0 = \sum_j v_j^* \tilde{A}_j$. Infine si approssima H_1 calcolandone la media sugli angoli veloci λ e si mantiene solo la parte di ordine più basso in ξ, η , che risulta essere di grado 2, con coefficienti costanti calcolati nel punto A^* . Si ottiene così l'Hamiltoniana che descrive l'approssimazione di Lagrange e Laplace

$$H^{(LL)}(\tilde{A}, \xi, \eta) = \sum_j v_j^* \tilde{A}_j + Q_2(\xi, \eta),$$

dove $Q_2(\xi, \eta)$ è una forma quadratica che descrive la dinamica secolare. Di fatto ci si riconduce a studiare piccole oscillazioni nell'intorno di un equilibrio, il che introduce dei modi normali con le loro ampiezze e fasi. In particolare, le fasi sono combinazioni opportune delle longitudini di

nodi e perieli, e la loro lenta evoluzione produce i moti di precessione dei nodi e dei perieli delle orbite planetarie⁽²⁾. Si vede dunque come già l'approssimazione di Lagrange e Laplace reintroduca, in buona sostanza, gli epicicli della teoria classica.

3. – Un breve intermezzo di carattere storico.

Il caso del sole e di due pianeti, o *problema dei tre corpi*, è stato a buon diritto definito da Whittaker “*the most celebrated of all dynamical problems*” ([13], Cap. XIII, §154). Tra le molte monografie ad esso dedicate spiccano in particolare due opere di Poincaré: la memoria [11] presentata in occasione del premio bandito per il 60^{mo} compleanno del Re di Svezia Oscar II ed i tre volumi dei *Méthodes Nouvelles* [12]. La vicenda del premio presenta alcuni risvolti interessanti. Il tema n. 1 del concorso, come è stato pubblicato su Nature il 30.7.1885, è il seguente:

“A system being given of a number whatever of particles attracting one another mutually according to Newton’s law, it is proposed, on the assumption that there never takes place an impact of two particles to expand the coordinates of each particle in a series proceeding according to some known function of time and converging uniformly for any space of time.

It seems that this problem, the solution of which will considerably enlarge our knowledge regarding the system of the Universe, might be solved by means of the analytical resources at our present disposition; this may at least be fairly supposed, because shortly before his death Lejeune-Dirichlet communicated to a friend of his, a mathematician, that he had discovered a method of integrating the differential equations of mechanics, and he had succeeded, by applying this method, to demonstrate the stability of our planetary system in an absolutely strict manner. Unfortunately we know nothing about this method except that the starting point for his discovery seems to have been the theory of infinitely small oscillations. It may, however, be supposed almost with certainty that this method was not based on long and complicated calculations but on the development of a simple fundamental

(²) Il fenomeno non si deve confondere con la precessione degli equinozi, già nota ad Ipparco, che è invece un movimento del sistema di riferimento geocentrico usato abitualmente in astronomia, dovuto al movimento dell’asse di rotazione terrestre.

idea, which we may reasonably hope to find again by means of earnest and persevering study”.

Quel pochissimo di più che possiamo sapere sui risultati di Dirichlet lo troviamo nella *Gedächtnissrede auf Gustav Peter Lejeune Dirichlet* pronunciata da E. E. Kummer durante la seduta della *Königlich Akademie der Wissenschaften* del 5 luglio 1860:⁽³⁾

“Von einer grossen und besonders werthvollen Entdeckung aus der letzten Zeit seines Lebens, nämlich einer ganz neuen, allgemeinen Methode der Behandlung und Auflösung der Probleme der Mechanik, hat er nur gegen einen seiner Freunde, Herrn Kronecker, mit dem er in dem intimsten wissenschaftlichen und freundschaftlichen Verkehr stand, einmal im Sommer 1858 gesprochen. Er hatte selbst auf diese Entdeckung ein ganz besonderes Gewicht gelegt und Herrn Kronecker gebeten, vorläufig gegen niemand davon zu sprechen. Dieser hat darum erst nach Dirichlet's Tode seinen Freunden das mitgetheilt, was er von ihm darüber erfahren hatte, namentlich dass diese Methode nicht darauf hinausgehe, die Integrationen der betreffenden Differenti algleichungen auf Quadraturen zurückzuführen, weil dieses Mittel, durch welches Jacobi versucht hat, die Lösung der mechanischen Probleme zu gewinnen, zu beschränkt sei, dass sein Verfahren vielmehr in einer stufenweisen Annäherung bestehe, bei welcher jeder neue Schritt zugleich eine vollständigere und genauere Einsicht in die Natur der durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmten Bewegungen gewähre, endlich dass die Theorie der kleinen Schwingungen zur Auffindung dieser Methode einen gewissen Anhalt biete”.

⁽³⁾ Aveva inoltre parlato solamente ad un suo caro amico, il signor Kronecker, con il quale egli era in contatto stretto sia di amicizia personale che scientifica, una volta nell'estate del 1858, di una importante scoperta di grande rilievo degli ultimi anni della sua vita che riguardava un metodo generale, completamente nuovo, per trattare e risolvere il problema della meccanica. Egli stesso aveva attribuito un peso del tutto particolare a questa scoperta e aveva chiesto al signor Kronecker di non parlarne, per il momento, a nessuno. Il signor Kronecker poi, dopo la morte di Dirichlet, comunicò a questo proposito ai suoi amici quel che aveva sentito da lui, e cioè che questo metodo non si proponeva di ricondurre a quadrature le relative equazioni differenziali, poiché questo modo per cercare di ottenere la soluzione dei problemi della meccanica, che era stato tentato da Jacobi, è troppo limitato. Il suo metodo invece consisteva in un sistema di approssimazioni successive, nelle quali ad ogni passo della iterazione si ottiene una comprensione più precisa della natura dei movimenti determinati dalle condizioni del problema, ed infine che la teoria delle piccole oscillazioni offre un preciso supporto per la scoperta di questo metodo.

Quale fosse in realtà il metodo usato da Dirichlet, e quale il risultato da lui effettivamente ottenuto, è faccenda del tutto ignota. Poincaré non ritrovò quel risultato e, strettamente parlando, non svolse il tema assegnato, nel senso che non trovò il modo di scrivere le soluzioni del problema dei tre corpi sotto forma di sviluppi convergenti per qualunque intervallo temporale. Tuttavia la commissione, composta da Hermite, Weierstrass e Mittag-Leffler, gli assegnò il premio con la seguente motivazione, tratta dalla comunicazione dell'assegnazione del premio inviata a Poincaré⁽⁴⁾:

“Il ressort de ce rapport que la commission a été de l’opinion unanime, que le mémoire qui est intitulé “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique” avec la devise “Numquam præscriptos transibunt sidera fines”, est l’œuvre profonde et originale d’un génie mathématique dont la place est marquée parmi les grands géomètres du siècle. Les plus importantes et les plus difficiles questions, comme la stabilité du système du monde, l’expression analytique des coordonnées des planètes par des séries de sinus et de cosinus des multiples du temps, puis l’étude on ne peut plus remarquable, des mouvements asymptotiques, la découverte de formes de mouvement où les distances des corps restant comprises entre deux limites fixes, on ne peut cependant exprimer leurs coordonnées par des séries trigonometriques, d’autres sujets encore que nous n’indiquons point, sont traités par des méthodes qui ouvrent, il n’est que juste de le dire, une époque nouvelle dans la mécanique céleste”.

Nella prima versione della memoria Poincaré riteneva che le soluzioni asintotiche dovessero sempre raccordarsi tra loro, in modo ana-

⁽⁴⁾ Si evince da quel rapporto che la commissione, unanime, ha espresso il parere che la memoria dal titolo *Sul problema dei tre corpi e le equazioni della dinamica*, contraddistinta dal motto “Numquam præscriptos transibunt sidera fines” è l’opera profonda ed originale di un genio matematico che entra di diritto tra i grandi geometri del secolo. I problemi più importanti e difficili, quali la stabilità del sistema del mondo, l’espressione analitica delle coordinate dei pianeti mediante serie di seni e coseni di multipli del tempo, e poi lo studio notevolissimo dei movimenti asintotici, la scoperta di forme del movimento in cui le distanze tra i corpi restano comprese tra due limiti fissati, ma le cui coordinate non sono esprimibili mediante serie trigonometriche, ed altri argomenti che non stiamo ad elencare, vi sono trattati con metodi che, è più che giusto dirlo, aprono una nuova epoca per la meccanica celeste.

logo a quanto avviene per la separatrice del pendolo. L'errore gli fu segnalato da Phragmén, e Poincaré stesso, in una lettera a Mittag-Leffler, scrive: ⁽⁵⁾

“... Mais les conséquences de cette erreur sont plus graves que je ne l'avais cru d'abord. Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques soient fermées, au moins dans le sens où je l'entendais d'abord. Ce qui est vrai, c'est que si je considère les deux parties de cette surface (que je croyais hier encore raccordées l'une à l'autre) se coupent suivant une infinité de courbes trajectoires asymptotiques. J'avais cru que toutes ces courbes asymptotiques après s'être éloignées d'une courbe fermée représentant une solution périodique, se rapprocheront ensuite asymptotiquement de la même courbe fermée, ce qui est vrai étant qu'il y en a une infinité qui jouisse de cette propriété. Je ne vous dissimulerai pas le chagrin que me cause cette découverte. ...”

Il fascicolo degli *Acta Mathematica* con la prima versione della memoria, già stampato, venne ritirato e distrutto — ad eccezione di poche copie tra cui una annotata da Poincaré stesso. La vicenda probabilmente non avrebbe avuto grande risonanza se la correzione di quell'errore non avesse condotto Poincaré alla scoperta del fenomeno del punto omoclino e, di conseguenza, del comportamento caotico dei sistemi dinamici ⁽⁶⁾.

4. – Termini secolari, risonanze, piccoli divisori.

Le difficoltà insite nella ricerca delle soluzioni delle equazioni del moto planetario si possono ben mettere in evidenza mediante il ricorso

⁽⁵⁾ Ma le conseguenze di quell'errore sono più gravi di quanto io avessi pensato inizialmente. Non è vero che le superfici asintotiche sono chiuse, almeno non nel senso che io intendevo inizialmente. Ciò che è vero è che se considero le due parti di quella superficie (che ancor ieri io credevo raccordarsi l'una all'altra) esse si intersecano in un'infinità di orbite asintotiche. Io ero convinto che *tutte* quelle curve, dopo essersi allontanate da una curva chiusa rappresentante una soluzione periodica, si sarebbero poi riavvicinate a *quella stessa* curva chiusa, mentre la verità è che ne esistono infinite che godono di quella proprietà. Non vi nasconderò il rammarico che provo per questa constatazione.

⁽⁶⁾ Per una interessante ricostruzione storica della vicenda del premio si veda [1]. Le citazioni dei documenti concernenti il premio e della lettera di Poincaré a Mittag-Leffler sono prese da quel testo.

a modelli dall'apparenza semplice. Abbandonerò dunque momentaneamente il problema planetario, e passerò a discutere l'equazione di *Duffing*

$$(5) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\cos vt + x^3),$$

dove ε è un parametro che assumeremo piccolo.

Il lettore osserverà che l'equazione (5) si risolve in modo elementare quando si elimini il termine x^3 : si ha in tal caso il modello dell'oscillatore forzato $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \cos vt$ che si trova in tutti i testi di Meccanica o che viene usato come esempio elementare di equazione lineare non omogenea. Se invece si elimina la forzante periodica si ha un oscillatore non lineare che si riconduce alle quadrature grazie alla conservazione dell'energia $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} - \frac{\varepsilon x^4}{4}$.

4.1 – La soluzione per serie.

La soluzione dell'equazione completa (5) non è altrettanto semplice: occorre far ricorso ai metodi perturbativi. Il procedimento classico consiste nel cercare la soluzione sotto forma di uno sviluppo in serie del parametro ε

$$(6) \quad x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Per sostituzione nella (5) e per confronto dei coefficienti dello sviluppo in ε si ricava immediatamente il sistema di equazioni

$$(7) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \cos vt + x_0^3 \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 3x_0^2 x_1 \\ &\dots \\ \ddot{x}_s + \omega^2 x_s &= \psi_s(x_0, \dots, x_{s-1}) := \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \geq 0 \\ j_1 + j_2 + j_3 = s-1}} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3}. \end{aligned}$$

Il sistema può risolversi con un procedimento ricorsivo.

Senza entrare in dettagli, del resto non difficili, scriverò le soluzioni

ai primi tre ordini (assumendo che la fase iniziale sia nulla e che sia $\nu \neq \omega$)

$$x_0(t) = A \cos \omega t$$

con A costante da determinarsi mediante i dati iniziali, e

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{\nu^2 - \omega^2} \cos \nu t - \frac{A^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \frac{3A^3 t}{8\omega} \sin \omega t \\ x_2(t) &= \frac{3A^2}{2(\nu - \omega)^2(\nu + \omega)^2} \cos \nu t - \frac{21A^5}{1024\omega^4} \cos 3\omega t + \frac{A^5}{1024\omega^4} \cos 5\omega t \\ &\quad + \frac{3A^2}{4(\nu - 3\omega)(\nu - \omega)^2(\nu + \omega)} \cos(\nu - 2\omega)t + \frac{3A^2}{4(\nu - \omega)(\nu + \omega)^2(\nu + 3\omega)} \cos(\nu + 2\omega)t \\ &\quad + \frac{15A^5 t}{256\omega^3} \sin \omega t - \frac{9A^5 t}{256\omega^3} \sin 3\omega t - \frac{9A^5 t^2}{128\omega^2} \cos \omega t . \end{aligned}$$

Risparmierò al lettore la scrittura del termine $x_3(t)$, che già contiene una ventina di addendi a patto di aver semplificato il più possibile, e mi soffermerò invece su alcune caratteristiche che emergono dall'esame dei primi termini.

Anzitutto si osserva che le soluzioni ai vari ordini contengono dei polinomi trigonometrici, ossia termini della forma $\frac{\sin}{\cos}(j\omega + k\nu)t$, con j, k interi. Questi non sono altro che gli epicicli della teoria classica: se esistessero solo termini di questo tipo la soluzione avrebbe proprio la forma di una funzione quasi periodica del tempo. Qualche momento di attenzione permette anche di concludere che il termine noto ψ_s , una volta effettuate le sostituzioni delle funzioni del tempo e ridotta l'espressione risultante ad una forma che non contenga potenze delle funzioni seno e coseno, conterrà un polinomio trigonometrico di grado $2s + 1$, ovvero tali che $|j| + |k| \leq 2s + 1$: lo si verifica facilmente per ricorrenza.

Si vede poi che accanto ai termini puramente trigonometrici compaiono anche termini con potenze di t . È questo il problema dei *termini secolari* della Meccanica Celeste. Ciò che disturba in questo contesto è che l'esistenza di tali termini sembra essere in palese contrasto con la speranza che le soluzioni dell'equazione siano funzioni quasi periodiche del tempo. Naturalmente, questo potrebbe rivelarsi solo un increscioso contrattempo generato dal metodo di sviluppo che abbiamo scelto: non si può escludere che riordinando i termini secolari con po' di scaltrezza si arrivi a riconoscere lo sviluppo di Taylor di funzioni trigonometriche.

L'idea può sembrare azzardata, ma diventa naturale se si osserva che la non linearità modifica certamente la frequenza delle oscillazioni.

Una terza osservazione riguarda la presenza di divisori della forma $j\omega + kv$ con j, k interi. Poichè il grado del polinomio trigonometrico cresce con l'ordine in ε è naturale attendersi che qualunque coppia di interi j, k finisca prima o poi col comparire, a meno di cancellazioni ai limiti del miracolo. Se il rapporto ω/v fosse razionale dovremmo concludere che prima o poi nella serie comparirebbe un divisore nullo, il che renderebbe inconsistente il procedimento costruttivo: è questo il problema della *risonanza* tra le due frequenze ω e v che caratterizzano il sistema. In realtà il procedimento resta consistente, ma la risonanza produce ulteriori termini secolari. Per evitare tale circostanza occorre almeno assumere una *condizione di non risonanza* tra le frequenze, che in questo caso significa semplicemente che il rapporto ω/v deve essere irrazionale.

4.2 – *L'eliminazione dei termini secolari.*

Il primo obiettivo che si pone è quello di scrivere le soluzioni in una forma che coinvolga solo le funzioni trigonometriche seno e coseno, in modo che la quasi periodicità risulti salva. A questo problema si sono dedicati in modo particolare Gylden^[6] e Lindstedt^[9].

Il suggerimento di Lindstedt è che non si debba cercare la soluzione corrispondente ad un dato iniziale assegnato, (e quindi, in modo più o meno esplicito, ad un'ampiezza fissata dell'oscillazione), ma una soluzione che abbia *frequenze* fissate; l'ampiezza corrispondente viene determinata dal procedimento stesso. Nel caso dell'equazione di Duffing una delle frequenze, quella della forzante, non è modificabile, ma possiamo ben sostituire la frequenza propria ω con una frequenza diversa μ , scrivendo

$$(8) \quad \omega^2 = \mu^2 + \varepsilon\delta ,$$

dove δ è da pensarsi assegnato. Il fattore ε davanti a δ è mantenuto al solo fine di rendere più agevole lo sviluppo in ε , ma è del tutto inessenziale.

Seguendo Lindstedt, riscriviamo l'equazione di Duffing (5) nella forma (un po' contorta)

$$\ddot{x} + \mu^2 x = \varepsilon(\cos vt + x^3 - \delta x),$$

e cerchiamo ancora una soluzione come sviluppo in ε della forma (6). Il sistema risultante di equazioni ha una forma simile alla (7), avendosi

$$(9) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_0 + \mu^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \mu^2 x_1 &= \cos vt + x_0^3 - \delta x_0 \\ \ddot{x}_2 + \mu^2 x_2 &= 3x_0^2 x_1 - \delta x_1 \\ &\dots \\ \ddot{x}_s + \mu^2 x_s &= \psi_s(x_0, \dots, x_{s-1}) - \delta x_{s-1} \\ &\dots \end{aligned}$$

dove le $\psi_s(x_0, \dots, x_{s-1})$ hanno ancora la forma (7). Il vero cambiamento si ha nel processo risolutivo. La prima equazione dà ancora (sempre assumendo nulla la fase iniziale)

$$x_0(t) = A_0 \cos \mu t,$$

ma questa volta dobbiamo lasciare l'ampiezza indeterminata. Passiamo alla seconda equazione, sostituendovi ancora $x_0(t)$, e otteniamo

$$\ddot{x}_1 + \mu^2 x_1 = \cos vt + \frac{3A_0^3}{4} \cos \mu t - \delta A_0 \cos \mu t + \frac{A_0^3}{4} \cos 3\mu t.$$

Qui isoliamo il coefficiente di $\cos(\mu t)$, ovvero del termine che andrebbe a generare un contributo secolare nello sviluppo, e imponiamo che sia nullo, scrivendo l'equazione $\frac{3A_0^3}{4} - A_0 \delta = 0$. Questa equazione ci consente di determinare in prima approssimazione l'ampiezza A_0 come funzione della frequenza, dovendo essere

$$(10) \quad \frac{3A_0^2}{4} = \delta.$$

Avendo eliminato i termini indesiderati dall'equazione, passiamo

senz'altro a risolverla, e otteniamo

$$x_1(t) = \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \cos \nu t - \frac{A_0^3}{32\mu^2} \cos 3\mu t + A_1 \cos \mu t + B_1 \sin \mu t .$$

Qui siamo costretti a mantenere la soluzione dell'equazione omogenea con le due costanti arbitrarie A_1 , B_1 , che per il momento restano indeterminate. Ciò corrisponde al fatto che potrà essere necessario apportare qualche correzione all'ampiezza (ed eventualmente alla fase iniziale) al fine di mantenere fissata la frequenza.

Il procedimento per determinare $x_2(t)$ è del tutto simile. Nel secondo membro dell'equazione si impone l'annullamento dei coefficienti di $\sin \mu t$ e $\cos \mu t$, e si ottiene

$$A_1 = \frac{3A_0^5}{39\mu^2(9A_0^2 - 4\delta)} , \quad B_1 = 0 .$$

Poi, avendo cura di sostituire anche δ mediante la (10), si scrive l'equazione priva dei termini indesiderati

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \mu^2 x_2 = & \frac{3A_0^2}{4(\mu^2 - \nu^2)} \cos \nu t - \frac{3A_0^5}{256\mu^2} \cos 3\mu t - \frac{3A_0^5}{128\mu^2} \cos 5\mu t \\ & + \frac{3A_0^2}{4(\mu^2 - \nu^2)} \cos (2\mu t + \nu t) + \frac{3A_0^2}{4(\mu^2 - \nu^2)} \cos (2\mu t - \nu t) , \end{aligned}$$

ed infine la si risolve avendo cura di aggiungere anche la soluzioni dell'equazione omogenea con i parametri arbitrari A_2 , B_2 :

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \frac{3A_0^2}{4(\mu - \nu)^2(\mu + \nu)^2} \cos \nu t - \frac{3A_0^5}{2048\mu^4} \cos 3\mu t - \frac{A_0^5}{1024\mu^4} \cos 5\mu t \\ & + \frac{3A_0^2}{4(\mu - \nu)(\mu + \nu)^2(3\mu + \nu)} \cos (2\mu t + \nu t) + \frac{3A_0^2}{4(\mu - \nu)^2(3\mu - \nu)(\mu + \nu)} \cos (2\mu t - \nu t) \\ & + A_2 \cos \mu t + B_2 \sin \mu t . \end{aligned}$$

I parametri A_2 , B_2 serviranno per eliminare i termini indesiderati nell'equazione per $x_3(t)$.

Il procedimento ricorsivo, che ora dovrebbe essere sufficientemente chiaro, consente di costruire delle soluzioni che hanno la forma di funzioni puramente trigonometriche del tempo, almeno sotto l'ipo-

tesi di non risonanza. Precisamente, ad una fissata frequenza corrisponde una famiglia di soluzioni quasi periodiche, parametrizzata dalla fase iniziale (che può sempre aggiungersi). Questo mostra in modo implicito che i termini secolari che abbiamo trovato nel paragrafo 4 potranno sempre risommarsi in funzioni trigonometriche, riconducendosi ad una variazione delle frequenze del moto quasi periodico.

4.3 – *Il problema della convergenza.*

Quanto ho esposto nel paragrafo precedente è puramente formale: il procedimento di Lindstedt mostra che si possono determinare ricorsivamente i coefficienti dello sviluppo di una soluzione in potenze del parametro ε e in serie trigonometrica del tempo. Resta però da stabilire se tali serie siano convergenti.

Qui è d'obbligo tornare a Poincaré. Il secondo volume dei *Méthodes Nouvelles* è dedicato quasi per intero a mostrare che tutti i metodi perturbativi classici danno origine a serie non convergenti. In particolare vengono riprese ed estese le argomentazioni già contenute nella nota sui problemi dei tre corpi [11] sulla *Divergence des séries de M. Lindstedt*. La discussione lunga e dettagliata occupa un intero capitolo, ma non conduce ad una conclusione definitiva. Ecco le considerazioni finali di Poincaré (qui n_1, n_2 svolgono il ruolo delle frequenze μ, ν ⁽⁷⁾):

“... les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand ... le rapport n_1/n_2 soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport n_1/n_2 est assujéti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard)? Les raisonnements de ce chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.”

(7) ... le serie non potrebbero convergere, ad esempio, quando ... il rapporto n_1/n_2 sia incommensurabile, ma sia commensurabile il suo quadrato (oppure quando il rapporto n_1/n_2 soddisfi qualche altra condizione analoga a quella che ho enunciato un po' a caso)? Gli argomenti di questo capitolo non mi permettono di affermare che ciò non possa accadere. La sola cosa che posso dire è che è del tutto inverosimile.

La questione sollevata dalle considerazioni di Poincaré si è rivelata ben più complessa di quanto egli stesso avesse immaginato. Non intendo qui entrare nei dettagli del problema, né ripercorrerne tutto lo sviluppo storico (che pur sarebbe argomento alquanto interessante). Mi limiterò a segnalare poche tappe essenziali.

La convergenza delle serie di Lindstedt, sotto condizioni molto forti di non risonanza tra le frequenze (che per inciso sono soddisfatte nel caso suggerito “un peu au hasard” da Poincaré), è conseguenza di un celeberrimo teorema annunciato da Kolmogorov^[8] nel 1954, sul quale tornerò nella seconda parte di questo lavoro. La connessione tra il teorema di Kolmogorov e le serie di Lindstedt è discussa in un lavoro di Moser^[10] del 1967. Tuttavia Moser non riuscì a dare una dimostrazione *diretta* della convergenza delle serie ricorrendo a procedimenti classici quali il metodo delle serie maggioranti di Cauchy. Il motivo fu chiarito solo nel 1988 da Eliasson^[2]. Egli mostra che il processo di costruzione delle serie di Lindstedt determina il coefficiente di ciascun termine trigonometrico come somma di diversi contributi, alcuni dei quali crescono molto rapidamente ma si compensano algebricamente. Per dimostrare la convergenza delle serie in modo diretto è indispensabile tener conto delle *cancellazioni* dovute alle compensazioni algebriche. Il lavoro di Eliasson è stato ripreso successivamente da Gallavotti, che lo ha reso costruttivo identificando dei meccanismi espliciti di compensazione tra i coefficienti^[4].

5. – Il punto omoclino ed i moti caotici.

Veniamo ora alla scoperta della dinamica caotica ad opera di Poincaré. Per illustrarla farò uso del modello del *pendolo forzato*, descritto dall'equazione

$$(11) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x + \varepsilon \cos vt.$$

Ai fini della discussione che segue conviene introdurre il concetto di *sezione di Poincaré*. Dal momento che il secondo membro è periodico in x possiamo pensare ad (x, y) come a coordinate su un cilindro, $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$. Preso ora un punto P_0 sul cilindro (x, y) come

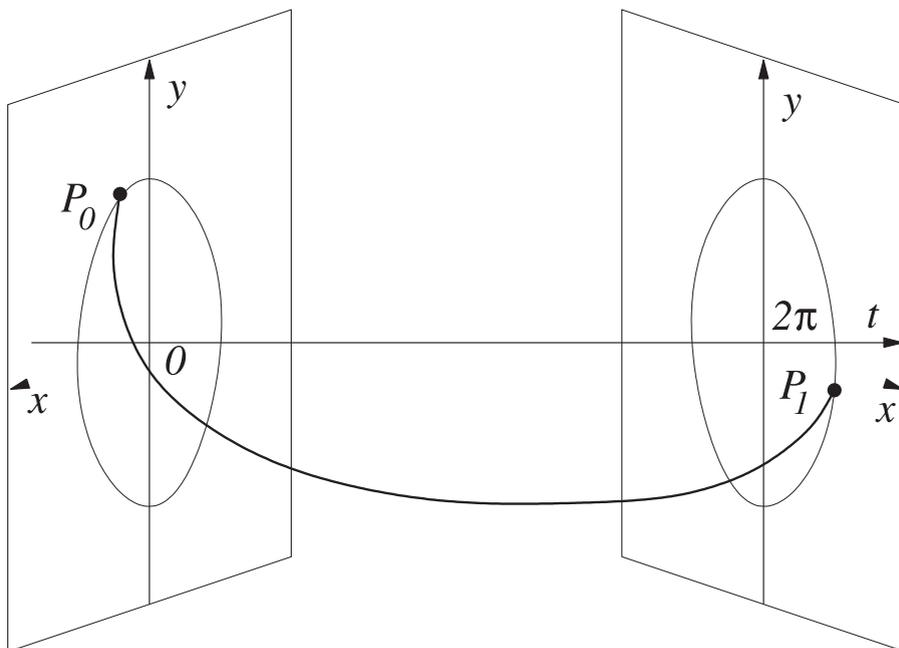


Fig. 3. – Ad illustrazione del metodo della sezione di Poincaré. A ciascun punto P_0 del piano (x, y) si associa il suo evoluto P_1 al tempo $T = 2\pi/v$.

dato iniziale al tempo $t = 0$, si marca il punto P_1 che ne rappresenta l'evoluto al tempo $T = 2\pi/v$ di P_0 , ovvero dopo un periodo della forzante (si veda la figura 3). Si ottiene così una mappa del cilindro su se stesso, palesemente invertibile e regolare, detta *sezione o mappa di Poincaré*. La natura Hamiltoniana del sistema che stiamo studiando garantisce anche che la mappa conservi le aree, e questa è una proprietà essenziale per il seguito. Si considera poi la successione di punti $\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$ costruita prendendo gli evoluti di P_0 ai tempi $\dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$; chiameremo questa successione un'*orbita* della mappa di Poincaré⁽⁸⁾. Lo studio della successione al variare del dato iniziale contiene tutte le informazioni qualitative interessanti sul comportamento dinamico del sistema, ed allo

⁽⁸⁾ Si pensi allo stroboscopio, strumento ampiamente utilizzato nella fisica ottocentesca, accanto agli specchi rotanti, per studiare i fenomeni oscillatori.

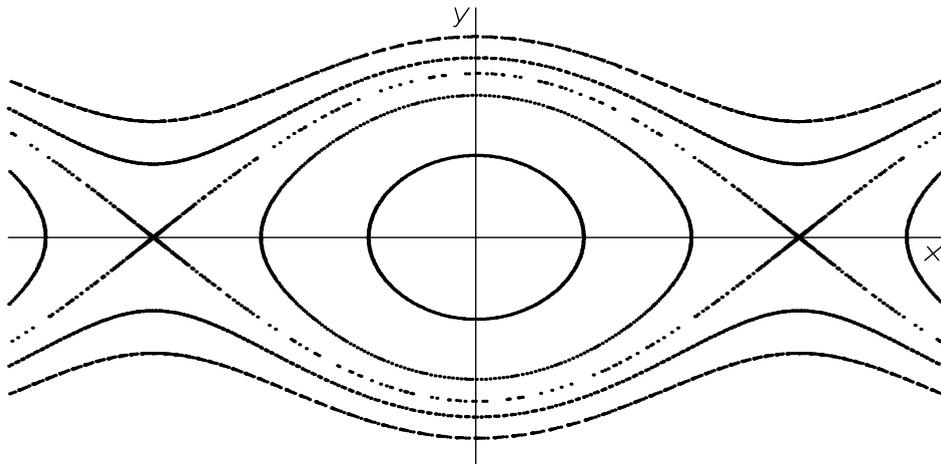


Fig. 4. – La sezione di Poincaré a periodo fissato per il modello del pendolo non forzato, $\varepsilon = 0$. Il periodo è determinato dalla frequenza della forzante, $\nu = \sqrt{2}$.

stesso tempo ne permette la rappresentazione sul piano. A questo studio Poincaré ha dato il nome, espressivo ma ormai caduto in disuso, di *théorie des consequents*.

Il calcolo della mappa con metodi numerici è agevole. Nelle figure 4 e 5 è riportato il risultato per due diversi valori di ε . Per $\varepsilon = 0$ si ha praticamente il diagramma di fase del pendolo. In figura 4 sono rappresentate le orbite corrispondenti a nove diversi dati iniziali. Le due orbite a forma di ellisse al centro della figura, descrivono le oscillazioni intorno al punto di equilibrio inferiore. Le due a forma di onda nella parte superiore della figura descrivono le rotazioni del pendolo in senso antiorario; altre due orbite, nella parte bassa della figura, descrivono la rotazione in senso orario. Le orbite rimanenti, che si intersecano tra loro formando una figura a forma di lente, corrispondono alla soluzione instabile di equilibrio superiore, rappresentata dal punto di intersezione e duplicata perché il cilindro viene rappresentato su un piano, e alle due *separatrici* del pendolo, ossia alle soluzioni che tendono asintoticamente al punto di equilibrio superiore sia per $t \rightarrow -\infty$ che per $t \rightarrow +\infty$: è questo l'esempio tipico di quelle che Poincaré chiamava *orbite doppiamente asintotiche*.

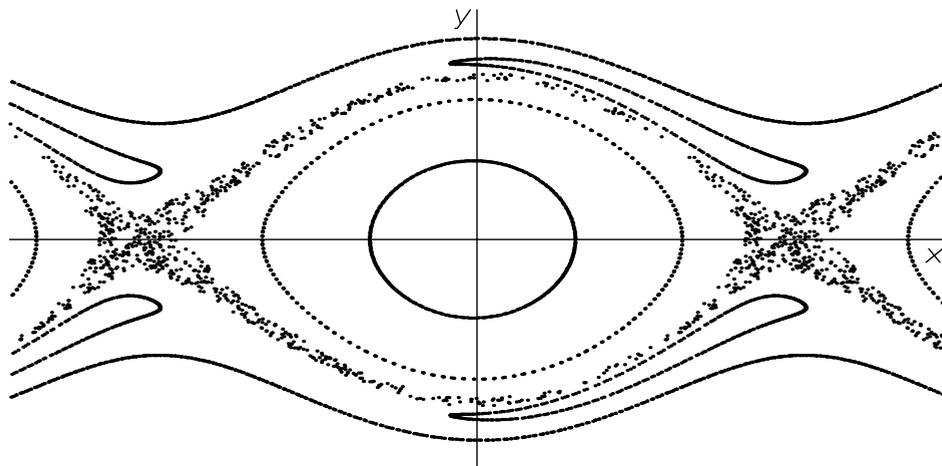


Fig. 5. – La sezione di Poincaré a periodo fissato per il modello del pendolo soggetto a forzante periodica di frequenza $\nu = \sqrt{2}$, con $\varepsilon = 0.5$.

Se si osserva la figura 5, corrispondente a $\varepsilon = 0.5$, si vede che le due orbite centrali si sono leggermente deformate, ma i punti sembrano comunque giacere su una curva regolare, e lo stesso accade per le due orbite più esterne. Due orbite si sono decisamente modificate, dando origine a due curve a forma di lingua: è questo un effetto della *risonanza* tra la frequenza di rotazione del pendolo e quella della forzante. Più sorprendente è il fatto che le due separatrici siano state sostituite da una regione invasa da punti che sembrano messi a caso: è spontaneo dubitare che un tal fenomeno sia prodotto dall'inevitabile errore numerico. Vorrei invece mostrare che si tratta di un fatto reale.

Se torniamo un momento a riflettere sulle separatrici rappresentate in figura 4 ci rendiamo conto che nel punto di equilibrio instabile si incrociano due curve che rappresentano quattro famiglie distinte di soluzioni asintotiche. La proprietà di asintoticità è caratterizzante, e viene assunta come definizione di *varietà stabile* (o *instabile*), costituita da tutti i punti che tendono asintoticamente all'equilibrio per $t \rightarrow +\infty$ (o per $t \rightarrow -\infty$). Nel caso del pendolo non perturbato queste varietà si raccordano tra di loro, nel senso che, ad esempio, la varietà instabile del punto di equilibrio rappresentato a sinistra coincide con quella stabile del punto rappresentato a destra. A questo fatto fa ri-

ferimento la lettera di Poincaré a Mittag-Leffler citata nel paragrafo 3.

Nella figura 5 sembra non esserci più traccia di queste varietà. La loro esistenza è tuttavia stabilita da un teorema, detto appunto *della varietà stabile*. Ciò che non è più vero, e questo è quanto viene sottolineato nella lettera di Poincaré, è il fatto che queste varietà si raccordino tra loro. La figura 6 illustra in dettaglio questo fatto.

Per semplificare il calcolo ho fatto ricorso alla cosiddetta *standard map*, che rappresenta in buona approssimazione la dinamica di un pendolo che viene periodicamente perturbato da un impulso istantaneo — un meccanismo analogo a quello dello scappamento ad ancora degli orologi meccanici, o all'impulso impresso alle particelle in un acceleratore. La mappa è definita come

$$(12) \quad x' = x + y \pmod{2\pi}, \quad y' = y + \varepsilon \sin(x + y),$$

ed ha ancora la proprietà di conservare l'area. Nel riquadro (a) della figura 6 sono rappresentati dei piccoli tratti delle varietà stabile ed instabile, che giacciono nell'intorno del punto di equilibrio. Calcolandone per due volte l'immagine tramite la mappa si ottiene la figura del riquadro (b). Si vede qui che le varietà si intersecano trasversalmente in due punti, chiamati da Poincaré *punti omoclini*. Ambedue i punti corrispondono ad orbite doppiamente asintotiche che sopravvivono alla perturbazione: ad esempio, le iterate successive del punto omoclino superiore tendono asintoticamente al punto di equilibrio di destra, mentre le sue iterate inverse successive tendono asintoticamente al punto di sinistra. Nulla sappiamo invece, fin qui, del destino degli altri punti delle varietà. Concentriamo ora la nostra attenzione sulla varietà instabile del punto di sinistra (il ramo superiore uscente da quel punto). Iterandone ancora una volta il tratto rappresentato nel riquadro (b) si ottiene l'immagine del riquadro (c): le intersezioni con la varietà stabile del punto di destra sono diventate tre; una è quella che già conosciamo; una è la sua immagine sotto l'iterazione; quella di mezzo è una nuova intersezione che si rivela ora, la cui esistenza si giustifica grazie alla proprietà di conservazione delle aree. Da qui in avanti occorre fare attenzione ai lobi formati dalle curve che rappresentano le due varietà: le loro aree sono eguali, e si con-

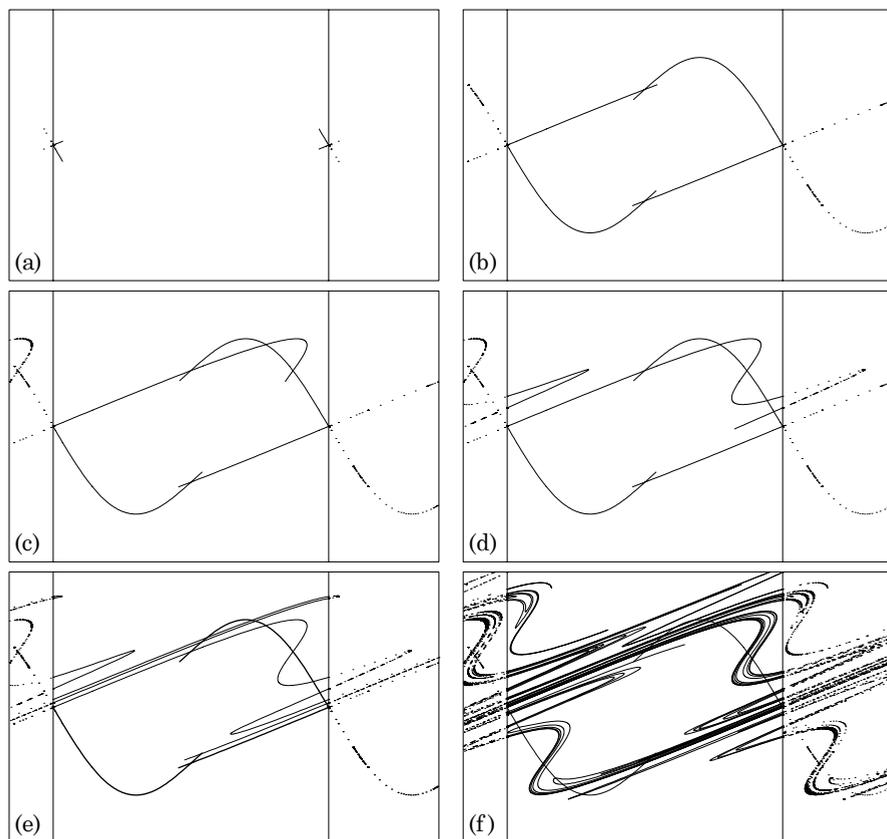


Fig. 6. – Il fenomeno del punto omoclinico per la standard map, con $\varepsilon = 2.36$. Le due rette verticali delimitano il cilindro rappresentato sul piano, mentre le strisce aggiuntive con le curve punteggiate hanno lo scopo di facilitare la comprensione della figura. **a.** Il tratto iniziale delle varietà stabile ed instabile del punto fisso instabile, duplicato a causa della rappresentazione del cilindro sul piano. **b.** Dopo 2 iterazioni le varietà si intersecano trasversalmente in due *punti omoclinici*. **c–f** Le immagini del primo tratto di varietà instabile del punto a sinistra dopo 3, 4, 5, 8 iterazioni.

servano sotto l'iterazione della mappa. Il riquadro (d) rappresenta l'iterazione successiva: i punti sono diventati 5, ed i nuovi lobi iniziano ad assumere una forma allungata. Ciò è inevitabile, perché alla conservazione dell'area si aggiunge il fatto che la varietà instabile non può autointersecarsi, grazie all'unicità dell'orbita passante per un punto. Il fenomeno dell'allungamento dei lobi si ripete aggiungendo un'ulte-

riore iterazione, che genera l'immagine del riquadro (e). Basta poi aggiungere altre 3 iterazioni per generare l'immagine, già abbastanza complessa, del riquadro (f): l'osservazione rilevante è che la forma sempre più sottile ed allungata dei lobi, unita all'impossibilità di autointersezione della varietà instabile, crea nuove intersezioni omocline con la varietà stabile, corrispondenti a loro volta a nuove orbite doppiamente asintotiche. Da qui la conclusione, menzionata nella lettera di Poincaré, che di tali orbite ne debbano esistere infinite. Scrive egli stesso ([12], Tome III, Chap. XXXIII, § 397)⁽⁹⁾:

“Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer”.

La disponibilità del calcolatore ci permette di disegnare una figura che ci dà un'idea ancora grossolana di quella che Poincaré si rifiutava di tracciare: l'ho riportata nel riquadro (a) della figura 7. Vorrei sottolineare ancora una volta che le curve rappresentate sono le immagini, sotto l'azione della mappa, di un tratto infinitesimo di separatrice che giace in prossimità dell'equilibrio. Nel riquadro (b) della stessa figura ho riportato alcune orbite della mappa, con il preciso scopo di mettere in evidenza il fatto che l'orbita caotica sembra riempire tutta la regione invasa dalle varietà stabile ed instabile. Al centro si può notare una regione di orbite ordinate che sopravvivono alla perturbazione;

⁽⁹⁾ Si cerchi di immaginare la figura formata da quelle due curve e dalle loro infinite intersezioni, ciascuna delle quali corrisponde ad una soluzione doppiamente asintotica. Quelle intersezioni formano una sorta di intreccio, di tessuto, di rete a maglie infinitamente strette; ciascuna di quelle due curve non deve mai reintersecare se stessa, ma si deve ripiegare su se stessa in modo estremamente complicato per tornare ad intersecare un'infinità di volte tutte le maglie della rete. Si resterà sbalorditi dalla complessità di questa figura, che io non provo neppure a tracciare.

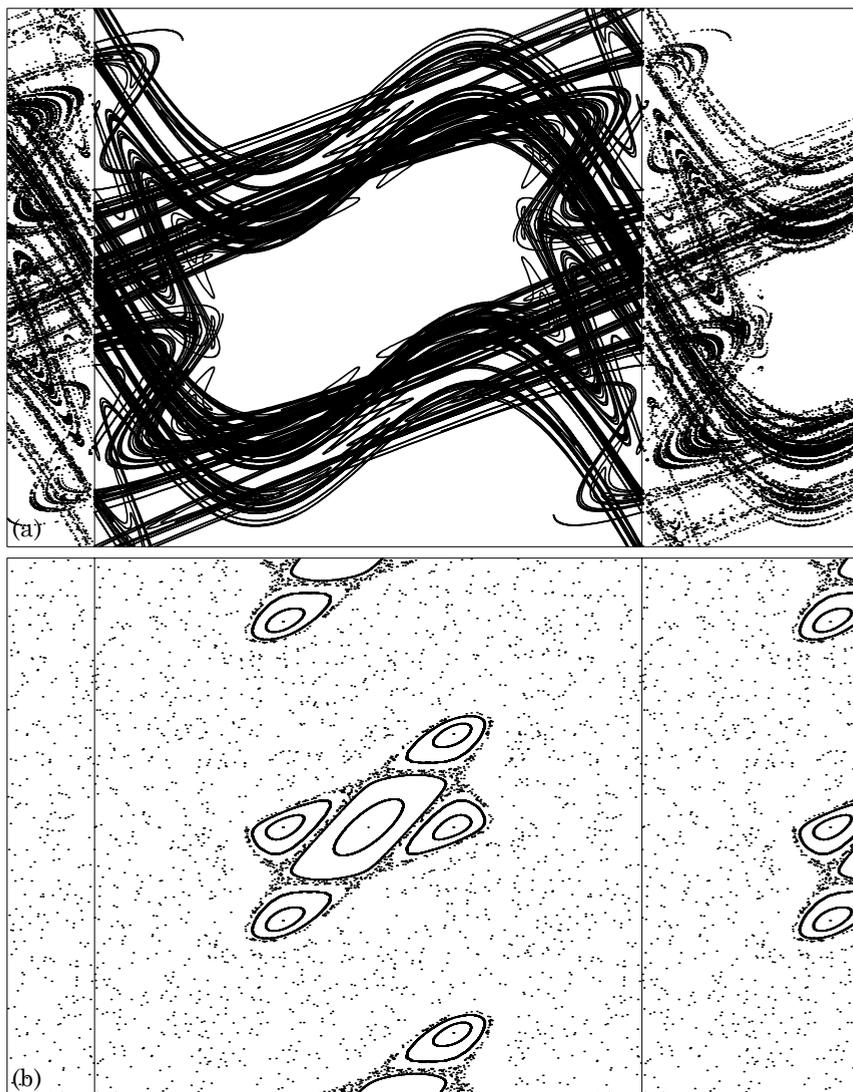


Fig. 7. – **a.** Rappresentazione parziale delle varietà stabili ed instabili per la standard map, con $\varepsilon = 2.36$. **b.** Rappresentazione di alcune orbite, ad illustrazione del fatto che l'orbita caotica riempie tutta la zona occupata dalle varietà stabili ed instabili, mentre sopravvive una regione di dinamica ordinata.

M. Hénon le ha descritte mediante l'immagine suggestiva di “isole di moto ordinato in un mare di orbite caotiche”^[7].

Ci si può chiedere quale sia la dinamica interna alle isole di moto

ordinato. In prima approssimazione si può descrivere il fenomeno nel modo seguente: intorno ad un punto fisso (o periodico) stabile si formano delle orbite che ruotano regolarmente con un angolo di rotazione medio, che chiamerò α , che è funzione della distanza dal punto fisso centrale, e le orbite giacciono su delle curve chiuse invarianti. Ma questa descrizione si rivela ancora troppo ingenua. Dobbiamo cominciare a distinguere tra curve sulle quali il rapporto $\frac{\alpha}{2\pi}$ è irrazionale, che vengono riempite densamente dall'orbita, da quelle su cui $\frac{\alpha}{2\pi}$ è razionale, che dovrebbero essere riempite da orbite periodiche. Delle prime torneremo a discutere più avanti, in connessione col teorema di Kolmogorov. Le orbite periodiche invece vengono tipicamente distrutte dalla perturbazione: in generale ne sopravvive solo un numero finito e pari, e le orbite sopravvissute sono alternativamente stabili ed instabili. È questo il contenuto del celebre *Teorema geometrico di Poincaré*, da lui enunciato e discusso e successivamente dimostrato da Birkhoff. Le orbite periodiche instabili danno origine a loro volta a varietà stabili ed instabili, che si intersecano creando di nuovo una struttura di punti omoclini. Inoltre la varietà instabile di un'orbita può ben intersecare la varietà stabile di un'orbita periodica diversa, dando così origine a quelli che Poincaré ha chiamato *punti eteroclini*. Le orbite stabili invece si circondano a loro volta di curve chiuse, formando una struttura più fine di isole. Il ripetersi di tale fenomeno è illustrato dalla figura 8. Nel riquadro (a) viene ingrandita una delle quattro piccole isole intorno a quella centrale della figura 7(b). I riquadri successivi sono ingrandimenti del quadratino disegnato all'interno del riquadro precedente. La proliferazione di orbite periodiche col relativo corredo di isole e varietà stabili/instabili è evidente. Il caos generato dalle intersezioni omocline è talvolta poco visibile, ma ciò non significa che non esista: il fatto è che la striscia invasa dall'orbita caotica è spesso troppo stretta per essere visualizzabile sulla scala della figura.

Col fenomeno del punto omoclinico e con la sua generalizzazione al *punto eteroclinico*, intersezione di varietà stabili ed instabili di orbite periodiche di periodo diverso, si chiude il terzo volume dei *Méthodes Nouvelles*. L'opera di Poincaré segna un punto di forte discontinuità rispetto al passato, facendo balenare la possibilità che la dinamica Newtoniana nasconda dentro di sé anche la possibilità del caos. Con

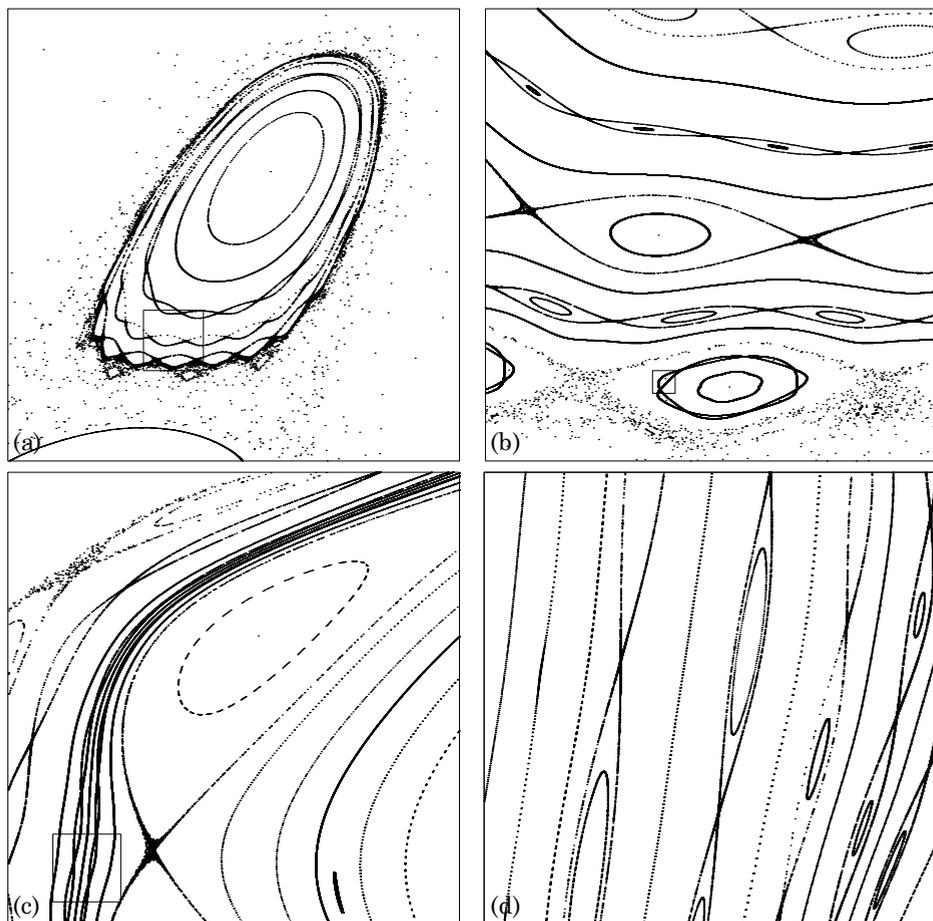


Fig. 8. – Ingrandimenti successivi delle orbite della standard map per $\varepsilon = 2.36$. Si vede come la formazione di isole intorno ad orbite periodiche stabili e di separatrici che emanano da orbite periodiche instabili si ripeta su scala sempre più piccola.

una frase ormai abusata, si potrebbe dire che dal quel momento nulla sarebbe più rimasto come prima. La realtà fu ben diversa: quasi tutto rimase come prima, almeno dal punto di vista degli astronomi. Tutti gli argomenti sulla divergenza come comportamento tipico delle serie della teoria delle perturbazioni rimasero tranquillamente ignorati: dopotutto fin che si trattava di calcolare le effemeridi o determinare le orbite di comete ed asteroidi le serie perturbative svolgevano egregiamente il loro compito. Il fenomeno del punto omoclinico e della di-

namica caotica che ne consegue restò sostanzialmente sconosciuto alla comunità dei fisici⁽¹⁰⁾ e dei matematici. I fisici, che pur avevano a che fare sistematicamente con problemi non lineari, spostarono la loro attenzione sulla nascente Meccanica Quantistica. I matematici dal canto loro cominciarono a trascurare il problemi della Meccanica. La teoria dei sistemi dinamici, fondata da Poincaré, venne sviluppata solo da pochi ma illustri matematici, tra cui spiccano i nomi di Birkhoff, che tra l'altro diede una dimostrazione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré, e Siegel, che per primo nel 1940 riuscì a risolvere un problema che coinvolgeva dei piccoli divisori.

Per quanto riguarda i moti planetari, il primo risultato di interesse paragonabile ai molti contenuti nell'opera di Poincaré apparve solo nel 1954 con l'annuncio del teorema di Kolmogorov. L'inizio dei voli spaziali, e la comparsa dei calcolatori elettronici fecero il resto, contribuendo a risvegliare l'interesse di astronomi e fisici per i problemi non lineari. Ma di questo mi occuperò nella seconda parte della nota.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. BARROW-GREEN, *Poincaré and the three body problem*, American Mathematical Society (1997).
- [2] L. H. ELIASSON, *Absolutely convergent series expansion for quasi-periodic motions*, report 2-88, Dept. of Math., Univ. of Stockolm (1988), poi pubblicato su MPEJ 2 (1996), 1-33.
- [3] GALILEO GALILEI, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano* (1632), Le Opere di Galileo Galilei, Ed. Nazionale diretta da Antonio Favaro, Vol. VII, Tipografia di G. Barbera, Firenze (1897).

⁽¹⁰⁾ Molti sollevano un'obiezione del tutto naturale: l'ipotesi di una dinamica caotica è alla base delle Teorie Cinetiche e della Meccanica Statistica, fatti ben noti a fisici e matematici. Vorrei però sottolineare che fino a pochi decenni fa era del tutto normale trovare nei testi di fisica una netta distinzione tra i sistemi a molti corpi — tipicamente gas — caratterizzati da una dinamica di tipo caotico e sistemi a pochi corpi — in prima linea il sistema planetario — caratterizzati da una dinamica ordinata. La novità introdotta da Poincaré, e rimasta ignorata per oltre mezzo secolo, è proprio il fatto che la dinamica caotica si presenta già nel problema dei tre corpi, che certo non rientra tra quelli considerati come tipici in Meccanica Statistica.

- [4] G. GALLAVOTTI, *Twistless KAM tori*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), 145-156.
- [5] G. GALLAVOTTI, *Quasi periodic motions from Hipparcus to Kolmogorov*, Rendiconti Accademia dei Lincei, Matematica e applicazioni, **12** (2001), 125-152.
- [6] H. GYLDÉN, *Untersuchungen über die Convergenz der Reigen, welche zur darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden*, Acta **9** (1887), 185-294.
- [7] M. HÉNON - C. HEILES, *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, Astron. J. **69** (1964), 73-79.
- [8] A. N. KOLMOGOROV, *Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **98** (1954), 527.
- [9] A. LINDSTEDT, *Beitrag zur integration der differentialgleichungen der differentialgleichungen der störungstheorie*, Mém. Acad. Imp. des sciences St. Pétersbourg, **XXXI** N.4 (1883).
- [10] J. MOSER, *Convergent series expansions for quasi-periodic motions*, Math. Ann. **169** (1967), 136-176.
- [11] H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica (1890).
- [12] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris (1892); recentemente ristampato da Blanchard (1987).
- [13] E. T. WHITTAKER, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, London (1970).

Antonio Giorgilli,
Università degli Studi di Milano, Dipartimento di Matematica,
e-mail: Antonio.Giorgilli@mat.unimi.it

