Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Piero Villaggio

Problemi Variazionali Plebei

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **10-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2007), n.1, p. 1–23.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2007_8_10A_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2007.

Bollettino U. M. I.
La matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. X-A, Aprile 2007, 1-20

Problemi Variazionali Plebei

PIERO VILLAGGIO

1. – La Tradizione.

Tutti coloro che, per curiosità o per corso di studi, si sono avvicinati al calcolo delle variazioni sanno che questa branca della matematica permette di mettere in termini di equazioni i problemi di massimo o di minimo relativi a funzionali, vale a dire si cerca la forma di una funzione (una curva, una superficie) che, tra le possibili candidate, soddisfa un dato principio di estremo. Questi problemi erano già dati posti nell'antichità suggeriti dalla geometria. Quale è la curva di minima lunghezza che congiunge due punti su una superficie? Questo è il problema della geodetica. Oppure, quale è la curva nel piano che racchiude la massima area a parità di lunghezza? Questo è il problema cosidetto isoperimetrico. Poi, nella seconda metà del seicento, ad opera di Johann Bernoulli e Newton, altri problemi variazionali sono stati proposti per questioni riguardanti la meccanica. Nel settecento, Eulero, ha formulato un metodo sistematico per trattare i problemi variazionali, e lui stesso ha proposto altre questioni di meccanica descrivibili in forma variazionale. Nel secolo successivo il calcolo variazionale è stato applicato alla Meccanica Analitica per proporre principi variazionali che descrivono il moto dei pianeti. In questo campo Hamilton e Jacobi hanno trovato delle formulazioni di stupefacente eleganza. A partire dalla fine dell'ottocento i metodi variazionali sono stati estesi allo studio delle dighe, delle gallerie, delle carene delle navi, dei profili dei ponti, e tanti altri problemi ancora.

Attualmente c'è un vitalissimo filone di ricerca che coltiva queste questioni, che si possono definire come i problemi «nobili» del calcolo delle variazioni.

Tuttavia qualunque persona attenta al funzionamento degli strumenti che usa nella vita quotidiana si domanda il perché essi abbiano certe sagome o perché certe operazioni istintive si compiano con un dato ritmo, oppure perché le istruzioni che si leggono sui contenitori dei prodotti alimentari siano così tassative. Certamente ci deve essere sotto un criterio di massima resistenza, minimo sforzo, ottima cottura, rispettivamente. Ma la soluzione di questi problemi, cosiddetti «plebei», è empirica e non matematica, sebbene essi condizionino pesantemente la nostra esistenza. La ragione di tale trascuranza è duplice. Per secoli gli scienziati (da Talete in poi) hanno concepito la scienza come la disciplina delle risposte grandi ([1]) con scarso interesse per la tecnologia spicciola. D'altra parte i problemi plebei sono di difficile formulazione matematica perché contengono molti fattori dominanti.

Ma se osserviamo con attenzione e un po' di sensibilità storica le soluzioni artigianali di tanti problemi comuni, troviamo che quasi sempre sono in accordo con la corrispondente risposta matematica. Il fatto che certe soluzioni siano un po' rozze è dovuto alla conoscenza imprecisa delle qualità dei materiali e delle leggi fisiologiche. I matematici di adesso le chiamerebbero soluzioni ottimali vincolate!

Adesso i problemi plebei sono ritenuti degni di studio come dimostra un libro avvincente di Giusti [5], che li presenta nelle operazioni in cucina.

2. – Martellamento e Taglio.

Una delle operazioni più importanti nella storia dell'umanità è il martellamento. Oltre all'uso di un corpo contundente per frantumare gusci, valve, crani, il martello è lo strumento principe per collegare assi di legno mediante chiodi (Fig. 1). La costruzione di navi rivestendo con fasciame uno scheletro sembra che sia stata introdotta dai Veneziani nell'undicesimo secolo (Oravas [10]). Ciò perché la saldezza dello scafo richiedeva connessioni rigide ottenibili solo con chiodi e non con cordicelle di canapa. I carpentieri veneziani rappresentarono per secoli il vertice della maestria, tanto che Dante e Galileo furono molto impressionati dal fervore dell'Arsenale.

([1]) *cf.* Dijksterhuis [3, Sec. I, 89-91].

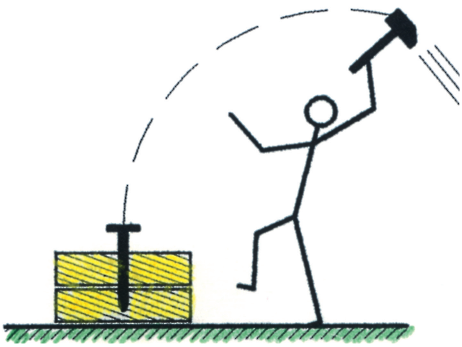

Fig. 1. – Il martellamento ottimo non è uniforme.

Trascurando tuttavia gli affascinanti dettagli storici, ci domandiamo se, nel piantare un chiodo in una parete di legno, c'è una regola preferenziale. Se osserviamo i carpentieri, esse cominciano con colpi lievi ma frequenti, poi, quando la punta è penetrata abbastanza, i colpi diventano più radi ma più rabbiosi, fino a completa penetrazione. C'è una spiegazione meccanica di questo modo di operare? La risposta è sì, senza riserve. Siccome la resistenza alla penetrazione dipende dalla lunghezza infissa, è necessario aumentare progressivamente la violenza della battuta. Ma l'energia di cui dispone il carpentiere è limitata, e quindi uno si chiede quale sia la strategia di dosaggio dei colpi per ottenere la penetrazione completa di un chiodo nel più breve tempo possibile ma senza varcare una certa soglia di energia spesa. Può sembrare una domanda oziosa, ma la soluzione rigorosa della questione non è nota, sebbene essa abbia estensioni di gran peso alla tecnica industriale come la battitura di pali in un terreno argilloso e lo schiacciamento di un blocco di metallo con un maglio.

Una situazione analoga si incontra nel problema del taglio. Anche in questo caso l'uso di scaglie sottili di pietra come strumenti taglianti era già diffuso nel Paleolitico, ma solo dopo la scoperta dei metalli, soprattutto del ferro, si poterono fabbricare lame sufficientemente dure da potere essere impiegate come utensili domestici oppure armi. Verso il 1100 A.C. gli Assiri costituirono il primo esercito della storia dotato d'armi di ferro (*cf.* Oravas [10, p. 52]).

Tuttavia, per rimanere su questioni pacifiche, ci domandiamo perché l'utensile chiave del Neolitico, la falce, abbia la lama curva (Fig. 2(a)) e non rettilinea. Anche qui la risposta è difficile , ma facciamo un tentativo. Se la lama fosse rettilinea, essa taglierebbe bene le spighe vicine al manico e male quelle vicine alla punta. Dunque conviene ridurre la lunghezza e farla curva. Con ciò otteniamo tre vantaggi. Il primo è che ogni colpo è meno faticoso perché il momento d'inerzia rispetto all'impugnatura è più piccolo. Il secondo motivo è che le spighe, racchiuse in un arco di cerchio, sono costipate meglio e quindi più facilmente recisibili. Infine si può sfruttare una rotazione del bordo interno della lama intorno al centro O per tagliare i fusti con un lieve spostamento periferico del manico. Qualcuno lo sapeva già (v. Fig. 2(b)).

È possibile formulare in termini matematici questo problema? Forse sì purchè si precisino meglio i dati e si dichiarino gli obiettivi. Comunque la risposta teorica di un modello semplificato può essere utile anche in un'era industriale dove le falci sono sostituite dalle trebbiatrici. Ma si sa con quali criteri razionali sono costruite le lame delle trebbiatrici che vediamo percorrere sterminati campi di frumento in tutti i continenti?

Ma ci sono altre estensioni domestiche della teoria della falce.

Fig. 2. – (a) La falce per tagliare le spighe è ricurva. (b) «Lei!»

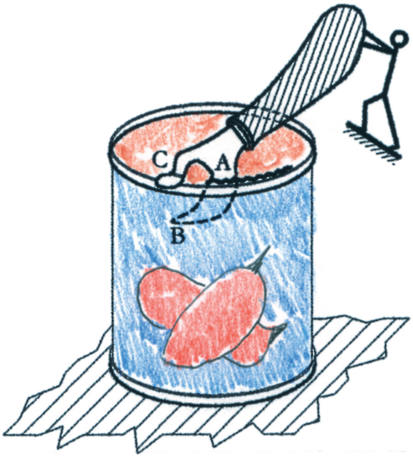

Fig. 3. – Una efficiente apertura dipende dalla forma del tagliente.

Adesso gli alimenti (legumi, pomodori, carni) sono conservati e venduti inscatolati. Per aprire queste scatole si impiega uno strumento sofisticato costituito da una lama munita di un contrasto mobile che avanza lungo il bordo della scatola dopo essere penetrato abbastanza (Fig. 3). Noi lo chiamiamo «apriscatole» ([2]). La lama dopo la prima infissione, procede (a differenza della falce) per segmenti d'arco perché ha un fulcro nell'estremo C del braccio parallelo che si appoggia al bordo e questo punto viene spostato passo dopo passo ogni volta che la lama ha tagliato un pezzo di coperchio. Contrariamente a ciò che si può pensare, questo problema si riesce a trattare con maggior rigore. Siccome il coperchio si apre per taglio, occorre determinare la forma del profilo interno AB della lama tale che, durante la rotazione rigida intorno a C, la tensione di taglio sia costante e uguale al valore limite che produce il distacco della lamiera. Se, alla fine del seicento, si fossero usati i barattoli per conservare gli alimenti, Johann Bernoulli l'avrebbe chiamato il problema dell' «isotemnica.» Non sappiamo se esistono metodi scientifici per sagomare le lame degli aratri.

([2]) *cf.* La funzione dell'apriscatole come leva è già stata descritta nel libro di Giusti [5, Cap. 7].

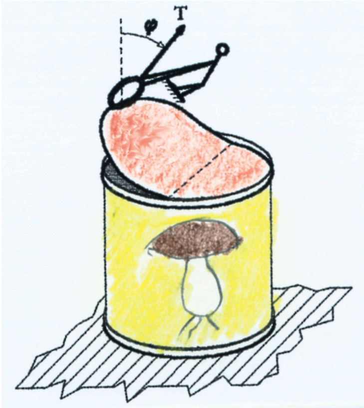

Fig. 4. – L'apriscatole ad anello richiede una variazione progressiva di φ.

Negli ultimi decenni anche gli apriscatole sono diventati obsoleti. Attualmente le scatole si aprono a strappo tirando manualmente un anellino situato sulla faccia superiore (Fig. 4), che si distacca con continuità dal bordo dosando simultaneamente la forza di trazione e la sua inclinazione. Nel caso che siano assegnate la direzione e l'intensità della forza applicata all'anello e che la lamina, invece che circolare, sia una striscia rettangolare, Burridge e Keller [2] hanno trovato una soluzione molto elegante del problema. La versione variazionale del problema è di determinare l'angolo φ (Fig. 4) ed il valore di T in modo tale che il lavoro per conseguire il distacco completo sia minimo. Chiunque si sarà accorto che la direzione della forza che si imprime istintivamente all'anello è verticale in fase di primo distacco e tende all'orizzontale verso la fine. Ma nella storia della matematica è spesso accaduto che uno stesso problema venga posto per descrivere situazioni fisiche completamente diverse. Già negli anni '40 del secolo scorso i medici inglesi avevano interrogato i matematici per sapere come era possibile strappare un cerotto dalla pelle degli aviatori ustionati arrecando ai pazienti il minimo dolore (testimonianza di Roland Rivlin). Il responso era stato che il cerotto va staccato come il coperchio del barattolo.

Sempre in tema di taglio è stata di recente proposta una soluzione ottimale per il profilo delle lame di una forbice (Mu e

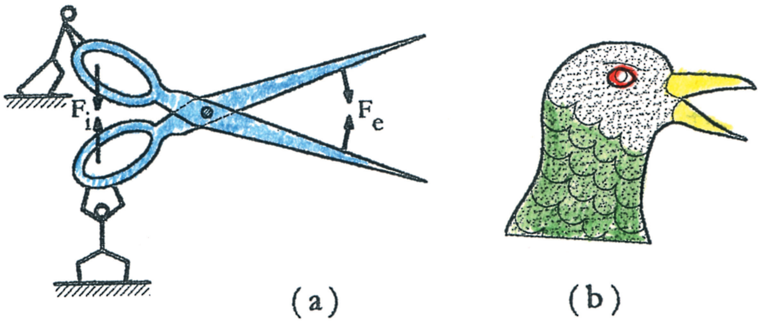

Fig. 5. – Nella forbice ottima il bordo interno della lama è curvo.

Kazerounian [9]) (Fig. 5(a)). Se indichiamo con F_i la forza interna sugli anelli e con F_e la forza sulla lama, questa tende a diminuire man mano che il suo punto d'applicazione si sposta verso la punta. Ciò avviene se le lame sono rettilinee. Gli autori si pongono il problema di determinare la forma che deve avere il bordo interno di ciascuna lama affinchè il rapporto F_i/F_e sia costante qualunque sia la posizione di F_e e trovano l'equazione di tale bordo. Ma, probabilmente, la loro soluzione era già nota in precedenza (Fig. 5(b)).

E poi c'è il problema dei cavatappi (Fig. 6) (3). Qui la meccanica è semplice. L'elica penetra nel tappo e poi lo risucchia mediante due leve. Se tutti i dati fossero noti (dimensioni dell'elica, attrito fra tappo e vetro, consistenza del sughero) questo è un esercizio di meccanica razionale. Ma sperimentiamo pure che, se l'elica è penetrata poco, non riusciamo ad estrarre il tappo perché questo si sfalda. Se, viceversa, lo facciamo andare troppo in giù la fatica per stappare la bottiglia è proibitiva. Dunque dobbiamo trovare la profondità di avvitamento che consente l'estrazione del tappo senza pericolo di romperlo, ma spendendo il minimo lavoro. Un'informazione del genere sarebbe utilissima ad i camerieri nei ristoranti.

(3) *cf.* l'illustrazione di Giusti [5, Cap. 7].

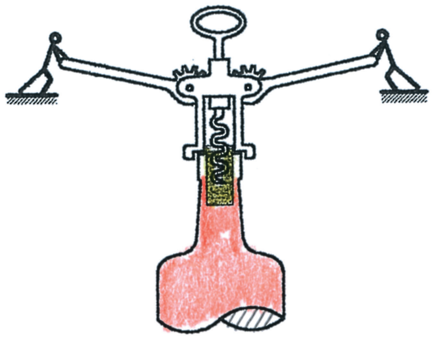

Fig. 6. – C’è una profondità di avvitamento ottima.

In tema di apertura di bottiglie ci si può chiedere perché i tappi delle bottiglie di birra sono fatti come corone con tanti lobi lungo la base (Fig. 7). È evidente che i lobi sono essenziali per assicurare la tenuta del gas, ma, se sono troppo profondi, rischiano di spaccare l’orlo della bottiglia quando il tappo viene estratto. Anche qui ci deve essere una forma ottima dei lobi tale che, a parità di materiale, medi fra queste esigenze contrastanti. Ma forse questo sistema di chiusura non è soddisfacente perché le case produttrici di birra propongono continuamente altri tipi di tappi (a vite, a strappo) sebbene senza sostanziale successo.

Fig. 7. – Perché i tappi delle bottiglie di birra sono fatti così?

3. – Locomozione.

Per due secoli e mezzo la meccanica nobile ha studiato il moto delle macchine a vapore, dei motori a scoppio, dei motori elettrici, delle turbine, sempre attenta a reperire, seppure per via empirica, le velocità più appropriate di ciascun componente della macchina. L'insieme di tante conoscenze frammentarie ha dato origine al metodo delle Norme, che sono delle prescrizioni tabulate per imporre certi limiti superiori ed inferiori alle dimensioni e alle velocità degli organi che si devono assemblare. Per esempio, le pale di una turbina devono essere dimensionate in un certo modo e non possono superare una data velocità di rotazione.

Nel campo dei problemi plebei, rimasti ignorati per due secoli, i primi interessi per la locomozione degli animali si sono manifestati verso la metà del novecento, sebbene già poco prima il fisiologo italiano R. Margaria [8] avesse tentato di quantizzare il consumo energetico metabolico durante la marcia e la corsa dell'uomo. Il modello più semplice per descrivere la marcia sul piano è quello di considerare le gambe come due pendoli rigidi che si alternano nello spostare il baricentro del corpo descrivendo una successione di archi circolari (Fig. 8) (*cf.* Alexander [1, p.101]). Il lavoro meccanico puro ad ogni passo è dovuto all'escursione verticale h del baricentro, che dipende dalla lunghezza del passo. Il lavoro metabolico è invece circa 4.8 volte maggiore perché è basato sulle contrazioni muscolari in fase di sollevamento e di appoggio (Margaria [8]), ma ciò non cambia il modello. Dunque, data la lunghezza del passo, possiamo calcolare il lavoro totale

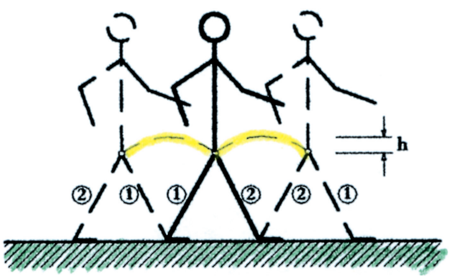

Fig. 8. – Il baricentro si alza e si abbassa fra un passo e l'altro.

per percorrere un tratto di strada assegnato. Tuttavia abbiamo dei vincoli naturali, uno sulla lunghezza del passo, che non può essere troppo lungo, e uno sulla sua frequenza, che non può essere troppo rapida, e uno sul lavoro speso, che non può oltrepassare una certa soglia. E allora ci domandiamo come determinare la lunghezza del passo e il suo ritmo in modo da percorrere una certa distanza nel più breve tempo possibile. Questo è un problema aperto (eventualmente arricchito da ulteriori conoscenze fisiologiche).

La descrizione variazionale della corsa ottima è quasi la stessa, ma con la differenza che la meccanica dell'avanzamento è diversa. In questo caso il corpo procede per balzi successivi con completo distacco dal suolo di tutti gli arti non appena esso abbia raggiunto il punto più basso (Fig. 9). Anche qui possiamo calcolare facilmente il lavoro corrispondente ad ogni salto, imporre i vincoli anatomici, e minimizzare il tempo di percorrimento di una data lunghezza.

Tuttavia, sul problema della corsa ottimale, sono state formulate altre varianti. Possiamo riguardare il corpo come un punto materiale che deve percorrere una certa distanza D (Fig. 10) nel minimo tempo possibile sapendo che esso può raggiungere una velocità massima di circa 10 m/sec e che l'energia metabolica a disposizione è limitata. Una soluzione proposta da Keller [6] per distanze di circa 400 m è che il diagramma della velocità deve essere come quello indicato nella figura. Si deve raggiungere nel più breve spazio possibile la velocità massima, diciamo v_0; correre a questo ritmo fino a quando si stanno perdendo le forze; decelerare con continuità sino al traguardo. La soluzione di Keller è stata criticata. L'obiezione principale è che, per vincere una corsa, i fattori psicologici attivati dalla competizione sono determinanti. La ri-

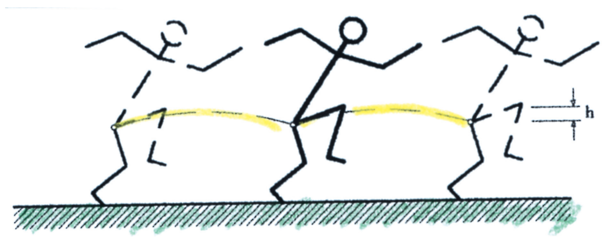

Fig. 9. – Nella corsa i piedi toccano il terreno solo a intervalli.

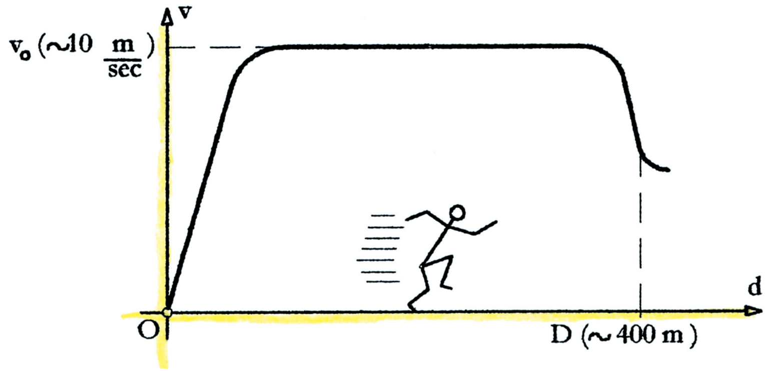

Fig. 10. – La strategia ottima di corsa.

sposta sarcastica di Keller è che, se i campioni adottassero la sua strategia, migliorerebbero i loro records! Tuttavia c'è un particolare interessante nella soluzione di Keller. La curva ottima raggiunge ed abbandona con tangente continua il tratto orizzontale, contrariamente all'intuizione che si aspetta deviazioni brusche. Ma ciò è previsto dalla soluzione matematica (condizioni di Erdmann-Weierstrass) ed è applicato correntemente nella teoria dei controlli (*cf.* Petrov [11, V]).

Sempre in tema di locomozione, Keller [7] ha posto il problema di determinare il tempo più breve per risalire una fune che pende dal soffitto di una palestra nel più breve tempo possibile. La manovra più istintiva è quella di usare alternativamente braccia e gambe, ma, se vogliamo accelerare il tempo di risalita, questo metodo non va bene. È invece più conveniente innalzarsi usando le sole braccia, ammesso che si sia abbastanza forti nei bicipiti (Fig. 11). Keller accetta la legge sperimentale che la forza di sollevamento sia della forma $\kappa P^{2/3}$ essendo P il peso del corpo e κ una costante che vale circa 3.8 $\mathrm{Kg}^{1/3}$, indi scrive ed integra l'equazione del moto. Una conclusione divertente è che c'è un peso critico di circa 57 Kg oltre il quale la progressione a sole braccia non è più conveniente! Il risultato sembra cabalistico ma si dimostra facilmente osservando che, in condizioni critiche, $\kappa P^{2/3}$ è uguale a P.

E poi c'è un'altra applicazione suggestiva di questa teoria. Nelle pareti difficili delle montagne si devono spesso superare dei tratti strapiombanti (Fig. 12). Gli alpinisti cercano di sfruttare il più pos-

Fig. 11. – Per risalire rapidamente una fune conviene usare solo le braccia.

sibile l'appoggio dei piedi, ma questo diviene sempre più debole man mano che ci si avvicina all'orlo dello strapiombo, dove praticamente bisogna fare affidamento solo sulle braccia. Anche in questo caso possiamo applicare l'equazione di Keller, ma con la modifica che P, il peso, non è costante, ma aumenta progressivamente dalla base dello strapiombo, dove la parete è verticale, fino al bordo, dove l'appoggio dei piedi viene a mancare. Naturalmente qui la situazione è più delicata perché uno non sa in anticipo le dimensioni degli appigli sovrastanti. E allora si possono usare due tecniche: quella prudenziale di successivi innalzamenti, esplorazioni del terreno, e ritorni, come fanno i gatti; oppure quella di buttarsi su di slancio confidando, in caso di caduta, sulla resistenza della protezione. È controversa la questione di quale sia il metodo migliore per conseguire la minima spesa di energia.

Una situazione apparentemente analoga, ma in realtà diversa si pone nella risalita delle pareti verticali di ghiaccio laddove si progredisce con ramponi ai piedi e due piccozze nelle mani (Fig. 13). A differenza dall'arrampicata su roccia, gli appigli e gli appoggi sono qui creati artificialmente infiggendo successivamente le punte dei ramponi e le punte delle piccozze, ma il loro distanziamento nella progressione è libero entro certi limiti. Allora, accettando ancora la legge

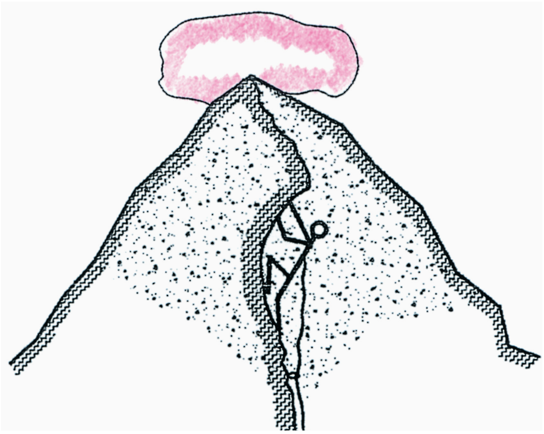

Fig. 12. – Nel superamento di uno strapiombo il peso sulle braccia aumenta progressivamente.

che la forza motrice sia $\kappa P^{2/3}$, ci domandiamo come conviene collocare progressivamente le varie punte al fine di ottenere il minimo dispendio energetico. Si può obiettare che un siffatto modello è troppo rudimentale per dare indicazioni utili; ma si può pure rispondere che, in attesa di dati più precisi (come, per esempio, un perfezionamento della legge $\kappa P^{2/3}$ che distingua la forza motrice delle braccia e delle gambe), qualunque informazione è utile. Per esempio, uno dei dettami più

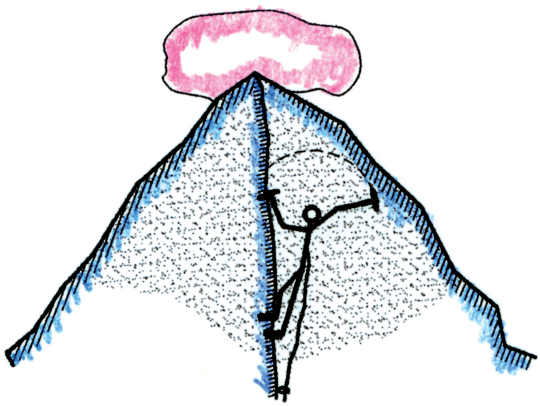

Fig. 13. – Nel risalire una parete di ghiaccio bisogna piantare le quattro punte nel modo migliore.

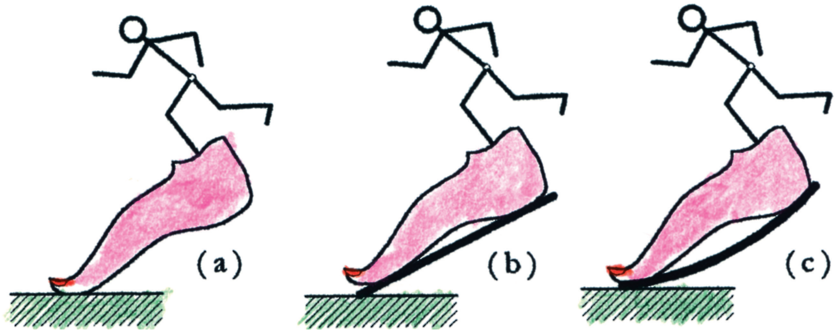

Fig. 14. – La suola flessibile serve a ripartire gli sforzi nei tendini.

tassativi è che i ramponi devono essere sempre orizzontali (*cf.* Fyffe and Peter [4, Ch. 14]).

Infine c'è il problema della flessibilità delle suole delle scarpe. Da secoli si usa frapporre fra il piede ed il terreno una lamina flessibile che si chiama suola. La sua funzione primaria è quella di proteggere la pianta del piede dalle asperità del terreno, dai serpenti, dal freddo, dal caldo. Ma la suola ha anche un ruolo importante nella deambulazione. Se uno camminasse a piedi nudi (Fig. 14(a)) solleciterebbe molto i tendini del piede. D'altra parte una suola rigida impegnerebbe esclusivamente i tendini della caviglia (Fig. 14(b)). La suola flessibile invece li fa lavorare entrambi (Fig. 14(c)) ed è aperto il problema di graduare lo spessore della suola in modo che offra una equipartizione dello sforzo tendineo.

4. – Meccanica negli alimenti.

Non c'è dubbio che la mangiabilità e la conservazione dei cibi sia uno dei problemi più importanti della storia dell'umanità. A ciò un'esperienza affinata attraverso i millenni ha fornito molteplici risposte. I cibi per essere edibili sono putrefatti, arrostiti, bolliti, e per conservarli bisogna essiccarli, salarli, metterli in salamoia, sotto vuoto, congelarli, refrigerarli. Gli accorgimenti sono infiniti, e tutti sicuramente rispettano dei criteri di ottimalità. Ma quali essi siano non si sa. Negli ultimi cinquant'anni l'industria si è impegnata pesantemente nella conservazione degli alimenti fornendo soluzioni molto ingegnose sul-l'impaccaggio del latte, delle verdure, del pane, del formaggio, della carne. E così pure i metodi di cottura dei cibi preconfezionati (ad aria, vapore, microonde, ed altri) sono stati così perfezionati che si può stabilire in anticipo il colore della crosta di un panettone in funzione dei minuti in cui è stato tenuto in forno, oppure di determinare il tempo di buona conservazione di una mozzarella in base allo spessore dell'involucro. Questi ormai non sono più problemi plebei.

Tuttavia i problemi plebei continuano a porsi nei retaggi della vita domestica, dove vengono risolti con operazioni istintive. L'*American Chemical Society*, sin dal 1970 ha dedicato una sezione della sua rivista al trattamento dei cibi casalinghi, considerando gli aspetti di trasmissione del calore, trasformazioni chimiche e termodinamiche, che vi sono coinvolti. Ma le questioni di meccanica spicciola sono sempre state neglette, sebbene queste siano le più frequenti.

Un'operazione quotidiana è, per esempio, la pelatura di un frutto come una mela (Fig. 15). La mela si sbuccia per striscie con un coltello ricurvo che taglia la buccia secondo i meridiani, ma la larghezza di ciascuna striscia non è uniforme perché è zero in corrispondenza dei poli e massima all'equatore. Dunque la lama deve esercitare una forza crescente da zero ad un massimo nel primo emisfero per poi decrescere a zero nel secondo. E siccome questa forza è limitata, gli spicchi superficiali di buccia non possono eccedere una data larghezza. Se vogliamo avere una velocità di taglio costante dobbiamo regolare la forza proporzionalmente alla larghezza locale di ciascuno spicchio. Infine, per ottenere dei valori quantitativi, dobbiamo conoscere la resistenza a

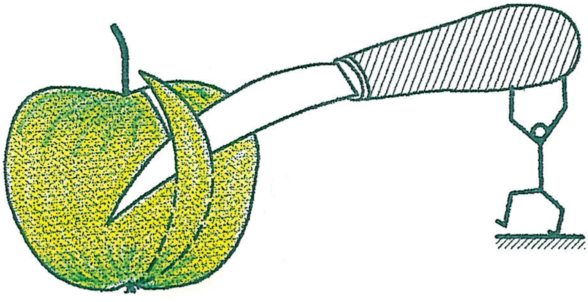

Fig. 15. – La sbucciatura di una mela.

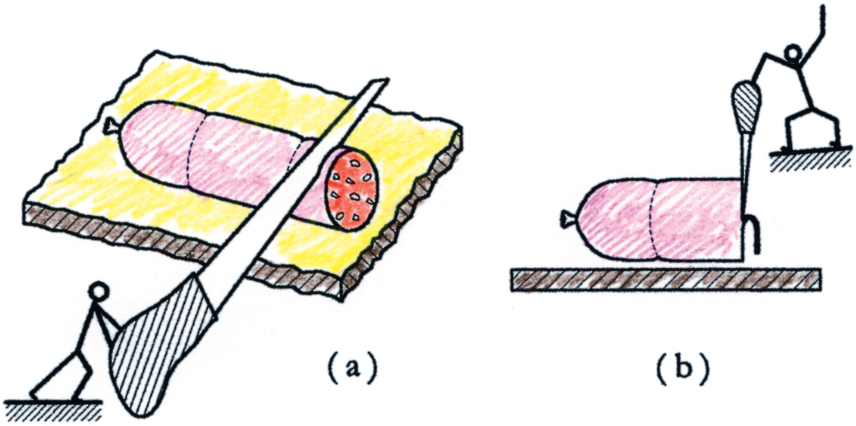

Fig. 16. – (a) Nell’affettatura si cerca di ottenere fette molto sottili. (b) Le fette troppo sottili si rompono a causa del peso proprio.

taglio dell’interfaccia della buccia con la polpa. Anche questo è un tipico problema di controllo ottimo.

Il taglio domestico manuale contempla anche l’affettamento di certi cibi, quali, per esempio, il salame (Fig. 16(a)). Una delle qualità più apprezzate dei bravi cuochi è di saper tagliare fette sottilissime quasi trasparenti, ma, oltre un certo limite, ciò non è più possibile perché le fette si frantumano prima di raggiungere il tagliere. La ragione è che la parte tagliata (Fig. 16(b)) si ribalta verso l’esterno e il peso di questa viene a sollecitare la sezione d’attacco contigua al filo della lama. Se gli sforzi sono troppo alti la fetta si spezza prematuramente. Anche in questo caso, per ottenere dei risultati numerici bisogna sapere il peso specifico del salame ed i carichi di rottura. È abbastanza sorprendente che il problema, dal punto di vista della resistenza dei materiali, sia molto simile a quello illustrato nella Fig. 4. Allora, per migliorare la situazione, uno dovrebbe cambiare la geometria del salame in modo tale da avere porzioni di fette il più leggere possibile rispetto alla sezione di eventuale distacco. Per esempio, un salame a sezione triangolare si tratterebbe decisamente meglio. Sebbene una proposta del genere possa sembrare umoristica, forse è stata accettata per altri prodotti alimentari. Nei supermercati si vende la pasta delle patate da friggere in fette sotto forma di prismi a sezione triangolare equilatera.

Non sappiamo se il motivo di questa scelta sia per evitare il frantumamento delle fette troppo sottili.

E ancora, sempre in cucina, c'è un criterio razionale nel grattugiamento manuale del formaggio parmigiano, del pane secco, delle bucce dei limoni? Consideriamo per esempio il caso del formaggio. Il blocco, a sezione trapezoidale (Fig. 17) avanza sul piano della grattugia per effetto di una forza tangenziale T assocciata ad una pressione P, dove T è proporzionale a P. Poichè la quantità di formaggio che filtra attraverso i buchi è proporzionale a P, conviene premere molto il blocco di parmigiano in fase di spinta. Invece, in fase di ritorno, la pressione è praticamente nulla, e non c'è grattugiamento. D'altra parte la pressione P non è costante durante tutta l'escursione del braccio, ma è massima all'inizio, vicino al corpo, e minima a fondo corsa. Dunque, per ricavare una certa quantità di formaggio nel minimo tempo dobbiamo dosare l'ampiezza dell'intervallo di oscillazione del blocco in base alla forza P. Ancora una volta ci troviamo di fronte ad un problema di minimo vincolato.

In certi casi il modello meccanico è più sicuro e quindi la soluzione ottimale si trova senza esitazione. Un esempio è offerto dal problema dello shiaccianoci (Fig. 18). Le noci si possono riguardare come gusci aventi approssimativamente la forma di ellissoidi di rotazione muniti di un risalto periferico laddove le due valve sono attaccate. Qui il materiale è meno resistente. Volendo applicare la teoria dei gusci (*cf.* p.e., Timoshenko e Woinowsky-Krieger [12) il problema si risolve, ma è

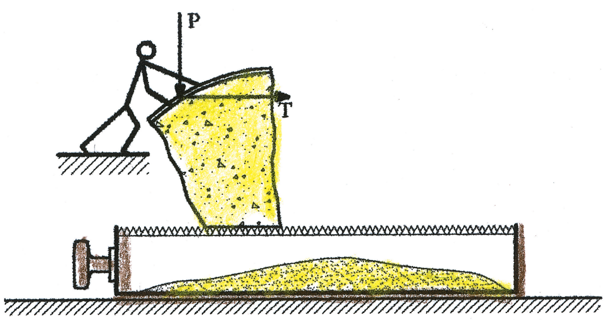

Fig. 17. – La grattugia funziona solo in fase di spinta.

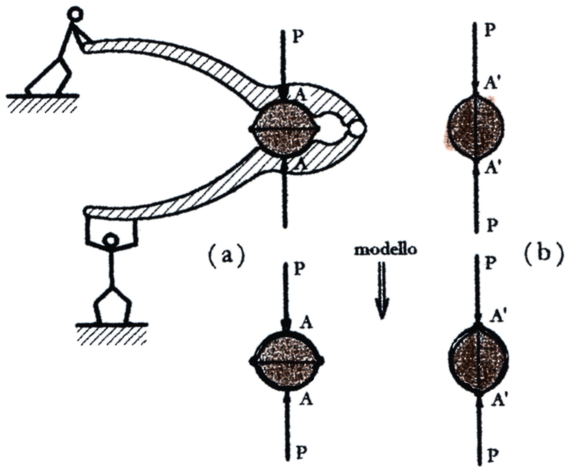

Fig. 18. – I due modi di rompere una noce.

complicato. Possiamo invece fare un modello grossolano considerando il comportamento della fetta trasversale mediana dove sono applicate le forze P. In entrambi i casi il guscio si rompe nei punti A, A' sotto il carico P, ma poichè A' è più debole, la noce cede più facilmente comprimendola nella posizione (b).

Il modo di operare dello schiaccianoci serve anche a descrivere una funzione fisiologica come la masticazione (Fig 19). Il boccone si può considerare come un trapezio di materiale plastico che offre una data resistenza allo schiacciamento, ma questa resistenza aumenta progressivamente man mano che il trapezio avanza verso il fondo della bocca perché le facce a contatto con i denti si dilatano. D'altra parte le forze di serraggio esercitate dalle mascelle hanno una ubicazione costante. Quindi, riguardando le due mascelle come le braccia di uno schiaccianoci, ne consegue che i bocconi vicini alle labbra sono caricati meno ma sono più soffici, quelli prossimi alla gola sono più cimentati ma sono più resistenti. Allora ci chiediamo se esiste una strategia di masticamento ottimo, tale che, essendo costanti le forze P, il boccone sia permanentemente plasticizzato in ogni punto del suo percorso. La risposta è sì, e probabilmente la lingua, che sospinge i bocconi, la applica da parecchi milioni d'anni.

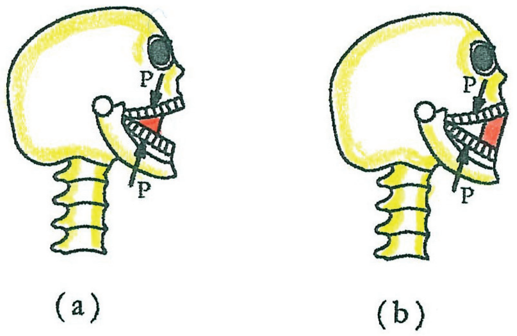

Fig. 19. – Le mascelle funzionano come le braccia di uno schiaccianoci compresso da due forze P.

5. – Conclusioni

I problemi plebei sono innumerevoli e molti di essi sono anche importanti per migliorare, se risolti, la nostra vita. Ignorati per secoli, essi sono stati proposti insistentemente dalle industrie (chimiche, alimentari, farmaceutiche) e sono ora argomenti trattati nella letteratura scientifica. La loro caratteristica è di richiedere modelli matematici molto complicati perché coinvolgono simultaneamente vari campi della fisica matematica, come la meccanica, la trasmissione del calore, la chimica, la termodinamica. In questa situazione, la tattica buona è quella di partire con modelli semplici buttando via i termini presumibilmente poco importanti. Ma questa è una decisione molto delicata.

Questo articolo è dedicato a Franco Conti (1943-2003) che di questa materia è stato illuminato e fantasioso precursore.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] R. Mc N. Alexander, *Mechanics and Scaling of Terrestrial Locomotion.* In *Scale Effects in Animal Locomotion.* Ed. by T. J. Pedley. Academic Press (1977), 93-110.

[2] Burridge R. e Keller J. B., *Peeling, Slipping and Cracking - Same One-*

Dimensional Free Boundary Problems in Mechanics, SIAM Review, **20**, n. 1 (1978), 31-61.

[3] DIJKSTERHUIS E. J., *The Mechanization of the World Picture*. Princeton Un. Press (1986).

[4] FYFFE A. e PETER I., *The Handbook of Climbing*. Pelham Books (1997).

[5] GIUSTI E., *La matematica in cucina*. Bollati Boringieri (2004).

[6] KELLER J. B., *A theory of competitive Running*, Physics Today. Sept. (1973), 43-47.

[7] KELLER J. B., *Mechanical Aspects of Athletics*, Proc 7^{th} U.S. National Congress of Applied Mechanics (1974), 22-26.

[8] MARGARIA R., *Sulla fisiologia e specialmente sul consumo energetico della marcia e della corsa a varie velocità ed inclinazioni del terreno*, Atti Acc. dei Lincei, **7** (1938), 299-368.

[9] MU Z. e KAZEROUNIAN K., *Optimum Geometric Design of the Edge Curves for Cutting Blades*, Mech. Based Design of Structures and Machines, **33**, n. 2 (2005), 173-183.

[10] ORAVAS G., *Lectures on the History of Technology and Engineering*, Georg Olms Verlag (2004).

[11] PETROV IU. P., *Variational Methods in Optimum Control Theory*, Academic Press (1968).

[12] TIMOSHENKO S. P. e WOINOWSKY-KRIEGER S., *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw-Hill (1959).

Piero Villaggio: Dipatimento di Ingegneria Strutturale
Via Diotisalvi, 2 - I-56126 Pisa