

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

RALPH SCHWARZKOPF, ANNA S. STEINWEG

## La formazione degli insegnanti di matematica in Germania.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 9-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.3-1, p. 499–532.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2006\\_8\\_9A\\_3-1\\_499\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_3-1_499_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## La formazione degli insegnanti di matematica in Germania.

R. SCHWARZKOPF - A. S. STEINWEG (\*)

### 1. – Informazioni generali.

#### 1.1. *Il sistema scolastico tedesco.*

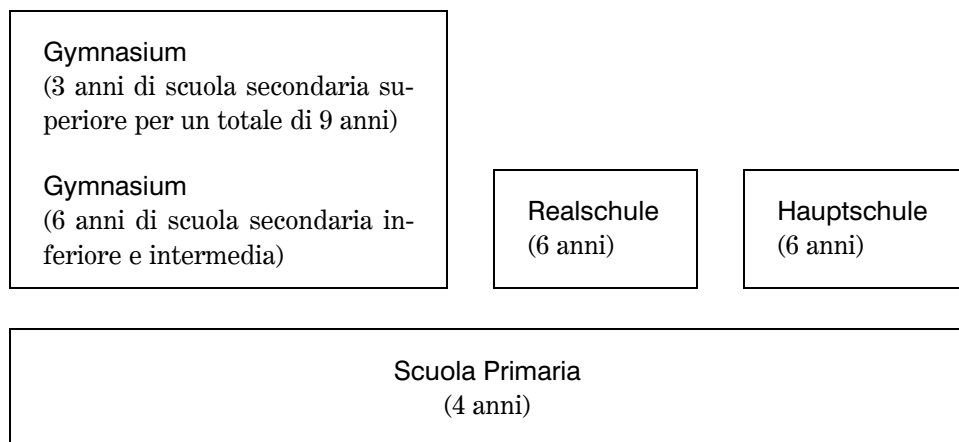
Per comprendere le ragioni della complessità del sistema scolastico tedesco occorre tenere presente la frammentazione territoriale precedente all'unificazione della Germania (1871) e l'attuale struttura federale che concede un'ampia autonomia ai vari Länder in materia di istruzione. Tale autonomia è testimoniata tra l'altro dal fatto che, oltre ad un ministro nazionale, ogni Land ha un suo proprio ministro dell'istruzione.

Fu solo durante la repubblica di Weimar (1919-1933) che, grazie ad un grande impegno di tutti i Länder, per la prima volta il sistema scolastico fu standardizzato: il percorso consisteva nella frequenza della *Volkschule* (scuola popolare) dai sei ai quattordici anni di età. I primi quattro anni (obbligatori) della *Volkschule* erano e sono tuttora denominati *Grundschule* (scuola di base). Il sistema scolastico tedesco si fonda ancora oggi su quattro anni di scuola primaria (*Grundschule*) per tutti i bambini dai sei ai dieci anni d'età<sup>(1)</sup>.

(\*) Traduzione di Carlo Alberto Bosello.

<sup>(1)</sup> Qualora un bambino in età scolare sia ritenuto ancora immaturo per iniziare a frequentare la scuola (per ragioni di carattere sociale, psicologico o di altro tipo) egli è tenuto a frequentare una scuola materna o prescolare, che può essere gestita dalle stesse scuole primarie oppure da istituti specifici. L'istruzione ricevuta presso una scuola materna non viene considerata "frequenza scolastica".

Il percorso successivo è invece fortemente differenziato, come illustrato nel seguente schema:



Per il passaggio dalla scuola primaria a quella secondaria non sono previsti test standardizzati, ma alcuni Länder (ad esempio il Baden-Württemberg) ne progettano l'introduzione. In genere, al termine dei quattro anni della scuola primaria, la successiva carriera scolastica dipende dalle decisioni del maestro, basate sui voti, sulla condotta e sul possesso delle competenze ritenute necessarie per il proseguimento degli studi. Ma il parere del maestro non è vincolante. Pertanto i genitori sono liberi di tenerne conto o di ignorarlo. D'altra parte le scuole secondarie non sono tenute ad accogliere tutti i ragazzi provenienti dalle scuole primarie; spesso ne accolgono solo un numero prestabilito, scegliendoli autonomamente entro il gruppo di quanti hanno fatto domanda, sulla base delle pagelle e di altri parametri.

Come evidenziato nella precedente tabella, la scuola secondaria (inferiore e intermedia) destinata agli allievi dai 10 ai 16 anni è articolata in tre indirizzi principali, che differiscono per il tipo di impegno scolastico richiesto e per gli sbocchi professionali.

La *Hauptschule* nacque come scuola per la formazione di falegnami e operai dell'industria, commessi per i negozi, eccetera. L'assunto era che le ragazze ed i ragazzi meno dotati intellettualmente fossero più portati per le attività «pratiche». Secondo RÖSNER (1999, p. 43 e segg.)

i curricula della Hauptschule si giustificano tuttora sulla base di tre motivazioni teoriche:

- tengono conto dell'esistenza di molti ragazzi nei quali l'inclinazione per un apprendimento orientato all'azione, agli aspetti concreti e alla pratica si associa ad un processo di apprendimento lento
- danno comunque la migliore opportunità di entrare nel mercato del lavoro a questo livello, con una qualifica
- favoriscono l'integrazione e la qualificazione dei ragazzi appartenenti a minoranze o che vivono in situazioni di disagio sociale.

La *Realschule* nacque come scuola per i ceti medi. In questo tipo di scuola l'impostazione era meno sbilanciata sulla pratica e più umanistica. Al giorno d'oggi le motivazioni a favore della Realschule sono di due tipi (RÖSNER 1999, p. 58 e segg.):

- dal punto di vista pedagogico questa scuola si rivolge agli alunni con un talento intellettuale che va oltre il livello della Hauptschule
- dal punto di vista sociale e funzionale essa mira ad offrire ai ragazzi della classe media un tipo di scuola volto alla formazione dei quadri dell'industria, della tecnologia e dei servizi.

Il *Gymnasium* era originariamente un tipo di scuola destinato agli alunni dei ceti più elevati. Infatti per i genitori del ceto medio sarebbe stato impossibile permettersi di pagare le rette richieste. A partire dal 1934 l'accesso al Gymnasium avrebbe dovuto dipendere non solo dallo status sociale ma anche dal merito (RÖSNER 1999, p. 82). In realtà l'accesso a questo tipo di scuola è rimasto appannaggio dei figli dei ceti più abbienti almeno fino ad una trentina di anni fa.

Il Gymnasium si propone di fornire agli studenti una cultura generale di tipo umanistico. Al termine dei nove anni di frequenza è previsto un esame di maturità (*Abitur*) che consente di accedere all'università e alle posizioni occupazionali più elevate e meglio retribuite. Chi aspira ad una carriera di insegnante (di scuola sia primaria che secondaria) per poter iniziare i suoi studi universitari deve essere in possesso dell'*Abitur*.

Si può uscire dal Gymnasium anche dopo soli otto anni di frequenza: questo titolo offre l'opportunità di entrare nella Fachhochschule, che è una scuola di livello universitario con due indirizzi principali: uno per la formazione tecnica, l'altro per le scienze sociali.

In realtà i tipi di scuole esistenti in Germania formano un insieme ben più variegato di quanto finora schematicamente illustrato. Infatti, data la struttura federale della Germania, ogni Land è sovrano per quanto riguarda il sistema educativo, i programmi e i contenuti disciplinari. Le maggiori differenze si riscontrano a livello di scuola secondaria. Ad esempio il quinto e sesto anno di scolarità, che costituiscono la cosiddetta fase di orientamento, sono strutturati diversamente nei vari Länder: in qualche caso, come nel Land Niedersachsen, per gli allievi di questa fascia scolastica sono state istituite scuole specifiche (dette appunto «di orientamento»); in altri casi, come nel Land Nordrhein-Westfalen, la ripartizione degli allievi fra Hauptschule, Realschule e Gymnasium ha luogo già alla fine del quarto anno di scolarità. A Berlino numerose scuole primarie offrono la possibilità di proseguire gli studi elementari fino al sesto anno, ma molti alunni lasciano la scuola primaria già dopo il quarto anno, per andare direttamente al Gymnasium. In alcuni Länder, specie in quelli «nuovi» della ex Repubblica Democratica Tedesca, il Gymnasium termina col rilascio dell'Abitur già dopo il dodicesimo anno di scolarità.

Per ragioni politiche, in vari Länder (per esempio Nordrhein-Westfalen) sono state istituite scuole «comprehensive integrate» nelle quali si possono conseguire i diplomi di tutti e tre i tipi. Originariamente si progettava di sostituire i tradizionali tre tipi di scuole secondarie con le scuole comprehensive integrate. Di fatto, tutti e quattro i tipi coesistono tuttora.

Le cose si complicano ulteriormente se si vuole tenere conto del fatto che in Germania operano anche scuole «libere» come quelle «Waldorf» e «Montessori». Esse sono libere per quanto riguarda i metodi educativi e l'organizzazione dei contenuti, ma non per gli esami conclusivi. Devono uniformarsi ai curricula federali ed essere riconosciute dai Länder.

Anche le scuole serali offrono tutti i tipi di diplomi. Gli adulti che desiderano completare il proprio percorso formativo per migliorare la

qualificazione scolastica possono iscriversi a corsi e seguire lezioni pomeridiane o serali. La maggior parte delle scuole serali prepara per l'Abitur (circa 16.000 frequentanti) e per il diploma della Realschule (circa 17.000); altre scuole serali preparano per il diploma della Hauptschule (circa 1.200).

Frequenza scolastica in Germania (2001/2002) (dati del dipartimento federale di statistica [*Statistisches Bundesamt* 2003])

| Tipo di scuola                                     | Numero di alunni<br>(in migliaia) |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------|
| prescolari                                         | 26,1                              |
| scuole materne                                     | 36,7                              |
| scuole primarie                                    | 3211,5                            |
| scuole di orientamento                             | 387,4                             |
| Hauptschule                                        | 1114,0                            |
| Realschule                                         | 1277,7                            |
| Gymnasium                                          | 2284,3                            |
| scuole che conferiscono più di un titolo di studio | 440,5                             |
| scuole globali integrate                           | 547,7                             |
| scuole libere Waldorf                              | 70,8                              |
| scuole serali                                      | 34,7                              |
| scuole per alunni con esigenze particolari         | 425,5                             |

Attualmente tutti i tipi di scuola sono gratuiti. Non sono previste rette, eccezion fatta per alcune scuole private. Il costo per i libri e per altro materiale scolastico è circa lo stesso per tutti i tipi di scuola.

Come già detto in precedenza, almeno in teoria tutti possono aspirare a frequentare qualunque tipo di scuola secondaria. In realtà il titolo di studio conseguito dai figli è spesso condizionato da quello dei genitori. Infatti, anche se molti genitori aspirano per i loro figli ad un livello di istruzione e ad un tenore di vita superiore al proprio, dai colloqui con gli insegnanti emerge spesso il disagio provato dai genitori meno scolarizzati per il fatto di non essere in grado di aiutare i figli nel fare i compiti assegnati per casa. Inoltre non tutti i genitori possono permettersi di mantenere i figli per tutto il lungo periodo di studio al Gymnasium e all'Università, mentre un allievo della Hauptschule, se riesce a trovare lavoro, diventa autosufficiente dopo soli dieci anni di scolarità.

Titoli di studio rilasciati agli allievi che hanno terminato gli studi nell'anno 2000/2001 (dati del dipartimento federale di statistica [*Statistisches Bundesamt* 2003])

| Titolo di studio                                                                            | Percentuale totale | Percentuale relativa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------|
|                                                                                             | MASCHI E FEMMINE   | FEMMINE              |
| Nessun titolo                                                                               | 9.6                | 36.1                 |
| Con diploma di <i>Hauptschule</i>                                                           | 25.5               | 42.7                 |
| Con diploma di <i>Realschule</i>                                                            | 40.7               | 51.6                 |
| Con diploma di <i>Gymnasium</i><br>(dopo il 12° anno di frequenza scolastica)               | 1.2                | 53.9                 |
| Con diploma di <i>Gymnasium</i><br>(dopo il 13° anno di frequenza scolastica) <i>Abitur</i> | 23.1               | 56.1                 |

Gli esami finali differiscono da un Land all'altro e nella maggior parte dei casi anche da una scuola all'altra. Non esiste una procedura stabilita dallo Stato federale per quanto riguarda questi esami. Ogni Land e ogni scuola devono seguire le direttive ministeriali, ma le modalità per farlo non sono definite in dettaglio. Alcuni Länder, ma non tutti, organizzano un esame centralizzato per l'Abitur, unico per tutte le scuole (ad esempio la Baviera, la Sassonia, il Baden-Württemberg).

## 1.2. La struttura federale della Germania e le sue conseguenze per la formazione degli insegnanti.

La formazione dei futuri insegnanti ha luogo in specifici corsi di studio universitari a se stanti. Coloro che intendono diventare insegnanti devono prendere questa decisione già all'inizio dei propri studi post-secondari. Esiste comunque la possibilità di iscriversi a corsi di laurea disciplinari (per esempio fisica o inglese) e di aggiungere in un secondo tempo i corsi necessari per accedere alla professione di insegnanti, ma accade di rado (per alcuni commenti critici sul sistema tedesco di formazione degli insegnanti cfr. VIEBAHN 2003). Il numero di corsi che uno studente deve seguire varia moltissimo a seconda delle università e dei Länder.

Normalmente i futuri insegnanti di scuola secondaria devono approfondire due distinti ambiti disciplinari per potere poi insegnare le corrispondenti materie. Il numero dei corsi da seguire è lo stesso per entrambi gli ambiti disciplinari. Oltre ai corsi di carattere disciplinare i futuri insegnanti devono seguire alcuni corsi di pedagogia.

A volte qualche corso disciplinare è destinato sia ai futuri insegnanti di scuola secondaria superiore, sia agli studenti che aspirano ad un titolo di studio specifico (diploma) in quell'indirizzo disciplinare.

Coloro che scelgono di diventare insegnanti di matematica devono seguire sia corsi disciplinari di matematica, sia corsi di didattica della matematica. In alcuni Länder i corsi di matematica sono tenuti da matematici (Mathematiker) mentre i corsi di didattica della matematica sono tenuti da lettori specializzati in tale ambito (Mathematik-Didaktiker). In altri Länder i corsi di entrambi i tipi sono affidati a lettori di «Metodi di insegnamento della matematica».

In genere i docenti (professori e lettori) dei corsi per insegnanti si occupano, oltre che dell'insegnamento, anche di ricerche in ambito educativo, e afferiscono, a seconda dei casi, a dipartimenti di matematica o a dipartimenti di educazione matematica.

Gli studenti che aspirano a diventare insegnanti di scuola primaria devono scegliere due o tre ambiti disciplinari. In alcuni Länder Matematica e/o Tedesco sono ambiti obbligatori. Tutti gli studenti che scelgono (o sono obbligati a scegliere) matematica devono seguire almeno alcuni corsi basilari di matematica nonché corsi di didattica della matematica (teoria e metodi d'insegnamento). Indipendentemente dagli ambiti disciplinari prescelti per i loro studi, tutti gli insegnanti della Grundschule sono tenuti ad insegnare tutte le materie, visto che normalmente ogni classe è affidata ad un unico docente (Klassenlehrer).

### *1.3. Un esempio specifico: la formazione degli insegnanti nel Land Nordrhein-Westfalen.*

Quanto diremo in questo paragrafo si riferisce specificamente alla situazione nel Land Nordrhein-Westfalen, nelle cui scuole si concentra circa un quarto degli studenti di tutta la Germania (nell'anno 2003 erano 2.311.400 su un totale di 9.870.400).

In questo Land coloro che aspirano a diventare insegnanti di scuola secondaria devono scegliere due indirizzi disciplinari, uno dei quali può essere Matematica, e in più pedagogia generale. Coloro che aspirano a diventare insegnanti di scuola primaria devono scegliere tre indirizzi disciplinari, e in più pedagogia. Attualmente due di questi ambiti disciplinari devono essere Tedesco e Matematica. Uno dei tre ambiti va scelto come ambito principale, e i corsi da seguire in tale ambito sono tanti quanti i corsi da seguire complessivamente negli altri due indirizzi. Dopo un periodo di studio di quattro o cinque anni i futuri insegnanti si diplomano superando quello che viene chiamato «primo esame di stato per l'insegnamento» (*Erstes Staatsexamen für das Lehramt*).

L'esame comprende prove scritte e orali in tutte le materie prescelte, nonché la discussione di una tesi su un progetto, che può essere di ricerca autonoma o di tipo più compilativo, basata sull'analisi di ricerche reperibili nella letteratura su un tema specifico.

A questo punto inizia la seconda fase della formazione degli insegnanti, che consiste in una combinazione di insegnamento nelle scuole sotto la guida di un tutore e di frequenza di corsi seminariali organizzati dal ministero dell'istruzione. Questa fase, della durata di due anni, si conclude con un esame detto «secondo esame di stato» (*Zweites Staatsexamen für das Lehramt*) che comprende una valutazione delle attività svolte dall'insegnante in formazione durante il tirocinio nelle classi e un'ulteriore tesi scritta. Per maggiori informazioni su questo sistema di preparazione degli insegnanti (*Zweiphasige Lehrerausbildung*) cfr. VIEBAHN 2003, p. 89 e segg. Dopo il superamento del secondo esame di stato gli insegnanti sono abilitati e possono fare domanda per ottenere un impiego stabile nelle scuole.

## **2. – L'Insegnamento della matematica nella scuola primaria.**

### *2.1. L'evoluzione dell'educazione matematica nella scuola primaria.*

Nel corso degli anni i syllabi, i contenuti ed i metodi d'insegnamento della matematica sono profondamente cambiati (cfr. ad esempio

MÜLLER / WITTMANN 1984, p.146 e segg.). La panoramica seguente cerca di evidenziare le fasi salienti per quanto riguarda sia i contenuti sia l'impostazione culturale e metodologica.

Fin dopo la seconda guerra mondiale le lezioni di matematica per la scuola primaria miravano a preparare gli alunni al «far di conto». Né la geometria né la logica trovavano spazio nei programmi. Dal punto di vista metodologico furono fatti alcuni tentativi di integrare nell'insegnamento nuove teorie psicologiche (soprattutto quelle di Piaget).

Il cambiamento più radicale ebbe però luogo all'inizio degli anni Sessanta, quando dagli Stati Uniti la «matematica moderna» («New Math.») inondò i programmi scolastici tedeschi. Questa riforma venne decisa e gestita dall'alto in base ad un accordo tra i ministri dell'educazione di tutti i Länder, senza tenere in alcun conto le esperienze degli insegnanti. Di riflesso, gran parte degli insegnanti ignorò la riforma e utilizzò ogni scappatoia per non applicare le disposizioni ministeriali. Era solo questione di tempo, prima che la riforma venisse abrogata. Quando tale abrogazione divenne ufficiale, fu molto ben accolta dagli insegnanti.

Durante la «controriforma» che ne seguì i contenuti, i metodi e le teorie dell'apprendimento tornarono ad essere quelli precedenti al 1965. Ad esempio, il discredito per la teoria degli insiemi condusse spesso a trascurare anche gli aspetti positivi della cosiddetta «matematica moderna». A seguito del ritorno alla tradizione, ancora oggi la geometria non gode di molta stima nella scuola primaria e viene trattata come argomento complementare, che può essere trascurato se il tempo stringe.

### **L'istruzione matematica nella scuola primaria tedesca**

|              |                                                                                                                                                                                               |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Fino al 1965 | Matematica tradizionale incentrata sulle capacità di calcolo. Primi tentativi di implementare il principio di operatività (Piaget), e di considerare il discente come soggetto attivo (Dewey) |
| 1965 – 1972  | Una decisione dei ministri dell'istruzione introduce la «matematica moderna» (strutture insiemistiche, logica e geometria)                                                                    |

|             |                                                                                                                                          |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1972 – 1979 | «Controriforma» da parte delle scuole e degli insegnanti. Ritorno al «far di conto» («back to basis»)                                    |
| dal 1979    | Approcci integrati, (nuove) teorie dell'insegnamento e dell'apprendimento. Apprendimento attivo mediante scoperta guidata (Freudenthal). |

A commento di queste riforme è opportuno rilevare che le impostazioni didattiche sono spesso soggette ad oscillazioni cicliche. All'inizio degli anni Ottanta RODEHÜSER (1987, p. 735) osservò che la scuola primaria si era allontanata metodicamente da una concezione del proprio ruolo limitato alla trasmissione di nozioni tecniche, avviandosi alla riscoperta di un'educazione umanistica del cittadino. Ma questo cambiamento di rotta fu in certo senso troppo radicale ed ebbe come conseguenza paradossale il successivo ripiegamento della matematica verso il tradizionale insegnamento di abilità di calcolo (sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere).

La situazione odierna è influenzata in vario modo da queste vicende. I contenuti delle lezioni di matematica mirano a fornire un'immagine più articolata della matematica, considerandola sia come disciplina da apprendere e da applicare algoritmicamente, sia come campo di scoperte intellettuali stimolanti.

Gli obiettivi metodologici per l'istruzione primaria attuale, così come li ha formulati nel gennaio 2003 l'associazione per l'istruzione nella scuola primaria (Grundschulverband) sono:

- i discenti vanno considerati soggetti attivi del proprio processo di apprendimento e del proprio operato
- i processi che comportano un'evoluzione cognitiva devono avere la priorità rispetto alle abilità e alle conoscenze precostituite
- quanto alle attività di «problem solving» va privilegiato il saper elaborare proprie efficaci strategie personali, rispetto all'applicazione di ricette prefissate.

Oggi i metodi di insegnamento e apprendimento e gli orientamenti didattici tengono conto in modo equilibrato sia degli alunni e delle loro esigenze ed esperienze specifiche, sia della matematica nel suo aspetto teorico.

Nell'approccio moderno sia la matematica in generale, sia quella insegnata a scuola andrebbero viste come una palestra per il ragionamento e un campo di applicazione del pensiero logico. Questo include tanto la comprensione dei contenuti, quanto l'acquisizione di esperienza e di una sorta di consapevolezza matematica. La matematica insegna al discente a domandarsi la ragione delle cose e gli dà il senso del ragionamento speculativo e del ruolo delle ipotesi.

Il processo d'apprendimento viene considerato sia nei suoi aspetti attivi sia in quelli interattivi. Alunni, studenti e futuri insegnanti devono potersi scambiare idee e confrontare risultati e strategie risolutive diverse (cfr. FAUST-SIEHL et al. 1996). L'interazione richiede una documentazione orale o scritta dei processi mentali, che è di vitale importanza per la matematica e per poter riflettere sul (proprio) pensiero.

Pertanto la matematica è qualcosa di più della capacità di calcolo e del buon senso. L'educazione matematica, dalla scuola primaria fino all'università dovrebbe promuovere anche abilità più generali come sistematizzare, analizzare, astrarre.

## *2.2. La formazione universitaria degli insegnanti di matematica per la scuola primaria: aspetti disciplinari e aspetti didattici.*

L'obiettivo della formazione universitaria degli insegnanti è di costruire una base teorica per la professionalità dell'insegnamento. Pur non potendo entrare nei dettagli in questa sede sul significato di «professionalità dell'insegnamento» (vedi in proposito TERHART et al. 2000) il buon senso ci dice che i fondamenti per gli insegnanti di matematica dovrebbero essere da una parte lo studio del fare matematica e dall'altro lo studio dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica. Nella preparazione degli insegnanti di scuola primaria si cerca di combinare insieme entrambi i fondamenti, al fine di raggiungere un equilibrio tra matematica e didattica.

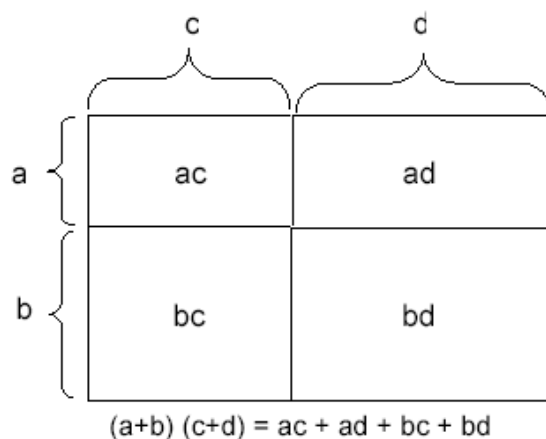
## E d u c a z i o n e   M a t e m a t i c a .

Attualmente in Germania è in atto un dibattito tra matematici e docenti di didattica della matematica riguardo ai contenuti delle lezioni di matematica rivolte ai futuri insegnanti (sia di scuola primaria che secondaria). Mentre molti matematici sottolineano l'importanza della struttura assiomatico-deduttiva della matematica, la maggior parte dei docenti di didattica della matematica ritiene che l'istruzione matematica dei futuri insegnanti debba fondarsi su un approccio allo sviluppo dei concetti matematici meno formale e più esemplificativo. Il dibattito è tuttora in corso e potrebbe dar luogo in futuro a cambiamenti nell'approccio all'insegnamento universitario della matematica. Al momento la conseguenza di questa contrapposizione è una separazione tra i corsi per futuri insegnanti: mentre i corsi destinati a coloro che aspirano ad insegnare nelle superiori sono impostati più nel senso inteso dai matematici, i corsi per i futuri insegnanti della scuola elementare hanno un'impostazione più concreta.

Questa separazione non è finalizzata a dare agli insegnanti di scuola primaria una preparazione di livello intellettuale più basso, bensì di offrire loro un approccio alla matematica diverso e più mirato a prepararli all'insegnamento scolastico. Per osservazioni sulla formazione degli insegnanti, e in particolare per quanto riguarda il ruolo delle dimostrazioni ai fini di tale formazione, cfr. WITTMANN-MÜLLER 1988.

In breve, la tesi ivi sostenuta è che l'apprendimento della matematica debba consistere in un processo di scoperta attiva di relazioni essenziali piuttosto che nell'allenamento ad una ricostruzione passiva di conclusioni logico-formali a partire da assiomi dati.

Come esempio particolarmente semplice ma al tempo stesso rappresentativo si prenda la proprietà distributiva. Il diagramma visualizzato qui di seguito va visto solo come un esempio da rimpiazzare quanto prima con considerazioni più formali? O come una vera e propria dimostrazione della validità della proprietà distributiva nell'ambito dei numeri positivi, da considerare come una struttura che riveste interesse di per se stessa?



Il secondo approccio consente agli studenti di affrontare la matematica da un punto di vista che sarà tipico del loro futuro insegnamento: considerare un diagramma come uno strumento di mediazione dinamica tra aritmetica e algebra e imparare a riconoscere strutture generali nelle esemplificazioni concrete.

Comunque sia, i corsi di matematica per futuri insegnanti delle scuole primarie forniscono le basi necessarie per affrontare i temi matematici centrali previsti dai curricula per tale ordine di scuole. Nella maggior parte dei casi, tali corsi sono organizzati in lezioni, solitamente affiancate da esercitazioni.

All'università di Dortmund, per esempio, i corsi universitari iniziali (*Grundstudium*), obbligatori per la totalità dei futuri insegnanti di scuola elementare, consistono in un'introduzione all'aritmetica e alla geometria euclidea. Chi ha scelto matematica come indirizzo principale deve seguire anche un corso di algebra elementare e seminari sulla risoluzione di problemi e sulla programmazione.

Nel prosieguo degli studi universitari (*Hauptstudium*) tutti i futuri insegnanti devono poi seguire un ulteriore corso di contenuto matematico, a scelta tra: teoria elementare dei numeri, geometria elementare dello spazio e applicazioni della matematica (spesso di tipo stocastico). Chi ha scelto matematica come ambito principale deve scegliere due di questi corsi, uno dei quali da studiare in modo più approfondito.

Anche se lo scopo di questi corsi non è di formare ricercatori di matematica di professione, essi mettono i futuri insegnanti a contatto con metodi e stili di pensiero tipici del fare matematica, che sono essenziali per saperla insegnare. A tal fine i corsisti non si limitano a seguire passivamente le lezioni, ma affrontano attivamente la risoluzione di problemi nell'ambito di opportune esercitazioni.

Nella teoria dei numeri, ad esempio, i «numeri figurati»<sup>(2)</sup> costituiscono un ambito fecondo di «scoperte» matematiche, nel quale la visualizzazione geometrica si combina col pensiero algebrico.

In linea di principio l'apprendimento della matematica all'università da parte dei futuri insegnanti dovrebbe svolgersi come per gli alunni nella scuola, ossia i corsi, e specialmente le esercitazioni, dovrebbero «organizzare l'apprendimento» anziché «controllarlo rigidamente».

## F o r m a z i o n e D i d a t t i c a .

Per insegnare professionalmente la matematica è indubbiamente fondamentale avere buone conoscenze di matematica di un livello adeguato. Ma basta usare il buon senso per accorgersi che «avere buone conoscenze di matematica» non è la stessa cosa che «essere in grado di insegnare professionalmente la matematica».

Secondo un'opinione diffusa «chiunque capisce la matematica è in grado di insegnarla efficacemente». Secondo questa opinione esiste un automatismo tra competenza disciplinare e qualità dell'insegnamento. Un'opinione altrettanto diffusa e contrapposta alla precedente è «chi ha avuto difficoltà con la matematica ha una maggiore sensibilità nei confronti delle difficoltà degli allievi». Nessuna delle due posizioni esprime con sufficiente chiarezza l'indipendenza tra l'essere *esperti* nella materia e l'essere *abili* nell'insegnarla (HEFENDEHL-HEBEKER 2002, p. 20).

I corsi di matematica che gli insegnanti in formazione devono seguire (vedi sopra) sono propedeutici ad altri, anch'essi fondamentali,

<sup>(2)</sup> I numeri *figurati* sono una rappresentazione geometrica che si ottiene disponendo una serie di punti (corrispondenti alle unità) secondo una reticolo quadrato o triangolare; alcune relazioni aritmetiche possono così essere facilmente visualizzate e argomentate (per es. la somma dei primi  $n$  numeri naturali).

concernenti specificamente gli aspetti didattici della disciplina, vale a dire lo studio e l'analisi dei processi di apprendimento -insegnamento della matematica. Si può dire che, mentre i corsi per la formazione degli insegnanti delle superiori riguardano tipicamente più la matematica in sé che il suo insegnamento, circa la metà dei corsi per la formazione degli insegnanti delle scuole primarie riguarda gli aspetti didattici. L'organizzazione di tali corsi varia molto da un ateneo all'altro: a volte sono organizzati in lezioni tradizionali, o in lezioni associate ad esercitazioni, altre volte sono strutturati in forma seminariale, con gli studenti che devono esporre il materiale.

All'università di Dortmund, ad esempio, c'è un corso fondamentale di «Introduzione alla didattica della matematica» di carattere generale e obbligatorio per tutti i futuri insegnanti di scuola elementare. Il corso è organizzato in lezioni associate ad esercitazioni. Al termine del corso si deve superare una prova scritta.

Tutti devono seguire inoltre, a loro scelta, uno dei seguenti tre corsi: «didattica dell'aritmetica», «didattica della geometria», «rapporti tra la matematica e il mondo reale» (*Sachrechnen*). Questi corsi sono organizzati in lezioni associate ad esercitazioni. Nell'ambito delle esercitazioni si richiede un'elaborazione attiva del contenuto delle lezioni. Al termine del corso si deve superare una prova scritta. I contenuti del corso scelto faranno parte del primo esame di stato.

Chi ha scelto la matematica come indirizzo principale deve inoltre frequentare un seminario su «l'insegnamento e l'apprendimento della matematica». Nel corso di questo seminario gli argomenti vengono esposti direttamente dai futuri insegnanti, con discussione sugli aspetti salienti della didattica della matematica.

I frequentanti di questi corsi verranno a contatto con due punti di vista, che chiameremo rispettivamente l'ambito «costruttivo» e quello «ricostruttivo» della ricerca in didattica della matematica.

Nell'ambito dell'approccio «costruttivo» gli insegnanti in formazione studiano possibili obiettivi specifici per favorire l'apprendimento della matematica ed elaborano possibili strategie efficaci, di carattere pedagogico, per il suo insegnamento.

Esempi di obiettivi specifici sono: comprendere le strutture matematiche (anziché applicare algoritmi assegnati), argomentare mate-

maticamente, sviluppare strategie per la risoluzione di problemi matematici, rendersi conto della potenza ma anche dei limiti della matematica nella soluzione di problemi reali, ecc.

Quanto agli aspetti pedagogici per l'utilizzo di strategie d'insegnamento efficaci, essi includono i principi di organizzazione dei processi di apprendimento, come l'apprendimento «per scoperta», la valorizzazione delle pre-conoscenze già possedute dagli alunni, la consapevolezza che gli «errori» sono una componente necessaria nei processi di apprendimento, ecc.

Nell'ambito dell'approccio «ricostruttivo» i futuri insegnanti studiano i processi di apprendimento della matematica da parte degli alunni. A questo scopo essi studiano diversi aspetti delle teorie sulla didattica, ad esempio quelli riguardanti lo stile di pensiero matematico degli alunni, gli errori di calcolo tipici, lo sviluppo del concetto di numero (cioè veri e propri «studi di casi»), le opportunità offerte dal materiale didattico e i suoi difetti ecc. Seguendo questo approccio, le questioni riguardanti «l'osservazione e la comprensione del processo di apprendimento dell'alunno» vengono discusse sulla base dei risultati della ricerca in didattica della matematica.

Un tipico tema che viene trattato durante i corsi di didattica per i futuri insegnanti delle elementari è quello delle conoscenze matematiche pregresse degli alunni: che cosa sanno già della matematica gli alunni prima che venga loro presentata «ufficialmente» a scuola? Ad esempio, ci sono dati che suggeriscono come gli insegnanti che devono ancora prendere servizio (ma anche alcuni in servizio) tendano a sottostimare le conoscenze sui numeri degli alunni di prima elementare (HEUVEL-PANHUIZEN 2001). Questo fa sì che le questioni riguardanti le conoscenze pregresse siano una parte importante del contenuto dei corsi di didattica, se si assume l'approccio ricostruttivo della didattica matematica. Ne consegue direttamente una seconda questione, che riguarda l'approccio costruttivo: come possiamo utilizzare tali conoscenze pregresse per farne il quadro entro il quale si dia senso all'ulteriore processo di apprendimento?

È ovvio come non si possa dare risposta alle questioni didattiche (perlomeno non a quelle relative all'approccio ricostruttivo) rimanendo solo nell'ambito delle scienze matematiche, ma che si debba ricorrere alle

cosiddette «discipline collegate» (cfr. WITTMANN 1995, p. 357). Pertanto la formazione didattica dei futuri insegnanti dovrebbe toccare anche i risultati rilevanti e soprattutto i metodi di ricerca delle discipline collegate. Le più importanti discipline collegate, seguendo WITTMANN 1995, spaziano dalla storia della matematica, epistemologia, logica, alle scienze umane: psicologia, sociologia, antropologia, pedagogia, storia dell'istruzione e pedagogia generale.

Naturalmente ognuna di tali discipline richiederebbe da sola un intero corso. Nell'ambito della formazione didattica, tuttavia, ad esempio durante un corso semestrale di «didattica dell'aritmetica», si fa riferimento a molte di tali discipline connesse all'apprendimento e all'insegnamento dell'aritmetica. La maggioranza dei futuri insegnanti riceve soltanto un'infarinatura delle idee teoriche, dei metodi e delle ricerche che sono alla base degli aspetti ricostruttivi della didattica della matematica in quanto solo per quei pochi allievi che seguono un piano di studi molto specialistico risultano obbligatori corsi più approfonditi su tali aspetti. Può darsi che un'introduzione così sommaria alle questioni salienti della didattica ricostruttiva della matematica e alle relative discipline collegate ne renda spesso il contenuto troppo astratto per gli insegnanti in formazione (per una diversa opinione sul giusto equilibrio tra matematica e discipline collegate nella formazione degli insegnanti cfr. BENDER 2002).

I problemi relativi alla rilevanza della «teoria» all'interno della «prassi» incontrati dai futuri insegnanti possono essere riproposti nell'ambito di ogni aspetto della formazione degli insegnanti (sul «problema teoria-prassi» generale nella formazione degli insegnanti in Germania cfr. TERHART et al. 2000). Pertanto si tratta di una questione che non è specifica della didattica della matematica ma ciò nonostante è importante per essa. In breve, dal punto di vista degli autori, questo problema sorge dalla seguente «domanda circolare»: di quanta teoria hanno bisogno i futuri insegnanti per comprendere i processi di insegnamento e di apprendimento e di quanta esperienza di insegnamento hanno bisogno per comprendere la rilevanza della teoria per la loro futura professione? L'università cerca di colmare il divario tra teoria e prassi offrendo corsi di tirocinio pratico da svolgersi nelle scuole. Il prossimo paragrafo discute diversi tipi di corsi di tirocinio nell'ambito della didattica della matematica.

### 2.3. *Dalla teoria alla prassi.*

In Germania il tirocinio scolastico non è obbligatorio e a volte è praticato per sola curiosità personale, nonostante paradossalmente sia considerato una fase importante della formazione dell'insegnante. Molti insegnanti, dopo aver superato il primo esame di stato, non incontrano più alcun docente di didattica e la comunicazione tra l'università e la prassi scolastica è, per dirla eufemisticamente, meno che ottimale (per una discussione generale e molto dettagliata di questo problema cfr. TERHART et al. 2000).

Esistono tuttavia diversi tipi di corsi per i docenti in servizio, organizzati da enti diversi: alcuni corsi sono organizzati dalle autorità scolastiche, altri da una sovrintendenza per l'aggiornamento dei docenti (ad esempio a Dortmund), altri da enti federali di ricerca sul miglioramento della scuola (indipendenti dalle università); altri sono organizzati da editori di libri scolastici per promuovere i propri libri e le idee in essi contenute, e altri ancora sono organizzati dalle scuole stesse (aggiornamento scolastico interno degli insegnanti). L'aggiornamento spazia su un'ampia gamma di contenuti: insegnamento in classi multilingue, insegnamento e apprendimento nelle prime classi, insegnamento di tecniche di risoluzione dei problemi, motivazione, ecc. Alcuni organizzatori prima scelgono i contenuti e poi cercano gli esperti adatti per trattare gli specifici contenuti scelti. Non esistendo alcuna autorità generale deputata ad organizzare i corsi di aggiornamento per gli insegnanti è impossibile farsene un'idea generale. In particolare, per quanto riguarda la formazione degli insegnanti delle elementari, secondo la nostra esperienza vengono spesso affrontati (a volte nell'ambito di corsi relativi alla «matematica») problemi specifici di insegnamento e di apprendimento ma c'è un numero molto piccolo, quasi trascurabile, di corsi sui contenuti matematici. Dal punto di vista degli autori, due sono gli aspetti importanti al fine di conseguire uno scambio fruttuoso tra l'università e gli insegnanti in servizio.

In primo luogo, la formazione pratica necessita di tanto in tanto dell'apporto dei nuovi risultati della ricerca in matematica, e naturalmente anche l'università ha bisogno del riscontro dell'attività pratica che si svolge nella scuola. A questo scopo si realizza periodicamente una

forma di interscambio tra l'università e la comunità degli insegnanti, spesso per iniziativa dei docenti di didattica della matematica (ad esempio a Dortmund si tiene l'annuale «*Symposium mathe 2000*»), oppure nell'ambito di gruppi di lavoro locali più piccoli. Sebbene questi scambi di idee siano fruttuosi per entrambe le parti, l'università e gli insegnanti, essi hanno natura volontaria e pertanto coinvolgono solo una minoranza degli insegnanti.

In secondo luogo, è essenziale che tra gli insegnanti abbiano sistematicamente luogo scambi di idee sulle proprie esperienze quotidiane, come in qualsiasi comunità di professionisti. Naturalmente, per via dei molti altri compiti da cui sono gravati (ad esempio compiti amministrativi), agli insegnanti manca il tempo per osservarsi reciprocamente mentre insegnano. Ma una difficoltà generale e più grave consiste nel fatto che molti insegnanti vedono i problemi che incontrano nell'insegnare come strettamente personali e non come sfide poste dalla professionalità stessa. Questi insegnanti non cercano il confronto di idee tra colleghi.

Si può dire che la cultura del confronto tra insegnanti in servizio da un lato, e tra scuola e università dall'altro, sia ancora poco sviluppata, anche se alcuni progetti fruttuosi hanno dato inizio a scambi regolari di idee sull'insegnamento della matematica tra esperti nella «prassi» ed esperti nella «teoria» (cfr. SCHERER / STEINBRING 2003). Pertanto, al fine di incentivare tale cultura, una sfida posta all'istruzione universitaria consiste proprio nel porre le basi di una migliore comunicazione tra esperti di teoria e insegnanti professionisti già nei primissimi momenti della formazione degli insegnanti. Esistono corsi tenuti nelle scuole basati su diversi gradi di cooperazione tra l'università e la scuola; questi corsi differiscono grandemente per contenuti ma hanno un obiettivo comune: imparare il prima possibile a collegare le teorie elaborate in didattica della matematica alla pratica dell'insegnamento professionale. Essi sono anche un'occasione per costruire precocemente le fondamenta delle successive discussioni tra insegnanti sulle proprie esperienze di insegnamento. Inoltre, naturalmente, si fornisce ai futuri insegnanti l'opportunità di verificare se la professione docente sia per loro la scelta giusta.

Questi corsi trattano il processo di pianificazione di unità didattiche, l'organizzazione di percorsi di apprendimento per gli

alunni e la riflessione sulle opportunità e i problemi emersi dagli esperimenti didattici effettuati. Esistono diversi tipi di corsi, per la maggior parte organizzati da docenti universitari in collaborazione con gli insegnanti:

- «*Fachdidaktisches Tagespraktikum*»: gli insegnanti in formazione devono seguire almeno due di questi corsi, in materie diverse e non necessariamente in matematica. Normalmente un docente universitario organizza il corso, incontrandosi con gli studenti una volta alla settimana nell'arco di un semestre di partecipazione a lezioni scolastiche di matematica in una singola classe. I contenuti principali del corso consistono nella preparazione, organizzazione, osservazione di esperimenti didattici e nella riflessione critica e valutazione degli stessi. Questo tipo di corso in ambito scolastico è discusso in dettaglio a titolo di esempio nella terza parte del presente lavoro.

- «*Blockpraktikum*»: per circa un mese lo studente trascorre l'intera giornata a scuola osservando e insegnando, idealmente, ogni materia. Il tutor principale è uno degli insegnanti della scuola e un docente universitario funge da secondo tutor. Nel corso di questo tirocinio lo studente viene integrato nella pratica scolastica «quotidiana». Si può dire che lo studente viva un'esperienza più vicina alla scuola che all'università usufruendo di un'opportunità di lungo termine per rendersi conto delle proprie attitudini e abilità nella professione docente. Mentre il ruolo del primo tutor consiste nel guidare lo studente negli aspetti più propriamente pratici, il secondo tutor si occupa di alcuni compiti obbligatori di questo tipo di tirocinio: lo studente deve pianificare ed organizzare un'unità didattica di almeno quattro lezioni e scrivere una relazione sull'intero processo, dalla pianificazione alla realizzazione, cui si aggiungono le sue riflessioni sull'unità didattica e su quanto desunto durante appositi turni di osservazione nell'ambito della scuola visitata. Una possibile estensione del «*Blockpraktikum*» obbligatorio è lo «*Schulpraktisches Halbjahr*» volontario, che consiste in un coinvolgimento del futuro insegnante nella attività della scuola per circa sei mesi.

- «*Mathematiklernen in der Primarstufe*»: questi corsi riguardano esperimenti nell'insegnamento e nell'apprendimento e si con-

centrano su aspetti teorici particolari dell'istruzione matematica. Durante il seminario i futuri insegnanti progettano, organizzano, documentano e illustrano alcune esperienze. I tipi di esperienze variano a seconda degli argomenti teorici sui quali si concentra il corso e sono spesso influenzati dagli interessi scientifici del docente universitario che lo tiene. Se, ad esempio, l'enfasi è sugli aspetti psicologici dei processi di apprendimento in matematica, spesso gli insegnanti in formazione organizzano sondaggi. Concentrandosi sugli esiti dei processi di apprendimento, possono effettuare valutazioni quantitative volte a verificare i possibili approcci corretti per il raggiungimento di un determinato obiettivo. I corsi che si concentrano sull'organizzazione di percorsi di avvicinamento al pensiero matematico nelle aule scolastiche tenderanno di intraprendere osservazioni sperimentali sistematiche finalizzate alla comprensione dei processi didattici. Questi corsi cercano di offrire un approfondimento sulle questioni tipiche della ricerca e dei metodi della didattica della matematica. Essi da un lato costituiscono un'opportunità per coinvolgere i futuri insegnanti nelle attività di ricerca (cfr. PETER-KOOP 2001) e, dall'altro, per chiarire la necessità e l'utilità della teoria nella qualificazione professionale dell'insegnamento. Sovente tali corsi fungono da preparazione alla tesi per quegli studenti che ne scelgono una di carattere applicativo.

### 3. – Alcuni esempi specifici.

#### 3.1. *L'importanza del retroterra matematico.*

La formazione universitaria dei futuri insegnanti è vista come un'occasione per offrire loro una visione più profonda di contenuti matematici rilevanti e utili per la loro vita professionale. Ogni università è libera di suddividere il monte ore globale destinato alla matematica in corsi su temi specifici e diversificati.

I futuri insegnanti, come sostiene WITTMANN 2001c nel suo articolo, dovrebbero avere l'opportunità di costruire attivamente le proprie conoscenze da sé e di scambiarsi riflessioni sulle strategie di risoluzione adottate.

L'approccio adottato a Dortmund persegue una visione il più possibile per «processi» della matematica; a questo scopo proponiamo una

selezione accurata di esercitazioni e problemi di cui riportiamo a seguito alcuni esempi. Rimandiamo per ulteriori approfondimenti a MÜLLER, STEINBRING e WITTMANN 2004.

### Teoria elementare dei numeri

(cfr. MÜLLER, STEINBRING e WITTMANN 2004)

#### (1) Numeri primi

- a) Dimostrare che: se  $p$  è primo e  $p > 2$ , allora  $24 \mid p^3 - p$ .
- b) Dimostrare che: se  $p$  è primo e  $p > 5$ , allora  $240 \mid p^4 - 1$ .
- c) Siano  $p, q$  primi,  $p, q > 3$  e  $q - p = 2$ .  
Dimostrare che  $pq + 1$  è divisibile per 18.  
Il numero  $pq + 1$  gode di qualche (altra) proprietà speciale?

#### (2) Pseudoprimi

Dato l'insieme  $M$  dei numeri naturali diversi da 3,  $M = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ .

- a) Si fattorizzino i numeri 30, 45, 60, 111, 1001.
- b) I numeri appartenenti a  $M$  che non siano primi nel senso usuale ma che non siano divisibili sono detti pseudoprimi di  $M$ . Si descrivano gli pseudoprimi.
- a) Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica è ancora valido in  $M$ ?  
Il Lemma di Euclide<sup>(3)</sup> è ancora valido?

#### A. Esempi di problemi di teoria dei numeri

Aufgabe 4:

a) für  $p$  Primzahl  $24 \mid p^3 - p$

Bsp.:  $p=3$   $24 \mid 27-3 \checkmark$   
 $p=5$   $24 \mid 120 \checkmark$   
 $p=7$   $24 \mid 343-7 \checkmark$

$$p^3 - p = p(p^2 - 1) = (p-1)p(p+1)$$

Produkt von 3 aufeinander folgenden Zahlen.

$p-1, p+1$  gerade, eine durch 4 teilbar, eine durch 2  
 eine durch 3 teilbar  $\leftarrow$  da 3 aufeinander f.

$$\Rightarrow 3 \cdot 2^3 \mid p^3 - p$$

Una soluzione per il problema (1a)

<sup>(3)</sup> Se un numero primo divide il prodotto di due numeri naturali, allora divide almeno uno dei due fattori.

I numeri naturali sono alla base di tutte le operazioni che si insegnano nella scuola primaria. Nella scuola secondaria l'ambito numerico viene ampliato ai numeri decimali, alle frazioni e ai numeri reali. La comprensione delle proprietà dei numeri naturali è uno degli obiettivi principali del corso di teoria elementare dei numeri. Conoscere e padroneggiare queste proprietà rende i futuri insegnanti più sicuri delle loro abilità matematiche e dà loro una comprensione più profonda dei fondamenti della matematica. L'esercizio (1a) può essere risolto facilmente se i termini vengono scritti sotto forma di prodotti. Come si vede nella soluzione proposta da uno dei partecipanti al corso per il punto (1a), il primo passo può consistere in una lista di esempi. Successivamente il termine  $p^3 - p$  viene identificato come il prodotto di tre numeri consecutivi:  $(p - 1)p(p + 1)$ .

Uno dei tre fattori è certo divisibile per 3, e due sono pari. Di questi, uno è sicuramente divisibile per 4.

I futuri insegnanti devono approfondire le proprie conoscenze sui numeri, per essere in grado di spiegare e dimostrare facilmente proprietà matematiche.

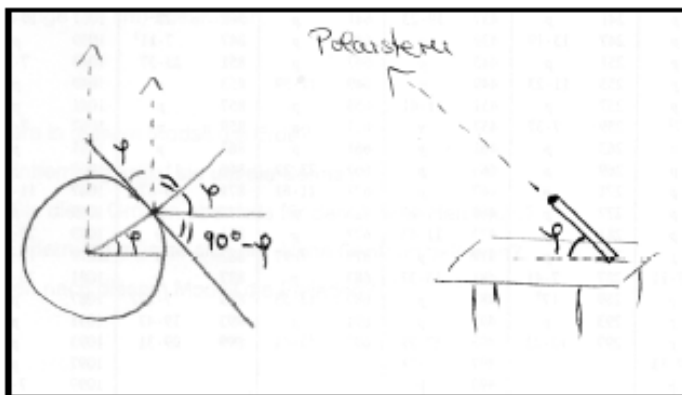
Ma questa è solo una delle ragioni per lavorare su problemi come questi. Un ulteriore motivo importante del corso è quello di invogliare gli studenti a «giocare» con la matematica. Come si vede, la situazione presentata nel punto (2) differisce solo poco da quella abituale. A prima vista questo piccolo cambiamento ha conseguenze piccole, ma un esame dettagliato della validità di teoremi e lemmi dà una visione più accurata del fragile e complicato sistema dei numeri naturali. L'immagine che gli studenti hanno della matematica come di una costruzione le cui verità sono «incise nella pietra» dovrebbe cedere il passo ad un'immagine della matematica come esperienza intellettuale (cfr. DAVIES-HERSH, 1981).

Anche nell'ambito della geometria l'istruzione matematica all'università di Dortmund cerca di fornire sempre ai futuri insegnanti sia le conoscenze matematiche necessarie per comprendere i fenomeni osservati, sia esempi nei quali tali conoscenze possono essere usate in problemi del mondo reale (matematica applicata).

### Geometria dello spazio

- (1) Spiegare perché l'angolo osservato compreso tra l'orizzonte e la stella Polare è uguale alla latitudine dell'osservatore.
- (2) Che tipo di forma ha la curva dell'ombra (nel corso della giornata) in primavera, estate, autunno e inverno all'equatore (al Polo Nord / al circolo polare antartico)?

#### B. Esempi di problemi di geometria



Una soluzione per il problema (1)

I problemi riportati nell'esempio presuppongono conoscenze matematiche apprese in precedenza. Il primo problema può essere risolto se si sanno usare in modo appropriato le relazioni tra angoli. Inoltre gli studenti devono avere un'idea della situazione fisica. In particolare devono sapere che al polo nord la stella polare sta (costantemente) allo zenit e che, data la distanza enorme, i raggi luminosi della stella polare diretti all'emisfero settentrionale della Terra possono considerarsi tutti paralleli tra di loro.

Per risolvere il secondo problema occorre conoscere le sezioni coniche. Se un cono viene tagliato da un piano, si possono ottenere solo determinate curve: parabola, iperbole, ellisse e circonferenza. Gli studenti analizzano i diversi casi e dimostrano i risultati ipotizzati (per esempio ricorrendo alle sfere di Dandelin). Al termine del corso essi sono pronti ad applicare queste conoscenze al mondo reale. Anche gli

scolari di scuola primaria - ossia gli allievi dei futuri insegnanti - sono in grado di osservare la curva descritta dall'ombra dell'estremità di un bastone conficcato in terra nel cortile della scuola. La curva può essere resa visibile segnando l'estremità dell'ombra con gesso o con dei sassolini. Le proprietà della bella curva sono squisitamente matematiche, e gli insegnanti dovrebbero avere un'idea di ciò che sta dietro a tutto questo. Gli esempi scelti sottolineano i due aspetti più importanti dell'istruzione matematica universitaria in Germania (e specificamente a Dortmund). Da un lato i futuri insegnanti hanno bisogno di conoscenze matematiche sufficienti per vivere la matematica come una scienza articolata in percorsi entro i quali si può «giocare» e sperimentare con le strutture e le proprietà matematiche. Dall'altro lato tali conoscenze li mettono in grado di spiegare fenomeni del mondo reale e di rispondere con maggiore consapevolezza alle esigenti domande degli alunni. L'essenza stessa dell'apprendimento consiste nell'analizzare attivamente i problemi (WITTMANN 2001c). Queste importanti caratteristiche della matematica sono esplicitamente presenti anche nei programmi della scuola primaria: introduzione alle strutture e introduzione alle applicazioni. I futuri insegnanti devono fare esperienze personali nel «fare matematica» per poter organizzare in modo appropriato le lezioni scolastiche di matematica e i processi di apprendimento degli allievi basati sull'apprendimento attivo come scoperta personale. Naturalmente questo è solo uno dei due aspetti rilevanti della questione. Il secondo aspetto, parimenti importante, sarà descritto nel prossimo paragrafo.

### 3.2. *Come colmare il divario tra teoria e prassi.*

Questo paragrafo descrive alcuni obiettivi generali di un corso universitario a carattere seminariale, detto «*Fachdidaktisches Tagesspraktikum*», e presenta alcuni esempi con commenti soggettivi basati sull'esperienza personale degli autori di questo articolo.

In linea di massima, lo scopo precipuo del corso consiste in un'integrazione fra teoria e prassi, volta a fornire conoscenze rilevanti per l'insegnamento nelle scuole. Ovviamente si tratta di una sfida, che va intesa solo come un primo passo verso l'acquisizione di una specifica

professionalità docente. Il seminario si riunisce settimanalmente durante un semestre in una scuola. Tipicamente circa 8 - 12 futuri insegnanti partecipano al corso e ognuno di essi ha il compito di pianificare e organizzare una sperimentazione didattica relativa ad almeno una lezione da tenere poi ad una classe reale, mentre i rimanenti colleghi di corso osservano lo svolgersi dell'insegnamento e la dinamica dei processi di apprendimento da parte dei ragazzi. Pur esistendo indicazioni ufficiali dell'università per l'organizzazione di questo tipo di corso, il docente universitario è sostanzialmente libero di organizzare le esercitazioni pratiche come meglio crede. Secondo le indicazioni dell'università di Dortmund, per esempio, le finalità del corso sono:

- imparare a pianificare, organizzare e valutare l'efficacia delle lezioni di matematica
- riflettere sulle connessioni fra pedagogia, matematica e didattica nella pratica dell'insegnamento
- considerare l'insegnamento nel suo ruolo di mediatore tra gli interessi dei ragazzi e gli obiettivi educativi ufficiali dalla scuola
- rendersi conto delle condizioni che favoriscono lo sviluppo di una motivazione disciplinare specifica per i processi di apprendimento da un lato, e per una valutazione formativa dall'altro
- fare esperienze pratiche nell'insegnamento specifico della disciplina.

Spesso i futuri insegnanti sono insoddisfatti del quadro organizzativo di questo corso, in quanto si trovano a dover fare lezione ad una classe, senza disporre di informazioni importanti. In effetti, normalmente essi sanno ben poco dello stile d'insegnamento dell'insegnante titolare della classe, delle modalità dell'apprendimento degli alunni, delle abilità matematiche e dei problemi dei singoli fanciulli, ecc.

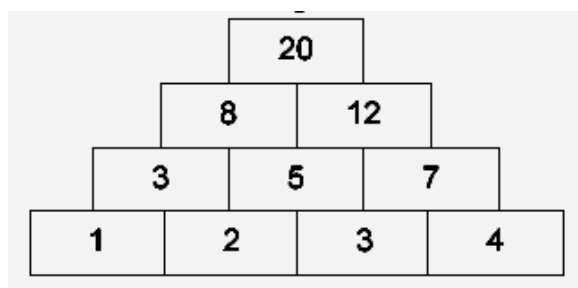
Nonostante ciò, a nostro parere, spesso condiviso al termine del seminario anche dagli insegnanti in formazione, nell'ambito di questo corso si possono raggiungere traguardi importanti. Per esempio, ci si può rendere conto dell'utilità, per la propria futura professione, di alcuni aspetti costruttivi e ricostruttivi della matematica, come risulterà dalla discussione degli esempi riportati qui di seguito.

Uno dei concetti pedagogici centrali dell'odierna didattica della matematica è quello di «apprendimento per scoperta» (cfr. WITTMANN 2001b). Ma come possono i futuri insegnanti organizzare un apprendimento per scoperta in una classe con tanti fattori sconosciuti? Per affrontare questo problema di istruzione costruttiva, gli autori sopra citati propongono di utilizzare quelli che essi chiamano «ambienti per un apprendimento efficace» nell'organizzare il contenuto delle lezioni.

Un «ambiente di apprendimento efficace» consiste in un'unità didattica di insegnamento/apprendimento con le seguenti caratteristiche (WITTMANN 2001a, p. 2):

- rappresenta obiettivi, contenuti e principi fondamentali dell'insegnamento della matematica ad un determinato livello
- è collegato a contenuti, processi e procedimenti matematici più avanzati di tale livello, ed è una ricca fonte di attività matematiche
- è flessibile e può essere adattato alle condizioni specifiche della classe
- integra nell'insegnamento della matematica anche gli aspetti psicologici e pedagogici, fornendo così un ricco campo di ricerca empirica.

Idealmente due o tre futuri insegnanti lavorano insieme per organizzare alcune lezioni inquadrare in un ambiente di apprendimento efficace. Ad esempio, l'argomento delle lezioni potrebbe ruotare attorno al gioco dei «muri di numeri». Il «gioco» consiste nel disporre dei numeri nei mattoncini seguendo una regola molto semplice: la somma dei numeri in due mattoni affiancati è il numero da inserire nel mattone soprastante (cfr. WITTMANN / MÜLLER 1994).



Nella prima lezione, il futuro insegnante introduce questa regola elementare di costruzione dei muri di numeri, il che si può fare perfino con una classe completamente sconosciuta. Inoltre vengono date alcune istruzioni molto semplici, preparando con attenzione il terreno per compiti più difficili nelle lezioni a seguire. In questa fase gli allievi sperimentano, eventualmente risolvendo esercizi su costruzioni di mattoncini numerati diversamente. Ad esempio, una volta che gli alunni abbiano compreso la regola fondamentale dei muri di numeri nell'ambito dell'esempio illustrato qui sopra, affronteranno il seguente schema di lavoro:

Fate il confronto con il primo muro di numeri. Che cosa cambia?

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2 | 3 | 4 |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 80%;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> </div> </div> |   |   |   |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2 | 3 | 4 |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 80%;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> </div> </div> |   |   |   |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2 | 3 | 4 |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 80%;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> </div> </div> |   |   |   |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 3 | 4 | 4 |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 80%;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> </div> </div> |   |   |   |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 4 | 3 | 5 |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 80%;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> </div> </div> |   |   |   |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 5 | 3 | 4 |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 80%;"> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px;"></div> </div> </div> |   |   |   |

Mentre gli alunni sono impegnati nel compito, il futuro insegnante passeggia tra i banchi e osserva l'attività degli allievi da uno specifico punto di vista. Per esempio gli alunni notano sistematicamente il cambiamento nel mattoncino più in alto? Confrontano tra loro le diverse costruzioni di numeri notando cosa cambia e cosa invece rimane invariato? O stanno trattando ogni costruzione come un problema isolato? Gli allievi discutono tra loro oppure lavorano al problema individualmente? Ci sono alcuni alunni che incontrano difficoltà a calcolare le somme?

Così facendo i futuri insegnanti hanno una prima opportunità di interagire con la classe e di farsi una idea delle abilità e dei problemi dei singoli alunni e soprattutto possono rendersi conto se la classe si è mostrata coinvolta nel problema proposto. A volte questa fase conduce

a diverse osservazioni sorprendenti, ad esempio che i compiti assegnati fossero troppo facili o troppo difficili per gli alunni o che questi ultimi avessero interpretato il compito in un modo totalmente inaspettato, pur se molto razionale.

Poi il futuro insegnante discute gli esercizi assegnati con gli alunni ed essi hanno l'opportunità di parlare delle proprie scoperte e di giustificare le proprie affermazioni. La questione importante è se gli allievi hanno scoperto delle regolarità svolgendo gli esercizi, in che modo le descrivono, e se sono in grado di giustificare le proprie affermazioni. Questo processo interattivo di riflessione è un confronto di posizioni e pertanto non può essere pianificato in dettaglio. A volte, cosa frustrante per gli insegnanti in formazione, ma molto importante per la loro riflessione, gli alunni non notano la presenza di alcuna regolarità, nel qual caso l'ambiente di apprendimento efficace è divenuto un puro esercizio di calcolo di somme all'interno della lezione. Ai fini del seminario, le osservazioni del futuro insegnante assumono allora il ruolo di informazioni molto importanti per determinare le ragioni dell'esito insoddisfacente della lezione. Questa discussione porta ad apportare modifiche nell'organizzazione dell'ambiente di apprendimento per la lezione successiva.

Pertanto i futuri insegnanti vengono attivamente coinvolti nella didattica della matematica intesa come «scienza di progettazione» (WITTMANN 1995). Imparano a preparare una lezione e a modificare l'ambiente in cui si svolge l'apprendimento se i risultati non sono soddisfacenti. Naturalmente, anche se la preparazione di una lezione è molto buona e dettagliata, alcuni aspetti dei processi di insegnamento e di apprendimento non possono essere pianificati in anticipo; in altre parole i futuri insegnanti imparano come sia necessario pianificare una lezione e anche come sia impossibile pianificare un processo di interazione in tale dettaglio da conoscere in anticipo tutte le proposte degli alunni.

Questo ci porta al secondo aspetto che, dal punto di vista degli autori, è importante per integrare teoria e prassi in questo genere di seminario: come si può comprendere l'interazione che ha luogo in classe, specialmente se prende strade inaspettate (JUNGWIRTH et al. 2001)? Questa è sicuramente una questione di didattica della mate-

matica in senso ricostruttivo, che concerne le relazioni tra insegnante e allievo in classe.

Il fatto che una discussione su questo aspetto sia proficua dipende da un'attenta osservazione del processo di insegnamento e di apprendimento. A questo scopo è molto utile videoregistrare le lezioni. Tale documentazione costituisce una base dettagliata per la discussione dei processi di insegnamento e di apprendimento. I partecipanti al seminario hanno così l'opportunità di analizzare con calma gli aspetti fondamentali della lezione e non soltanto sulla base della memoria dei partecipanti.

Ad esempio, in una classe di seconda elementare, l'allievo Peter doveva risolvere il problema « $46 + 12 =$ » alla lavagna. Peter rimase attonito davanti al problema senza dire o fare alcunché. Allora il futuro insegnante disse ad un secondo allievo, Michael, di venire ad aiutare Peter. Grazie all'aiuto del compagno, Peter in pochi secondi individuò la somma corretta e la lezione proseguì. Tutti gli insegnanti in formazione furono molto sorpresi dagli esiti di questo breve processo d'interazione: secondo loro questo era un buon esempio di apprendimento collettivo in matematica. Ma attraverso la documentazione video del fatto potemmo analizzare meglio la comunicazione tra gli allievi -- riportata nella tabella seguente -- che aveva condotto al risultato corretto.

---

|    |         |                                      |
|----|---------|--------------------------------------|
| 1  | Michael | Allora, quanto fa $46$ più $12$ ?    |
| 2  | Peter   | ( <i>silenzio</i> )                  |
| 3  | Michael | quanto fa $40$ più $10$ ?            |
| 4  | Peter   | ( <i>silenzio</i> )                  |
| 5  | Michael | quanto fa $4$ più $1$ ?              |
| 6  | Peter   | $5$                                  |
| 7  | Michael | scrivilo                             |
| 8  | Peter   | ( <i>scrive 5</i> )                  |
| 9  | Michael | quanto fa $6$ più $2$ ?              |
| 10 | Peter   | $8$ ( <i>scrive un 8 dopo il 5</i> ) |
| 11 | Michael | Ecco fatto.                          |

---

Per i futuri insegnanti, una volta posti di fronte alla documentazione video, la soluzione corretta « $58$ » divenne meno importante e presero invece in considerazione il processo di risoluzione: Peter aveva dovuto

di fatto effettuare calcoli con numeri di una SOLA cifra e successivamente scriverne i risultati.

Questo dialogo mette in luce una circostanza (cfr. VOIGT 1985) che si ripropone spesso nelle interazioni che hanno luogo in classe: un allievo ha difficoltà a risolvere un esercizio di matematica; a seguito dell'intervento dell'insegnante (o, in questo esempio, di un altro allievo), egli viene guidato passo per passo ad una soluzione. Nell'ambito di questa suddivisione del problema in molti passi più piccoli però, la relazione tra il processo matematico che giustifica il problema assegnato e la soluzione cambia. In breve, l'intervento non aiuta affatto l'allievo ad apprendere, anche se egli produce la soluzione corretta.

Messi di fronte ad esempi come il precedente, i futuri insegnanti acquisiscono una maggiore sensibilità riguardo ai propri interventi volti ad aiutare un allievo a risolvere un problema. I futuri insegnanti, specialmente quando sono preoccupati dal tempo che passa e dagli obiettivi di apprendimento non ancora raggiunti, tendono ad agire come l'allievo Michael: se un allievo non dà ad una domanda del futuro insegnante la risposta «attesa», egli spesso lo «aiuta» a dire le parole giuste. Così facendo, l'interazione produce la soluzione in un modo in un certo senso «liscio», ma difficilmente innesca un processo di effettivo apprendimento matematico. Identificare, discutere e comprendere questi processi di interazione può aiutare gli studenti a capire quale sia la funzione del loro intervento nell'apprendimento degli alunni. L'intervento aiuta gli allievi a costruire relazioni matematiche oppure si limita – come nel caso di Michael – a raggiungere superficialmente il risultato desiderato? Quali forme alternative di intervento si possono realizzare, ammesso che un intervento sia necessario? Nell'ambito di queste discussioni, i futuri insegnanti acquistano una sempre maggiore sensibilità nei confronti dei processi di interazione che non si possono pianificare in anticipo, ma che prendono forma spontaneamente durante la lezione e di cui essi dovrebbero essere assolutamente consapevoli.

#### **4. – Uno sguardo al futuro.**

I risultati disastrosi dei confronti internazionali TIMSS e P.I.S.A (cfr. ad esempio KNOCHÉ et al. 2002) hanno generato in Germania

accesi dibattiti pubblici sul sistema educativo tedesco. I primi tentativi di proposte a fronte di tali risultati denotano una ricerca affrettata e confusa di soluzioni. Fortunatamente sistemi quale quello scolastico non cambiano spontaneamente. Ma almeno i problemi dell'istruzione hanno trovato maggiore spazio nella consapevolezza dell'opinione pubblica. L'istruzione primaria è risultata essere in condizioni migliori (cfr. WALTER et al. 2003).

Le ben fondate teorie moderne sull'apprendimento sono di valido aiuto nella scuola primaria. Sotto questo punto di vista l'istruzione secondaria non può procedere alla stessa maniera e quindi sono state avanzate proposte di riforma diverse e da diverse prospettive.

Müller, Steinbring e Wittmann, hanno formulato opzioni concrete per il futuro nel loro opuscolo «Beyond P.I.S.A.» (cfr. MÜLLER, STEINBRING e WITTMANN 2002).

Faust-Siehl et al. hanno proposto fin dal 1996 una riforma strutturale della scuola primaria (cfr. FAUST-SIEHL et al. 1996).

Viebahn si è occupato della preparazione universitaria dei futuri insegnanti (cfr. VIEBAHN 2003, p. 96 e segg.).

Ma c'è da tenere presente che qualunque riforma dovrà comportare una riduzione dell'onere finanziario rispetto a quello del sistema finora vigente, in quanto attualmente in Germania in ambito politico l'aspetto finanziario ha la priorità sull'aspetto della validità dei contenuti. Perciò è presumibile che la discussione relativa ai contenuti sarà dominata dalla discussione relativa ai costi.

## BIBLIOGRAFIA

P. BENDER, *Two Cultures in the Educational System - and how Mathematics can Help Prospective (Primary School) Teachers to Overcome their Disparity*. In: H.-G. WEIGAND (Ed.): *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries: Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Potsdam 2000*. Hildesheim: Franzbecker 2002, pp. 18-32.

P. J. DAVIS - REUBEN HERSH, *The mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser (1981).

G. FAUST-SIEHL, et al., *Die Zukunft beginnt in der Grundschule: Empfehlungen zur Neugestaltung der Primarstufe*. Reinbek bei Hamburg: rororo, (1996).

H. FREUDENTHAL, HANS : *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel (1973).

L. HEFENDEHL-HEBEKER, *On Aspects of Didactically Sensitive Understanding of Mathematics*. In: H.-G. Weigand (Ed.): *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries: Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*, Bern 1999. Hildesheim: Franzbecker (2002), pp. 20-32.

M. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, *Children Learn Mathematics*. Freudenthal Institute, Utrecht University (2001).

H. JUNGWIRTH, et al., *Interpretative Classroom Research in teacher education*. In: H.-G. Weigand et al. (Eds): *Developments in Mathematics Education in Germany. Selected papers from the annual conference on didactics of mathematics*, Regensburg, 1996. Hildesheim: Franzbecker (2001), pp. 49-56.

N. KNOCHÉ et al., *Die Pisa-2000-Studie, einige Ergebnisse und Analysen*. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 23.3/4 (2002), pp. 159-202.

G. KRAUTHAUSEN, *Lehren - Lernen - Lehren Lernen: Zur mathematikdidaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett (1998).

G. MÜLLER - GERHARD. N. - HEINZ STEINBRING - ERICH CH. WITTMANN, *Jenseits von PISA. Bildungsreform als Unterrichtsreform*. Seelze: Kallmeyer (2002).

G. MÜLLER - GERHARD N. - HEINZ STEINBRING - ERICH CH. WITTMANN. (in print) *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer.

G. MÜLLER, GERHARD - ERICH CH. WITTMANN, *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. 3, neu bearbeitete Auflage*. Braunschweig: Vieweg (1984).

A. PETER-KOOP, *From «Teacher Researchers» To «Student Teacher Researchers» -- Diagnostically Enriched Didactics*. In: M. Panhuizen. (Ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Utrecht, The Netherlands, July 12-7, vol. 1/4: (2001), pp. 72-79.

F. RODEHÜSER, *Epochen der Grundschulgeschichte*. Bochum: D. Winkler (1987).

E. RÖSNER, *Das Schulsystem in Deutschland: Kritische Befunde zur Schulstruktur der Sekundarstufen*. Hamburg: Bergmann + Helbig Verlag (1999).

P. SCHERER - HEINZ STEINBRING, *The Professionalisation of Mathematics Teachers' Knowledge - Teachers Commonly Reflect Feedbacks to Their Own Instruction Activity*. In: *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 28 February - 3 March 2003 in Bellaria, Italy.

C. SELTER, *Johannes Kühnells zentrale Forderung nach «Organisation und Aktivität». Konsequenzen für den Mathematikunterricht und die Lehrerbildung*. In: *Mathematica Didactica*, 15 (2), (1992), pp. 106-124.

Statistisches Bundesamt Deutschland: [http://www.destatis.de/themen/d/thm\\_bildung.htm](http://www.destatis.de/themen/d/thm_bildung.htm)

E. TERHART (Ed.), *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission «Lehrerbildung»*. Weinheim: Beltz (2000).

P. VIEBAHN, *Teacher Education in Germany* In: *European Journal of Teacher Education*, vol. 26.3 (2003), pp. 87-100.

J. VOIGT, *Patterns and Routines in Classroom Interaction*. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1) (1985), pp. 69-118.

E. CH. WITTMANN, *Mathematics Education As a 'Design Science'*. In: *Educational Studies in Mathematics*, 29 (1995), pp. 355-374.

E. CH. WITTMANN, *Drawing on the Richness of Elementary Mathematics in Designing Substantial Learning Environments*. In: M. Panhuizen. (Ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Utrecht, July 12-17, vol. 1/4 (2001a), pp. 203-206.

E. CH. WITTMANN, *Developing Mathematics Education in a Systemic Process*. In: *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2001b), pp. 1-20.

E. CH. WITTMANN, *The Alpha and Omega of Teacher Education: Organizing Mathematical Activities*. In: Holton, Derek (Ed.) *Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer (2001c).

E. CH. WITTMANN - GERD N. MÜLLER, *Wann ist ein Beweis ein Beweis*. In: P. Bender (Ed.): *Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin: Cornelsen (1988), pp. 237-257.

E. CH. WITTMANN - GERD N. MÜLLER, *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1&2*. Stuttgart: Klett (1994).

R. Schwarzkopf: Università di Dortmund, Germania  
e-mail: ralph.schwarzkopf@mathematik.uni-dortmund.de

A.S. Steinweg: Università di Bamberg, Germania  
e-mail: anna.steinweg@ppp.uni-bamberg.de