Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Federica Tinti

Metodi numerici per la risoluzione delle disequazioni variazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 299–302.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_299_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 299-302

Metodi numerici per la risoluzione delle disequazioni variazionali

FEDERICA TINTI

1. – Introduzione.

Una grande varietà di problemi del mondo reale può essere ricondotta a modelli variazionali che risultano molto più aderenti alla realtà, quando la loro condizione di equilibrio viene espressa come soluzione di un sistema di disequazioni variazionali.

Il problema di risolvere disequazioni variazionali consiste nel determinare un vettore $x^* \in C$ tale che

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall x^* \in C \tag{1}$$

dove C è un sottoinsieme non vuoto di $\Re^n$ ed $F : C \to \Re^n$.

Una prima grossolana suddivisione tra i metodi numerici per la risoluzione di disequazioni variazionali consiste nel differenziare quelli che richiedono la differenziabilità dell'operatore e quelli che non la richiedono. Pertanto la tesi si articola in due parti, contenenti l'analisi e lo sviluppo delle tipologie di metodi numerici appartenenti alle due classi citate.

Nella prima parte, si è analizzata la classe dei metodi di proiezione per le disequazioni variazionali pseudomonotone focalizzando lo studio su metodi di tipo extragradiente, che non richiedono la differenziabilità dell'operatore F, e prestando attenzione alle modalità di scelta della lunghezza del passo di proiezione.

Questi metodi sono particolarmente vantaggiosi in quanto richiedono per ogni iterazione solamente la valutazione di funzioni e il calcolo di una o più proiezione sull'insieme ammissibile, operazione la cui difficoltÁ dipende dalla complessità di C.

Per quanto riguarda la seconda parte, sono stati analizzati metodi per la risoluzione di disequazioni variazionali che sfruttano la differenziabilità dell'operatore. Tali metodi, permettono di riformulare il problema come un sistema di equazioni non lineari con vincoli, sfruttando le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker per le disequazioni variazionali.

Per la risoluzione di tale sistema di equazioni, sono analizzati due diversi approcci entrambi derivanti dalla teoria del metodo di Newton. Il primo utilizza un metodo del punto interno e il secondo un metodo di Newton generalizzato.

2. – Metodi extragradiente.

I metodi di tipo extragradiente con scelta adattiva ad ogni iterazione della lunghezza del passo di proiezione, sono stati proposti da Khobotov in [3].

In particolare, dato $x^0 \in C$, viene generata una sequenza $\{x^k\}$ tale che

$$\bar{x}^k = P_C(x^k - a_k F(x^k)) \qquad x^{k+1} = P_C(x^k - a_k F(\bar{x}^k))$$

dove con $P_C(x)$ si denota la proiezione del vettore x sull'insieme C ed a_k è la lunghezza del passo di proiezione.

Dopo aver riformulato la dimostrazione del teorema di Khobotov sotto l'ipotesi di pseudomonotonicità della funzione F (invece di quella di monotonicità), si sono proposte alcune varianti della scelta di a_k ad ogni iterazione. Tali proposte sono state introdotte dopo aver analizzato la regola di scelta di Marcotte suggerita in [4]. Numericamente si è riscontrato che questa scelta non risulta efficiente. Infatti nei casi in cui nelle iterazioni iniziali a_k assume valori piccoli, questo valore in tutte le iterazioni successive non cambia, provocando una lenta convergenza.

Altre originali varianti per la definizione del parametro di proiezione sono state proposte e sperimentate, verificando che producano miglioramenti nella velocità di convergenza. Si sono inoltre confrontate due evoluzioni del metodo extragradiente: la prima, proposta da Solodov e Tseng, può essere molto conveniente per il problema delle disequazioni variazionali monotone, mentre la seconda, proposta da Solodov e Svaiter è e nota come metodo di proiezione sull'iperpiano, può risolvere anche disequazioni pseudomonotone. Quest'ultimo metodo appare vantaggioso quando l'aggiunta del vincolo di disuguaglianza lineare alla regione ammissibile originaria non aumenta troppo la complessità computazionale delle speciali proiezioni richieste dallo schema.

La valutazione delle prestazioni numeriche dei metodi considerati è stata effettuata mediante una serie di codici costruiti per l'ambiente MatLab che sono reperibili sul sito *http://dm.unife.it/pn2o/software.html.*

Allo scopo di valutare l'efficienza computazionale dei diversi metodi extragradiente per la risoluzione delle disequazioni variazionali, si è costruita una collezione di problemi test noti in letteratura, implementati in MatLab, reperibili sul sito

http://dm.unife.it/pn2o/software.html

Tali problemi test sono stati descritti e classificati nel rapporto tecnico *A MatLab collection of variational inequality problems*, reperibile sul medesimo sito.

Un contributo originale relativo ai metodi di tipo extragradiente è dato dalla generalizzazione di alcuni risultati di convergenza che vengono estesi alla classe delle funzioni pseudomonotone; inoltre è analizzato il comportamento dei parametri di proiezione.

3. – Metodi del punto interno e metodo di Newton generalizzato.

Supponiamo che l'insieme ammissibile C del problema (1) sia definito nel modo seguente:

$$C := \{x \in \Re^n | h(x) = 0, g(x) \geq 0\},$$

dove $h : \Re^n \to \Re^p$ e $g : \Re^n \to \Re^m$.

Estendendo le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker (KKT) alle disequazioni variazionali, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\mu^T g(x) = 0 \quad g(x) \geq 0 \quad \mu \geq 0 \\ &L(x, \lambda, \mu) = 0 \\ &h(x) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

dove $\mu \in \Re^m, \lambda \in \Re^p$ sono i moltiplicatori associati ai vincoli di disuguaglianza e uguaglianza rispettivamente e $L(x, \lambda, \mu) = F(x) - \nabla h(x)\lambda - \nabla g(x)\mu$ è la funzione lagrangiana. Con $\nabla h(x)^T$ e $\nabla g(x)^T$ denotiamo le matrici jacobiane di $h(x)$ e di $g(x)$. Un vettore $(x, \lambda, \mu) \in \Re^{n+p+m}$ che soddisfa (2) è detto punto di Karush-Kuhn-Tucker.

Dopo aver analizzato le strette relazioni fra soluzione della disequazione variazionale e punti di Karush-Kuhn-Tucker, si genera una classe di metodi volti ad individuare i punti di Karush-Kuhn-Tucker per la disequazione variazionale (1).

Le condizioni di KKT (2) possono essere considerate come un sistema di equazioni $\Phi(w) = 0$, dove $\Phi : \Re^{n+p+m} \to \Re^{n+p+m}$ e $w = (x^T, \lambda^T, \mu^T)^T$, con vincoli su alcune variabili, che possiamo risolvere utilizzando uno dei seguenti approcci.

La strategia dei metodi di punto interno [1] consiste nell'introdurre una serie di variabili slack che trasformano i vincoli di disuguaglianza in uguaglianza, mantenendo solo vincoli di positività su alcune variabili e nel risolvere, mediante passi del metodo di Newton, un sistema di equazioni non lineari (sistema perturbato di Karush-Kuhn-Tucker), con restrizioni di segno su alcune variabili.

Il secondo approccio, detto approccio semiregolare, consiste nell'eliminare tutti i vincoli di disuguaglianza introducendo le cosiddette *funzioni di Fischer*, non differenziabili ovunque, i cui zeri soddisfano condizioni di complementarietà. Pertanto il sistema vincolato non lineare, viene trasformato in un sistema non lineare senza vincoli ma non regolare, che viene risolto con un metodo di Newton generalizzato [2]. Sono state stabilite le riformulazioni secondo l'approccio semiregolare e quello del punto interno, analizzando e confrontando le condizioni sufficienti ad ottenere la convergenza dei metodi.

Allo scopo di analizzare l'efficienza dei metodi si sono implementati codici in Fortran 90 relativi ad entrambi gli approcci.

In particolare sia per l'algoritmo semiregolare sia per l'algoritmo del punto interno sono state realizzate due versioni dei codici, il primo risolve il sistema interno con un metodo diretto (approccio esatto) ed il secondo risolve il sistema con un metodo iterativo (approccio inesatto).

La procedura in Fortran utilizzata nel caso di risoluzione con un metodo diretto, è la routine MINOS che esegue la fattorizzazione LU sparsa di una matrice; per quanto riguarda l'approccio inesatto si è utilizzato il metodo LSQR con un precondizionamento destro. È stata scelta la fattorizzazione LU incompleta come precondizionatore.

Nel caso del punto interno la matrice dello jacobiano si può ridurre di dimensione con una tecnica di eliminazione; per questo motivo possiamo applicare la fattorizzazione LU incompleta ad una matrice più piccola mentre questo non è possibile nel caso semiregolare (cioè nella matrice del B-subdifferenziale [2]).

Nel caso semiregolare si sono riscontrati problemi dovuti a una eccessiva richiesta di memoria e di tempo di elaborazione nel calcolare la fattorizzazione LU incompleta per problemi di grandi dimensioni. Si è proposto di superare questo inconveniente usando un precondizionatore che ammette una fattorizzazione a blocchi ottenuta applicando la routine MINOS solo a una sottomatrice del precondizionatore anziché all'intero precondizionatore. Altro risultato originale riguarda il confronto dei due approcci attraverso una serie di risultati numerici su problemi test noti in letteratura.

4. – Conclusioni e sviluppi.

Confrontando i metodi numerici analizzati, possiamo osservare che i metodi con approccio del punto interno e semiregolari richiedono per la convergenza assunzioni sulla regolarità delle funzioni $F \in C^1$ e $h, g \in C^2$. Tali assunzioni non sono richieste nel caso del metodo extragradiente. Inoltre per i metodi del punto interno e semiregolari è necessario costruirsi lo jacobiano (o il B-subdifferenziale). D'altra parte, l'accuratezza ottenuta dai metodi del punto interno e semiregolare è migliore rispetto ai metodi extragradiente. Ulteriori sviluppi futuri riguardano la possibilità di ampliare lo studio dei metodi numerici per risolvere problemi sulle disequazioni quasi-variazionali, sfruttando i risultati ottenuti per i problemi sulle *classiche* disequazioni variazionali.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Bonettini, E. Galligani e V. Ruggiero, *An inexact Newton method combined with Hestenes multipliers' scheme for the solution of Karush-Kuhn-Tucker systems*, Applied Mathematics and Computation, **168(I)** (2005), 651-676.

[2] F. Facchinei, A. Fischer e C. Kanzow, *Inexact Newton methods for semismooth equations with applications to variational inequality problems*, Nonlinear optimization and applications. Proceeding of the 21th workshop, Erice, Italy (1996), 125-139.

[3] E. N. Khobotov, *Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities certain optimization problems*, U.S.S.R. Computational Mathematics and Matematical Physics, **27(5)** (1987), 120-127.

[4] P. Marcotte, *Application of Khobotov's algorithm to variational inequalities and network equilibrium problems*, Information Systems and Operations Research, **29** (1991), 114-122.

Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
e-mail: tntfrc@unife.it
Dottorato in Matematica Computazionale
(sede amministrativa: Padova) - Ciclo XVII
Direttore di Ricerca: Prof. Valeria Ruggiero, Università di Ferrara