BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

MATTEO SILIMBANI

Insiemi parzialmente ordinati e tabelle di Young

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 295–297.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_295_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 295-297

Insiemi parzialmente ordinati e tabelle di Young

MATTEO SILIMBANI

Il legame tra la combinatoria degli insiemi parzialmente e la combinatoria delle Tabelle di Young getta le sue fondamenta su due pilastri: il primo è il ben noto algoritmo di Robinson-Schensted che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra permutazioni e coppie ordinate di tabelle di Young della stessa forma. Questa biiezione fu originariamente introdotta da G. de B. Robinson in un articolo dedicato allo studio della teoria della rappresentazione del gruppo simmetrico , e riformulata indipendentemente da C. Schensted allo scopo di descrivere un metodo per calcolare le cardinalità delle più lunghe sottosequenze crescenti e decrescenti di una data lista di interi. In questo frangente, l'analisi combinatoria si basa su risultati più profondi riguardanti le funzioni simmetriche e la teoria degli invarianti.

Il secondo pilastro è la corrispondenza fondamentale - originariamente scoperta da C. Greene, avvalendosi dei risultati contenuti nel suo lavoro scritto con D.J. Kleitman [4] - che associa un diagramma di Ferrers $sh(P)$ ad ogni insieme parzialmente ordinato finito P. Il numero di caselle contenute nelle prime k righe (risp. colonne) di $sh(P)$ è uguale al massimo numero di elementi contenuti nell'unione di k anticatene (risp. catene) di P. Successivamente, S. Fomin definì una procedura per associare una tabella di Young standard ad ogni insieme parzialmente ordinato finito P dotato di un'estensione lineare, fornendo una regola per riempire il diagramma $sh(P)$ con degli interi positivi.

Questi due pilastri sono intimamente legati, poiché è possibile associare ad ogni permutazione σ un insieme parzialmente ordinato P_σ, le cui catene ed anticatene corrispondono rispettivamente alle sottosequenze decrescenti e crescenti di σ. Più precisamente, P_σ è l'insieme costituito dalle coppie $(i, \sigma(i))$ in cui consideriamo l'ordine incrociato. La forma delle due tabelle di Young (P, Q) associate a σ mediante la corrispondenza di Robinson-Schensted è esattamente $sh(P_\sigma)$. Inoltre, la tabella Q può essere ottenuta applicando l'algoritmo di Fomin all'etichettamento di P_σ ottenuto considerando solo la prima coordinata di ciascun punto, mentre T può essere analogamente ottenuta attraverso le seconde coordinate.

In un ulteriore lavoro [3], Greene fornisce un'interpretazione completamente differente degli interi contenuti nella tabella Q in termini di opportune famiglie di catene di lunghezza assegnata del poset P_σ, a cui dà il nome di k-matching. Più precisamente, egli dimostra che l'unione delle righe di indice non inferiore a k della tabella Q contiene la fonte lessicograficamente minima di un k-matching di taglia massima di P_σ. Nello stesso articolo, Greene suggerisce di generalizzare queste considerazioni al caso degli insiemi parzialemente ordinati provvisti di un etichettamento arbitrario, non necessariamente associati ad una permutazione, proponendo i seguenti problemi:

- "Trovare una procedura analoga all'algoritmo di Robinson-Schensted per gli insiemi parzialmente ordinati che, applicata ad un poset P, produca una tabella di forma $sh(P)$..."
- in tale tabella, "le colonne dalla k-esima all'ultima costituiscono la fonte lessicograficamente minima di un k-matching di taglia massima relativa ad un'opportuna linearizzazione dell'ordine di P."

Nel presente elaborato, proponiamo una regola costruttiva che, partendo da un poset finito etichettato P, produce una tabella di Young standard, inserendo le etichette in ordine crescente, senza richiedere una conoscenza a priori della forma del diagramma di Ferrers $sh(P)$. L'etichetta i viene collocata nella riga di indice k se l'elemento corrispondente all'interno del poset appartiene alla fonte di un opportuno k-matching, ma non a quella di un $(k+1)$-matching. Nel caso particolare di un poset P_σ associato ad una permutazione, l'algoritmo produce esattamente la tabella Q corrispondente a σ mediante la biiezione di Robinson-Schensted. Alla luce di queste considerazioni, la procedura descritta fornisce una dimostrazione algoritmica per entrambe le congetture di Greene sopracitate.

Questo approccio permette di sottolineare la relazione che intercorre tra le proprietà degli insiemi parzialmente ordinati e quelle delle tabelle di Young associate, gettando nuova luce sui risultati di Greene e Fomin.

L'algoritmo citato suggerisce anche il percorso per fornire una dimostrazione intrinseca del ben noto Teorema di Dualità. Greene (e indipendentemente Fomin) formulò tale teorema e ne fornì una dimostrazione indiretta attraverso relazioni tra le cardinalità di alcune famiglie di catene e anticatene di un insieme parzialmente ordinato, dette *ortogonali*. In questo elaborato, si descrive un algoritmo che, partendo da un'unione massimale $\mathscr{C}$ di $h-1$ catene di un insime parzialmente ordinato P, costruisce un'unione massimale $\mathscr{D}$ di h catene ottenute deviando le catene di $\mathscr{C}$ attraverso un opportuno k-matching di P. Tale procedura porta naturalmente ad una dimostrazione costruttiva del Teorema di Dualità.

L'elaborato è organizzato come segue: dopo avere fornito al lettore le nozioni di base necessarie alla comprensione del seguito, viene esibita una rassegna di algoritmi classici sulle tabelle di Young, come la generalizzazione della corrispondenza di Robinson-Schensted alle biparole dovuta a D.E. Knuth e il celebre "jeu de taquin" descritto da M.P. Schützenberger. Successivamente, si introduce la nozione di dimensione di un insieme parzialmente ordinato, riportando alcuni tra i risultati fondamentali su questo argomento dovuti, tra gli altri, a M. Barnabei e F. Bonetti. Vengono successivamente illustrati i prinicipali risultati di Greene e Kleitman sulla connessione tra combinatoria degli insiemi parzialmente ordinati e combinatoria delle tabelle di Young. In seguito vengono descritte e generalizzate le sopracitate procedure originali, oggetto delle pubblicazioni [1] e [2]. Nell'ultimo capitolo della tesi viene illustratata la corrispondenza fra alcune operazioni tra insiemi parzialmente ordinati e operazioni tra tabelle di Young. Questa corrispondenza, descritta in [5], permette di semplificare la determinazione della tabella di Young associata ad un insieme parzialemente ordinato etichettato, attraverso la determinazione della tabella associata ad opportuni sottoposet di P.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barnabei M., Bonetti F. e Silimbani M., *Young tableaux and k-matchings in finite posets*, International J. of Pure and Appl. Math., **16** (2004), 215-226.
[2] Barnabei M., Bonetti F. Silimbani M., *An algorithmic approach to maximal unions of chains in a partially ordered set*, accettato per la pubblicazione su *Pu.M.A.* (2005).
[3] Greene C., *Some Order Theoretic Properties of the Robinson-Schensted Correspondence*, Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, **579** (1977), 114-120.
[4] Greene C. e Kleitman D.J., *The Structure of Sperner k-families*, J. Combin. Theory Ser. A, **20** (1976), 41-68.
[5] Silimbani M., *Generalized labellings of a partially ordered set*, accettato per la pubblicazione su *Appl. Math. Letters* (2005).

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: silimban@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. M. Barnabei