BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FABIO PERRONI

Coomologia orbifold di singolarità ADE

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 279–282.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_279_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 279-282

Coomologia orbifold di singolarità ADE

FABIO PERRONI

1. – Introduzione.

Un *orbifold* $[Y]$ può essere descritto come il dato di uno spazio topologico Y ed un atlante massimale di carte

$$\{(\tilde{U}, G, \chi, U) : U \in \mathcal{U}\},$$

dove $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di Y, $\tilde{U}$ una varietà liscia, G un gruppo finito di diffeomorfismi di $\tilde{U}$. Infine $\chi : \tilde{U} \to U$ è una funzione continua che induce un omeomorfismo $\tilde{U}/G \to U$. Si richiedono inoltre condizioni di compatibilità tra due carte $(\tilde{U}, G, \chi, U)$ ed $(\tilde{U}', G', \chi', U')$ ogni volta che $U \cap U' \neq \emptyset$. Un equivalente nozione di orbifold viene introdotta nello studio di spazi di moduli in geometria algebrica. In questo contesto si parla di *stack algebrico liscio di Deligne-Mumford*.

Dato un orbifold $[Y]$, l'anello di *coomologia orbifold* $H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$ è stato inizialmente definito per orbifolds quasi-complessi [2]. La definizione è stata poi estesa nel caso di orbifolds complessi quozienti globali [3] e per stack algebrici lisci di Deligne-Mumford [1].

L'anello di coomologia orbifold soddisfa proprietà analoghe all'anello di coomologia di varietà liscie. Come spazio vettoriale, $H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$, è somma diretta della coomologia di Y e di quella dei settori twistati. Inoltre la coomologia singolare di Y si immerge come sottoanello in $H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$. I settori twistati sono orbifolds che parametrizzano punti di Y ed automorfismi non banali. Se $U = \tilde{U}/G$ è un aperto di Y ed $y \in U$, un automorfismo di y è un elemento dello stabilizzatore di $\tilde{y}$ in G, dove $\tilde{y} \in \chi^{-1}(y) \subset \tilde{U}$.

L'obiettivo della tesi è di studiare una congettura posta da Ruan [5] che permetterebbe di descrivere l'anello di coomologia di una qualunque risoluzione minimale delle singolarità di Y in termini della coomologia orbifold di $[Y]$. Più precisamente, assumiamo che $[Y]$ sia Gorenstein e $\rho : Z \to Y$ sia una risoluzione minimale (i.e. $\rho^* K_Z \cong K_Z$). Usando invarianti di Gromov-Witten di curve razionali in Z che sono contratte da ρ, è possibile deformare la struttura di anello di $H^*(Z)$ ed ottenere una famiglia di anelli $H^*_\rho(Z)(q_1, ..., q_n)$. $q_1, ..., q_n$ sono parametri di deformazione tali che per $q_1 = ... = q_n = 0$ l'anello che ne risulta è $H^*(Z)$. La congettura di Ruan prevede l'esistenza di un isomorfismo

$$H^*_\rho(Z)(-1, ..., -1) \cong H^*_{\mathrm{orb}}([Y]).$$

Notiamo che se Z ha una struttura simplettica olomorfa, la congettura implica l'esistenza di un isomorfismo di anelli

$$H^*(Z) \cong H^*_{\mathrm{orb}}([Y]).$$

Nel caso di l'orbifold quoziente globale, $Y \cong U/G$, è possibile descrivere invarianti coomologici di una risoluzione minimale Z di Y in termini di Y e della azione del gruppo G. Questo è stato osservato in diversi contesti, citiamo ad esempio la corrispondenza di McKay e l'uguaglianza tra i numeri di Hodge di $[U/G]$ e quelli di Z. L'aspetto innovativo della congettura è il mettere in relazione le strutture di anello.

Una classe importante di esempi utilizzata per studiare la congettura di Ruan è fornita dal prodotto simmetrico $\mathrm{Sym}^r M$ di una superficie algebrica proiettiva M e dalla risoluzione minimale data dallo schema di Hilbert $\mathrm{Hilb}^r M$. In questo contesto la congettura è stata provata in alcuni casi particolari dai lavori di Fantechi B. e Göttsche L., di Uribe B., e di Li W.P., Qin Z. e Wang W. Un'altra famiglia di orbifolds per cui è stata verificata la congettura è quella che si ottiene dal quoziente di uno spazio vettoriale simplettico V per un sottogruppo finito $G \subset Sp(V)$ (Ginzburg V. e Kaledin D., Li W-P. Qin Z. e Wang W., Vasserot E.).

2. – Orbifold con singolarità trasverse ADE.

L'obiettivo della tesi è di studiare la congettura di Ruan nel caso in cui $[Y]$ è un orbifold con singolarità trasverse ADE. Riportiamo di seguito la definizione di tali orbifolds.

DEFINIZIONE 1. – ([4]) *Un orbifold $[Y]$ è detto con singolarità trasverse ADE se Y è una varietà algebrica proiettiva localmente (nella topologia complessa) isomorfa al prodotto di una variatà liscia per una superficie con singolarità di tipo ADE (altrimenti dette Du Val).*

È stato dapprima dimostrato che esiste un'unica risoluzione minimale $\rho : Z \to Y$, generalizzando il caso bidimensionale [4]. Al fine di calcolare la coomologia orbifold, abbiamo inoltre descritto i settori twistati di $[Y]$ come segue. Topologicamente sono rivestimenti non ramificati del luogo singolare $S \subset Y$ e la monodromia di tale rivestimento è data da un morfismo

$$\pi_1(S, y) \to \mathrm{Aut}(\Gamma_G), \tag{1}$$

dove Γ_G è il grafico di McKay del sottogruppo finito $G \subset SL(2, C)$ corrispondente al tipo di singolarità A, D o E. Diremo che l'orbifold $[Y]$ ha monodromia banale se (1) è il morfismo banale.

Nel caso A_n abbiamo calcolato l'anello di coomologia orbifold $H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$ e la famiglia di anelli $H^*(Z)(q_1, ..., q_n)$. Il primo anello è stato calcolato in generale, il secondo sotto alcune ipotesi tecniche su Z. Dall'espressione di $H^*(Z)(q_1, ..., q_n)$ si deduce che la congettura di Ruan deve essere leggermente modificata, infatti se $n \geq 2$ tale anello non è definito per $q_1 = ... = q_n = -1$.

Nel caso A_n e monodromia banale abbiamo proposto la seguente congettura: *esiste un isomorfismo*

$$H^*(Z)(q_1, \ldots, q_n) \cong H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$$

per $q_1 = \ldots = q_n$ *radice primitiva* $(n+1)$*-ma dell'unità.*

La congettura è stata dimostrata per $n = 1$ ed $n = 2$, in entrambi i casi fornendo un isomorfismo esplicito [4].

3. – Verifica della congettura nel caso A_1.

Riportiamo in questa sezione alcuni cenni della prova della congettura per singolarità A_1. In questo caso la congettura da noi proposta coincide con quella di Ruan.

Sia $[Y]$ un orbifold con singolarità trasverse A_1. Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali complessi graduati [4]

$$H^*_{\mathrm{orb}}([Y]) \cong H^*(Y) \oplus H^{*-2}(S)\langle e \rangle, \tag{2}$$

respetto al quale il prodotto orbifold è dato come segue

$$(\delta_1 + a_1 e) \cup_{\mathrm{orb}} (\delta_2 + a_2 e) = \delta_1 \cup \delta_2 + \frac{1}{2} i_*(a_1 \cup a_2) + (i^*(\delta_1) \cup a_2 + a_1 \cup i^*(\delta_2))e,$$

dove $\cup$ denota il prodotto usuale in $H^*(Y)$ o $H^*(S)$, $i : S \to Y$ denota l'immersione del luogo singolare.

In questo caso la risoluzione minimale $\rho : Z \to Y$ è il blow-up di Y in S. Il divisore eccezionale E ha una struttura di fibrato $\pi : E \to S$ con fibra data dalla retta proiettiva complessa. Inoltre l'insieme delle curve razionali che sono contratte da ρ è generato (come sottogruppo di $\mathrm{Ker}(\rho_* : H_2(Z;\mathbb{Z}) \to H_2(Y;\mathbb{Z}))$) da una fibra generica di π. La deformazione di $H^*(Z)$ è descritta come segue:

$$H^*(Z)(q) \cong H^*(Y) \oplus H^{*-2}(S)\langle E \rangle$$

dove $\cong$ denota isomorfismo di spazi vettoriali ed il prodotto è dato da

$$\begin{aligned}(\delta_1 + a_1 E) * (\delta_2 + a_2 E) = &\delta_1 \cup \delta_2 - 2 i_*(a_1 \cup a_2) \\ &+ (i^*(\delta_1) \cup a_2 + a_1 \cup i^*(\delta_2))E \\ &+ \left(2 \frac{1+q}{1-q} R^1 \pi_* N_{E/Z} \cup a_1 \cup a_2\right) E.\end{aligned}$$

Notiamo che se $q = 0$ i due anelli non sono isomorfi in generale, cioè $H^*(Z)$ non è isomorfo ad $H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$. Tuttavia per $q = -1$ gli anelli che si ottengono sono isomorfi, con isomorfismo dato da

$$\begin{aligned} H^*_{\mathrm{orb}}([Y]) &\to H^*(Z)(-1) \\ (\delta, a) &\mapsto \left(\delta, \frac{\sqrt{-1}}{2} a\right). \end{aligned}$$

4. – Il caso A_n, $n \geq 2$.

Anche in questo caso abbiamo calcolato esplicitamente gli anelli $H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$ ed $H^*(Z)(q_1, ..., q_n)$, il primo in generale, il secondo sotto alcune ipotesi su Z. Tuttavia, la famiglia $H^*(Z)(q_1, ..., q_n)$ assume una forma complicata e non si riesce a stabilire da una semplice osservazione (come ad esempio avviene nel caso A_1) quali siano i valori dei parametri $q_1, ..., q_n$ per i quali si ottengono anelli isomorfi. Nel caso A_2 la nostra congettura è stata dimostrata mediante calcoli diretti:

PROPOSIZIONE 1. – ([4]) *Sia $[Y]$ un orbifold con singolarità trasverse A_2 e monodromia banale. Sia $\rho : Z \to Y$ la risoluzione minimale e supponiamo che Z soddisfi alcune ipotesi aggiuntive. Allora, per $q_1 = q_2 = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$ oppure $q_1 = q_2 = \exp(\frac{4}{3}\pi i)$ l'anello $H^*(Z)(q_1, q_2)$ è isomorfo a $H^*_{\mathrm{orb}}([Y])$. Inoltre esiste un unico isomorfismo dato dalla seguente applicazione lineare*

$$\begin{aligned} H^*(Z)(q_1, q_2) &\to H^*_{\mathrm{orb}}([Y]) \\ E_1 &\mapsto ae_1 + be_2 \\ E_2 &\mapsto be_1 + ae_2 \end{aligned} \tag{3}$$

dove $(a, b) = (\sqrt{3}\exp(\frac{7}{6}\pi i), \sqrt{3}\exp(\frac{11}{6}\pi i))$ se $q_1 = q_2 = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$ oppure $(a, b) = (\sqrt{3}\exp(\frac{5}{6}\pi i), \sqrt{3}\exp(\frac{1}{6}\pi i))$ nel secondo caso.

Le maggiori difficoltà incontrate nel lavoro sono nel calcolo degli invarianti di Gromov-Witten di Z. Siamo riusciti in questo utilizzando la proprietà che essi sono invarianti per deformazioni della struttura complessa. Quindi è stato necessario imporre che alcune deformazioni del primo ordine fossero non ostruite, questo è il significato delle ipotesi aggiuntive nell'enunciato della precedente Proposizione. Tuttavia da uno studio della classe fondamentale virtuale che interviene in questo calcolo, siamo quasi riusciti a dimostrare che l'espressione da noi ottenuta per questi invarianti rimane valida in generale. Questo punto sarà oggetto di ulteriori studi. Per maggiori dettagli si veda [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAMOVICH D., GRABER T. e VISTOLI A., *Algebraic orbifold quantum products*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., **310** (2002), 1-24.

[2] CHEN W. e RUAN Y., *A New Cohomology Theory of Orbifold*, Commun. Math. Phys., **248** (2004), 1-31.

[3] FANTECHI B. e GÖTTSCHE L., *Orbifold cohomology for global quotients*, Duke Math. J., **117** (2003), 197-227.

[4] PERRONI F., *Orbifold cohomology of ADE-singularities*, Ph.D. Tesi, preprint, math. AG/0510528.

[5] RUAN Y., *Cohomology Ring of Crepant Resolutions of Orbifolds*, preprint, math. AG/0108195.

Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich
e-mail: fabio.perroni@math.unizh.ch

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: SISSA, Trieste) - Ciclo XVII
Relatori: Prof. Barbara Fantechi (SISSA) e Prof. Lothar Göttsche (ICTP)