Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Luca Lussardi

Risultati di approssimazione per funzionali a discontinuità libera a crescita lineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 251–254.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_251_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 251-254

Risultati di approssimazione per funzionali a discontinuità libera a crescita lineare

LUCA LUSSARDI

1. – Introduzione e formulazione del problema.

Molti problemi variazionali recentemente oggetto di studio (segmentazione e ricostruzione di immagini, crescita di fratture, ...) sono associati a funzionali integrali del tipo

$$F(u) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)dx + \int_{S_u} \vartheta(|u^+ - u^-|)d\mathcal{H}^{n-1},$$

dove $u \in BV(\Omega)$ o $SBV(\Omega)$, essendo S_u l'insieme di discontinuità di u. Problemi variazionali di questo tipo sono detti, seguendo la terminologia introdotta da DeGiorgi, **problemi a discontinuità libera**. Un esempio molto studiato è rappresentato dal funzionale di Mumford-Shah dato da

$$MS(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \gamma\mathcal{H}^{n-1}(S_u), \quad u \in SBV(\Omega).$$

Il problema principale nello studio di funzionali a discontinuità libera è dato dalla presenza di un'energia di tipo superficiale, la quale risulta difficilmente trattabile. Ne segue che si necessita di approssimazioni variazionali mediante approssimanti senza energia di superficie, definiti ad esempio su Spazi di Sobolev. Per il funzionale di Mumford-Shah in [2] è stata proposta, in particolare, la seguente famiglia di approssimanti:

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega} f\left(\varepsilon \fint_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} |\nabla u(y)|^2 dy\right)dx, \quad u \in H^1(\Omega),$$

e $+\infty$ altrimenti in $L^p(\Omega)$, con $f(t) = t \wedge \gamma/2$; il risultato è che F_ε Γ -converge a MS rispetto alla topologia di $L^p(\Omega)$, per $\varepsilon \to 0$. Tenuto conto che il Γ-limite di una successione di funzionali è necessariamente semicontinuo inferiormente, volendo approssimare per Γ-convergenza un funzionale a discontinuità libera a crescita lineare nel gradiente (anzichè superlineare come lo è MS), una forma sufficientemente generale e isotropica (tenuto conto dei modelli ai quali tali funzionali si applicano, vedi [1]) sarà

$$F(u) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)dx + \int_{S_u} \vartheta(|u^+ - u^-|)d\mathcal{H}^{n-1} + c|D^c u|(\Omega), \tag{1}$$

per $u \in BV(\Omega)$, con $\phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ convessa semicontinua inferiormente, con $\phi(0)=0$, $\vartheta\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ subadditiva semicontinua inferiormente con $\vartheta(0)=0$, tali che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\phi(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\vartheta(t)}{t} = c \in (0,+\infty).$$

È da osservare anche che la semicontinuità inferiore di F rispetto alla topologia di $L^1(\Omega)$ combinata con la crescita lineare di ϕ forza la presenza del termine $|D^c u|(\Omega)$.

L'idea per ottenere al limite funzionali del tipo (1) è, nello spirito dell'approssimazione richiamata per MS, quella di studiare il comportamento della successione di approssimanti

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega f_\varepsilon\left(\varepsilon \fint_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} |\nabla u(y)|dy\right)dx, \quad u \in W^{1,1}(\Omega),$$

dove stavolta f_ε è una famiglia di funzioni dipendente dal parametro ε. La necessità della modifica $f \to f_\varepsilon$ è in direzione della speranza di ottenere, al limite, un'energia di volume più generale possibile. Infatti f_ε vuole essere una "modifica" di f soltanto in prossimità di 0, dal momento che è il comportamento di f attorno a 0 che governa, attraverso la Γ-convergenza, il termine di volume che appare nel funzionale (1).

Nelle successive sezioni 2 e 3 verrà descritto il risultato raggiunto in dimensione uno e, rispettivamente, il risultato, un po' meno generale, raggiunto in dimensione n.

2. – Il caso uni-dimensionale.

Sia (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$; consideriamo il funzionale $F : L^1(a,b) \to$ $\to [0,+\infty]$ definito da:

$$F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \phi(|u'(x)|)dx + \sum_{x\in S_u} \vartheta(|u^+(x)-u^-(x)|) + c_0|D^c u|(a,b) & \text{se } u \in GBV(a,b), \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove ϕ è convessa, ϑ è concava, con $\phi(0)=\vartheta(0)=0$, ed esiste $c_0 \in \mathbb{R}$, con $c_0 > 0$, tale che

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\phi(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\vartheta(t)}{t} = c_0.$$

Il risultato principale è costituito da un risultato di approssimazione per F mediante una famiglia $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ di funzionali $L^1(a,b) \to [0,+\infty]$ della forma:

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b f_\varepsilon\left(\varepsilon \fint_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap(a,b)} |u'(y)|dy\right)dx & \text{se } u \in W^{1,1}(a,b), \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{2}$$

dove f_ε è un'opportuna famiglia di funzioni. Semplici euristici ragionamenti suggeriscono che l'addendo "di volume" presente nel Γ-limite dipende dal comportamento che ha attorno all'origine la famiglia di funzioni f_ε; invece la parte che dipende dal salto è governata dal limite puntuale della famiglia f_ε, per $\varepsilon \to 0$. Una possibile famiglia f_ε è data dalla seguente:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon\phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) & \text{se } 0 \leq t \leq t_\varepsilon, \\ \vartheta(t - t_\varepsilon) + \varepsilon\phi\left(\frac{t_\varepsilon}{\varepsilon}\right) & \text{se } t \geq t_\varepsilon, \end{cases}$$

dove $t_\varepsilon \to 0$, e $t_\varepsilon/\varepsilon \to +\infty$. Partendo da questo esempio concreto, è possibile estrarre più generalità e riuscire a trovare ipotesi sulla famiglia f_ε (vedi [3]) che garantiscano la possibilità di dimostrare il seguente Teorema:

TEOREMA 1. – *Sia* $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *dato in* (2), *con* f_ε *data esplicitamente come sopra, oppure come in* [3]. *Allora* (F_ε) Γ*-converge, rispetto alla topologia di* $L^1(a,b)$*, per* $\varepsilon \to 0$*, a* $\mathcal{F}: L^1(a,b) \to [0,+\infty]$ *dato da*

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \phi(|u'(x)|)dx + 2\sum_{x\in S_u} \vartheta\left(\frac{1}{2}|u^+(x) - u^-(x)|\right) + c_0|D^c u|(a,b) & \text{se } u \in GBV(a,b), \\ +\infty & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

3. – Il caso n-dimensionale.

La generalizzazione alla dimensione n di quanto detto in precendenza presenta molte difficoltà; il problema sostanziale è che il metodo classico di slicing utilizzato per ridurre il problema di Γ-convergenza dalla dimensione n alla dimensione uno, non funziona in questo caso, causa la non località dei funzionali approssimanti. Infatti il metodo di slicing si basa sulla riduzione, per sezioni, del funzionale in dimensione n al funzionale in dimensione uno. Attraverso sofisticate considerazioni tecniche si riesce a sfruttare la classica metodologia solamente per il controllo dal basso del termine "di volume" presente nel Γ-limite. Per quanto riguarda il controllo dell'energia di superficie il discorso si fa più complesso, e l'idea di fondo è quella di cercare di caratterizzare la densità di energia superficiale attraverso un argomento di blow-up, ovvero cercando di stimare la quantità:

$$\liminf_{\rho\to 0} \frac{F'(u, B_\rho(x_0))}{\rho^{n-1}}$$

essendo F' il $\Gamma-\liminf$, $x_0 \in S_u$, e $B_\rho(x_0)$ la palla centrata in x_0 e raggio ρ. Tale computazione sposta la questione ad un difficile problema di profilo ottimale, risolto esplicitamente attraverso un'opportuna tecnica di discretizzazione. Va sottolineato che la necessità di risolvere esplicitamente il problema di profilo ottenuto è dettata dal-l'esigenza di recuperare tale soluzione attraverso una maggiorazione per il $\Gamma - \limsup$ ottenuta mediante noti argomenti di densità delle funzioni con salto rettilineo.

Il risultato ottenuto si può riassumere nel seguente Teorema (vedi [4]):

TEOREMA 2. – *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo Lipschitz, e sia $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione continua, non-decrescente, strettamente concava, di classe $C^2(\Omega)$ tale che*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = 1 .$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $F_\varepsilon: L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definito da

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_\Omega f\left(\varepsilon \fint_{B_\varepsilon(x)\cap\Omega} |\nabla u(y)|dy\right)dx & \textit{se } u \in W^{1,1}(\Omega) \\ +\infty & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora la famiglia $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ Γ-converge, rispetto alla topologia di $L^1(\Omega)$, per $\varepsilon \to 0$, al funzionale $\mathcal{F}: L^1(\Omega) \to [0,+\infty]$ dato da

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|dx + \int_{S_u} \vartheta(|u^+(x) - u^-(x)|)d\mathcal{H}^{n-1} + |D^c u|(\Omega) & \textit{se } u \in GBV(\Omega) \\ +\infty & \textit{altrimenti,} \end{cases}$$

essendo

$$\vartheta(s) = 2\int_0^1 f\left(\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} s(\sqrt{1-t^2})^{n-1}\right)dt \qquad (s > 0),$$

dove ω_k denota il volume della palla k-dimensionale in $\mathbb{R}^k$ (con la convenzione $\omega_0 = 1$).

BIBLIOGRAFIA

[1] ALICANDRO R., BRAIDES A. e SHAH J., *Free discontinuity problems involving the L^1-norm of the gradient and their approximation*, Interface and free boundaries, **1** (1999), 17-37

[2] BRAIDES A. e DALMASO G., *Non local approximation of the Mumford-Shah functional*, Calc.Var., **5(1)** (1997), 293-322

[3] LUSSARDI L. e VITALI E., *Non local approximation of free discontinuity functionals with linear growth: the one-dimensional case*, presentata per la pubblicazione.

[4] LUSSARDI L. e VITALI E., *Non local approximation of free discontinuity problems with linear growth*, in corso di stampa su ESAIM-Control, optimisation and Calculus of variations

Dipartimento di Matematica F.Casorati
e-mail: luca.lussardi@unipv.it
Dottorato di ricerca in Matematica e Statistica (sede amministrativa: Pavia) - Ciclo XVII
Direttore della ricerca: Prof. Enrico Vitali