# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Concettina Galati


## Numero di moduli di famiglie di curve piane con nodi e cuspidi


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 243–246.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_243_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 243-246

# Numero di moduli di famiglie di curve piane con nodi e cuspidi

CONCETTINA GALATI

## 1. – Introduzione.

Lo studio di famiglie di curve piane con singolarità assegnate è uno degli argomenti più classici in geometria algebrica. Una curva piana è una sottovarietà proiettiva (possibilmente singolare) di codimensione uno del piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Poiché ogni curva piana di grado $n$ è definita, a meno di moltiplicare per uno scalare, da un unico polinomio omogeneo di grado $n$ in tre variabili, lo schema di Hilbert delle curve piane di grado $n$ coincide con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{\frac{n(n+3)}{2}}$. D'ora in poi porremo $\mathbb{P}^N := \mathbb{P}^{\frac{n(n+3)}{2}}$ ed indicheremo con $[\Gamma] \in \mathbb{P}^N$ il punto corrispondente ad una curva $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$. L'insieme dei punti di $\mathbb{P}^N$ corrispondenti a curve piane irriducibili con solo nodi e cuspidi come singolarità, è un insieme localmente chiuso nella topologia di Zariski (al più vuoto). Indicheremo con $\Sigma^n_{k,d} \subset \mathbb{P}^N$ la sua chiusura nella topologia di Zariski. Queste varietà sono state introdotte all'inizio del secolo scorso da Severi ed Enriques. In particulare, Severi è stato il primo a studiare il caso $k = 0$ e, per questa ragione, le varietà $\Sigma^n_{0,d}$ sono chiamate varietà di Severi. Mentre, quando $k > 0$ le varietà $\Sigma^n_{k,d}$ sono chiamate varietà di Severi-Enriques. È noto che ogni componente irriducibile $\Sigma$ di $\Sigma^n_{k,d}$ ha dimensione maggiore o uguale a $N - d - 2k = 3n + g - 1 - k$, dove $g = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - k - d$ è il genere geometrico di una curva piana di grado $n$ con $d$ nodi e $k$ cuspidi come singolarità. Quando si verifica l'uguaglianza *diciamo che* $\Sigma$ *ha la dimensione aspettata.* Inoltre, è ben noto che *se* $k < 3n$ *ogni componente irriducibile non vuota* $\Sigma$ *di* $\Sigma^n_{k,d}$ *ha dimensione aspettata.* Al contrario, quando $k \geq 3n$, esistono esempi (il primo di essi dovuto a Segre) di componenti irriducibili di $\Sigma^n_{k,d}$ di dimensione maggiore di quella aspettata. Ricordiamo, inoltre, che già Severi agli inizi del secolo scorso aveva dimostrato che $\Sigma^n_{0,d}$ è non vuoto per ogni $d \leq \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ e contiene, al bordo, tutti i punti corrispondenti a curve piane irreducibili di grado $n$ e genere geometrico $g = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - d$. È per questo motivo che, utilizzando una notazione classica, indicheremo $\Sigma^n_{0,d}$ anche con il simbolo $V_{n,g}$. Mentre la dimostrazione dell'esistenza di $V_{n,g}$ è piuttosto elementare, l'irriducibilità di $V_{n,g}$ è rimasta un problema aperto per lungo tempo ed è stata provata da Harris solo nel 1986. Più tardi, usando le stesse tecniche di Harris, Kang ha provato l'irriducibilità di $\Sigma^n_{k,d}$ se $k \leq 3$. Tuttavia, in generale, $\Sigma^n_{k,d}$ è riducibile ed esistono valori di $n$, $d$ e $k$ per i quali $\Sigma^n_{k,d}$ è vuoto. Il primo esempio di famiglia riducibile di curve con nodi e cuspidi, dovuto a Zariski, è costituito dalla famiglia della sestiche con sei cuspidi. $\Sigma^6_{6,0}$ contiene almeno due componenti irriducibili $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$. Il generico elemento di $\Sigma_2$ corrisponde ad una sestica con sei cuspidi non su una conica, mentre $\Sigma_1$ parametrizza la famiglia delle sestiche di equazione del tipo $f_3^2 + f_2^3 = 0$, dove $f_3$ ed $f_2$ sono due polinomi omogenei di grado 3 e 2 rispettivamente. Si verifica che il generico punto di $\Sigma_1$ corrisponde ad una sestica con sei cuspidi su una conica, mentre ogni sestica con sei cuspidi su una conica ha equazione del tipo $f_3^2 + f_2^3 = 0$.

Per una trattazione piu' approfondita dei risultati esposti in questo paragrafo rimandiamo al capitolo 2 di [1], dove illustriamo i risultati classici sulle varietà di Severi-Enriques e sulla teoria delle deformazioni di singolarità piane in genere, fatta eccezione per il paragrafo 6, dove, invece, studiamo lo spazio delle deformazioni di una singolarità piana ordinaria, dimostrando che una singolarità piana ordinaria ordinaria è limite equigenerico di sole singolarità piane ordinarie. I risultati principali di [1], sono infine contenuti nel capitolo 3, dove calcoliamo il numero di moduli di famiglie di curve piane con nodi e cuspidi.

## 2. – Numero di moduli di famiglie di curve piane con nodi e cuspidi.

Sia $\Sigma \subset \Sigma^n_{k,d}$ una componente irriducibile di $\Sigma^n_{k,d}$. Denotiamo con $\Sigma_0$ l'aperto di $\Sigma$ dei punti $[\Gamma] \in \Sigma$ tali che $\Sigma$ è liscia in $[\Gamma]$ e tale che il punto $[\Gamma]$ corrisponde ad una curva piana ridotta e irriducibile di grado $n$ con esattamente $d$ nodi e $k$ cuspidi come singolarità. Poichè la famiglia tautologica $\mathcal{S}_0 \to \Sigma_0$, parametrizzata da $\Sigma_0$, è una famiglia di curve di genere fissato uguale a $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - k - d$, normalizzando lo spazio totale, otteniamo una famiglia $\mathcal{S}'_0 \to \Sigma_0$ di curve liscie di genere $g$. Per le proprietà funtoriali dello spazio dei moduli $M_g$ delle curve liscie di genere $g$, otteniamo una mappa regolare $\Sigma_0 \to M_g$, che associa ad un punto $[\Gamma] \in \Sigma_0$ il punto di $M_g$ corrispondente alla classe di isomorfismo della normalizzazione della curva piana $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$, corrispondente al punto $[\Gamma] \in \Sigma$. Questa mappa si estende ad una mappa razionale

$$\Pi_\Sigma : \Sigma \to M_g.$$

Diciamo che $\Pi_\Sigma$ è la *mappa dei moduli* di $\Sigma$ e poniamo

$$\textit{numero dei moduli di } \Sigma := \dim(\Pi_\Sigma(\Sigma)).$$

Si noti che, quando $\Sigma^n_{k,d}$ è riducibile, due diverse componenti irriducibili di $\Sigma^n_{k,d}$ possono avere diverso numero di moduli. Diciamo che $\Sigma$ ha *moduli generali* se $\Pi_\Sigma$ è dominante. In caso contrario, diciamo che $\Sigma$ ha *moduli speciali* o *numero dei moduli finito*. Si dimostra, (cfr. [2], lemma 2.2) che, se $g \geq 2$ e se $\Sigma$ ha la dimensione aspettata pari a $3n + g - 1 - k$, allora

$$\dim(\Pi_\Sigma(\Sigma)) \leq min(dim(M_g), dim(M_g) + \rho - k), \tag{1}$$

dove $\rho := \rho(2, g, n) = 3n - 2g - 6$ è il numero di Brill-Noether delle serie lineari di grado $n$ e dimensione 2 su una curva liscia di genere $g$. *Diciamo che $\Sigma$ ha numero aspettato di* *moduli se in* (1) *vale l'uguaglianza*. Questo accade in particolare se $k < 3n$. Se $\Sigma$ non ha la dimensione aspettata non sappiamo fornire una limitazione per il numero dei moduli di $\Sigma$ come sopra, anche se non conosciamo esempi di famiglie che non verifichino (1). In ogni caso, da un classico risultato di teoria di Brill-Noether dovuto ad Arbarello e Cornalba, segue che non esistono componenti irriducibili $\Sigma$ di $\Sigma^n_{k,d}$ di dimensione maggiore di quella aspettata e a moduli generali, poiché, se $dim(\Sigma) > 3n + g - 1 - k$ allora $k \geq 3n > \rho$, (ved. proposizione 2.4 di [2]). Torniamo ora al caso in cui $dim(\Sigma) = 3n + g - 1 - k$. Da alcuni classici risultati di teoria di Brill-Noether, quando $\rho$ è positivo, e per un ben noto risultato di Sernesi quando $\rho \leq 0$ (vedi [3]), abbiamo che la varietà di Severi $\Sigma^n_{0,d} = V_{n,g}$ (che è irriducibile), ha numero dei moduli aspettato per ogni $d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Cosa succede se $k > 0$? Nel paragrafo 2.2 di [2], abbiamo raccolto alcuni risultati noti che forniscono condizioni sufficienti affinché $\Sigma$ abbia moduli generali. In [2] e [1] costruiamo esempi di famiglie di curve piane con nodi e cuspidi con numero dei moduli finito ed aspettato. I nostri risultati sono stati in gran parte ottenuti generalizzando risultati e tecniche di [3]. Supponendo $\Sigma$ di dimensione aspettata, troviamo condizioni sufficienti affinché $\Sigma$ abbia numero dei moduli aspettato pari a $3g - 3 + \rho - k$. Se $\Sigma$ verifica tali condizioni allora $\rho \leq 0$. In particolare, dimostriamo il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1. – [[2], Proposizione 4.1 ] *Sia $\Sigma \subset \Sigma^n_{k,d}$, una componente irriducibile di $\Sigma^n_{k,d}$ della dimension aspettata e sia $[\Gamma] \in \Sigma$ un punto generico, corrispondente ad una curva piana $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$. Indichiamo con $\phi : C \to \Gamma$ il morfismo di normalizzazione di $\Gamma$. Sia $H \subset \Gamma$ il divisore tagliato su $\Gamma$ dalla generica retta di $\mathbb{P}^2$ e $K_C$ il divisore canonico di $C$. Supponiamo che:*

1. $h^0(C, \phi^*(H)) = 3$,
2. *la mappa di Brill-Noether*

$$\mu_{o,C} : H^0(C, \phi^*(H)) \otimes H^0(C, K_C - \phi^*(H)) \to H^0(C, K_C)$$

*della coppia $(C, H)$, sia surgettiva.*

*Allora $\Sigma$ possiede il numero aspettato di moduli pari a $3g - 3 + \rho - k$.*

Utilizzando, poi, un procedimento induttivo sul genere geometrico $g$ e sul grado $n$ dimostriamo l'esistenza di famiglie di curve piane che verificano le ipotesi della precedente proposizione. In particolare, dimostriamo che, se $k \leq 6$ e $\rho = 3n - 2g - 6 \leq 0$, allora $\Sigma^n_{k,d}$ ha almeno una componente irriducibile non vuota con numero dei moduli aspettato.

TEOREMA 1. – [[2], Teorema 4.9] *Sia $\Sigma^n_{k,d} \subset \mathbb{P}^{\frac{n(n+3)}{2}}$ la varietà delle curve piane di grado $n \geq 4$ con $k$ cuspidi, $d$ nodi e genere geometrico $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - k - d$. Supponiamo che:*

(2) $$n - 2 \leq g \ \ \textit{equivalentemente} \ \ k + d \leq h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n-4))$$

*e*

$$k \leq 6 + \left[\frac{n-8}{3}\right] \text{ se } 3n - 9 \leq g \text{ e } n \geq 6, \tag{3}$$

$$k \leq 6 \quad \textit{otherwise}. \tag{4}$$

*Allora, utilizzando le stesse notazioni della proposizione (1), $\Sigma^n_{k,d}$ ha almeno una componente irriducibile $\Sigma$ non vuota il cui generico elemento $[\Gamma] \in \Sigma$ corrisponde ad una curva $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ che verifica l'ipotesi (1) e tale che la mappa di Brill-Noether della coppia $(C, H)$, ha rango massimale. In particolare, se $\rho \leq 0$, allora $\Sigma$ possiede il numero dei moduli aspettato pari a $3g - 3 + \rho - k$.*

Il risultato del precedente teorema può essere migliorato. Utilizzando infatti le stesse tecniche usate per dimostrare il teorema 1 abbiamo costruito componenti irriducibili $\Sigma \subset \Sigma^n_{k,d}$ con $k > 6$ e numero di moduli finito, (ved. [2], osservazione 4.5). Come abbiamo già osservato, il precedente teorema fornisce esempi di famiglie di curve piane con nodi e cuspidi con numero di moduli aspettato solo quando $\rho \leq 0$. Quando il numero delle cuspidi è molto piccolo, ci aspettiamo sia possibile provare l'esistenza di componenti irriducibili di $\Sigma^n_{k,d}$ con numero di moduli aspettato per ogni valore di $\rho$. Per esempio, per un risultato di Eisenbud ed Harris nel caso $\rho \geq 2$ (ved. [2], proposizione 2.6) e per il teorema 1 nel caso $\rho \leq 0$, sappiamo che $\Sigma^n_{1,d}$ ha numero dei moduli aspettato per ogni $\rho \neq 1$. Utilizzando un procedimento induttivo sul grado $n$ abbiamo dimostrato che $\Sigma^n_{1,d}$ ha moduli generali se $\rho = 1$, ottenendo che $\Sigma^n_{1,d}$ ha numero dei moduli aspettato per ogni $\rho$ o, equivalentemente, per ogni $d \leq \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$. Infine, abbiamo considerato il caso della famiglia delle sestiche con sei cuspidi $\Sigma^6_{6,0}$. In questo caso $\rho = 18 - 8 - 6 = 4 > 0$ e le ipotesi della proposizione 1 non possono essere verificate. Per la dimostrazione seguente teorema rimandiamo al paragrafo 4 del capitolo 3 di [1].

TEOREMA 2. – *La famiglia delle sestiche con sei cuspidi su una conica $\Sigma_1 \subset \Sigma^6_{6,0}$ ha numero dei moduli aspettato pari a $7 = dim(M_4 - 2)$ ed esiste almeno un'altra componente irriducibile $\Sigma_2$ di $\Sigma^6_{6,0}$ avente numero dei moduli aspettato.*

## BIBLIOGRAFIA

[1] C. GALATI, *Number of moduli of families of plane curves with nodes and cusps*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Tor Vergata (2004-2005).

[2] C. GALATI, *Number of moduli of irreducible families of plane curves with nodes and cusps*, in fase di pubblicazione su Collectanea Mathematica.

[3] E. SERNESI, *On the existence of certain families of curves*, Invent. Math., vol. **75**, no. 1, (1984), 25-57.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi della Calabria
e-mail: galati@mat.unical.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma Tor Vergata) – Ciclo XVI
Relatore di tesi di dottorato: Prof. Ciro Ciliberto, Dipartimento di Matematica
dell'Università di Tor Vergata, Roma