# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Chiara Cinti


## Sui sub-Laplaciani reali e su una classe di operatori ultraparabolici sui gruppi di Lie stratificati


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 235–237.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_235_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 235-237

# Sui sub-Laplaciani reali e su una classe di operatori ultraparabolici sui gruppi di Lie stratificati

CHIARA CINTI

Nella tesi di dottorato abbiamo studiato due classi di operatori differenziali del secondo ordine ipoellittici, rispettivamente di tipo ellittico-degenere e di tipo ultraparabolico, costruiti mediante campi vettoriali invarianti su gruppi di Lie omogenei.

La tesi si divide in due parti relative ai due operatori studiati, ed è costituita di cinque capitoli.

Nella prima parte della tesi abbiamo trattato argomenti di teoria del potenziale per i cosiddetti sub-Laplaciani reali in $\boldsymbol{R}^N$. Essi si scrivono nella forma seguente $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} X_j^2$, dove per ogni $j = 1, \ldots, m$, $X_j$ è un operatore differenziale del primo ordine su $\boldsymbol{R}^N$ a coefficienti di classe $C^\infty$, invariante per le traslazioni a sinistra ed omogeneo di grado uno rispetto alle dilatazioni di un gruppo di Lie omogeneo $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$. Inoltre l'algebra di Lie generata dagli $X_j$ ha rango massimo in ogni punto. Di conseguenza, per un ben noto Teorema di Hörmander, $\mathcal{L}$ è ipoellittico, e possiede una soluzione fondamentale globale di classe $C^\infty$ nel complementare della diagonale.

I risultati del primo capitolo sono stati ottenuti in collaborazione con Andrea Bonfiglioli, e sono contenuti in [1]. Abbiamo provato la seguente formula di rappresentazione di tipo Poisson-Jensen

$$u(x) = \int_{\partial_1 \Omega} u(y)\, d\mu_x^\Omega(y) - \int_{\partial_2 \Omega \cup \Omega} g_\Omega(x, y)\, d\mu_u(y), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

dove $u$ è una funzione $\mathcal{L}$-subarmonica su un intorno della chiusura dell'arbitrario aperto connesso e limitato $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$, $\mu_u$ è la $\mathcal{L}$-misura di Riesz relativa a $u$, $\mu_x^\Omega$ è la misura $\mathcal{L}$-armonica per $\Omega$ in $x$, $g_\Omega$ è la funzione di Green per $\Omega$. Infine $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$ denotano rispettivamente i sottoinsiemi di $\partial\Omega$ dei punti regolari e irregolari per il problema di Dirichlet relativo a $\mathcal{L}$. Questo risultato completa la precedente formula dimostrata da Bonfiglioli e Lanconelli in [3, Theorem 5.1] nell'ipotesi più restrittiva che $\Omega$ sia un aperto $\mathcal{L}$-regolare (quindi $\partial_1\Omega = \partial\Omega$, $\partial_2\Omega = \emptyset$).

L'estensione di (1) ad un arbitrario aperto limitato e connesso $\Omega$ ha richiesto lo sviluppo di una teoria completa della capacità e degli insiemi polari rispetto a $\mathcal{L}$.

Anzitutto abbiamo definito la nozione di $\mathcal{L}$-capacità ed abbiamo ricavato che un insieme $E \subseteq \boldsymbol{R}^N$ ha $\mathcal{L}$-capacità nulla se e solo se esso è polare nel senso usuale del termine, ossia se e solo se esiste una funzione $\mathcal{L}$-subarmonica $u$ in $\boldsymbol{R}^N$ tale che

$E = u^{-1}\{-\infty\}$. In seguito abbiamo studiato le relazioni tra gli insiemi $\mathcal{L}$-polari e il problema di Dirichlet relativo a $\mathcal{L}$ (dopo aver richiamato per completezza il metodo di risoluzione di Perron), ottenendo in particolare che l'insieme dei punti non regolari del bordo è $\mathcal{L}$-polare. Questo risultato ci ha consentito di definire la funzione di Green e la misura $\mathcal{L}$-armonica per ogni aperto limitato e connesso e di ottenere su questi la formula di Poisson-Jensen.

Anche i risultati del secondo capitolo sono stati ottenuti in collaborazione con Andrea Bonfiglioli, e sono stati raccolti in [2]. Abbiamo sviluppato una teoria completa della $\mathcal{L}$-energia di una misura $\mu$ di Radon, ossia abbiamo studiato l'integrale $\int\int \Gamma(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y)$, ove $\Gamma$ denota la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$. Come applicazione, abbiamo provato in un modo diretto e autocontenuto la seguente proprietà di Quasi-Continuità: ogni funzione $\mathcal{L}$-superarmonica è continua se ristretta al complementare di un aperto di $\mathcal{L}$-capacità arbitrariamente piccola. Nel caso classico dell'operatore di Laplace in $\boldsymbol{R}^N$ questa proprietà è stata provata da Cartan. Risultati di Quasi-Continuità di questo tipo esistono nel caso di operatori molto generali, che contengono anche il caso dei sub-Laplaciani. Ciò nonostante, lo scopo del nostro lavoro è stato mostrare che nel caso significativo dei gruppi di Carnot è possibile seguire un approccio completamente diverso, più semplice e diretto, che si basa sulle proprietà della soluzione fondamentale $\Gamma$. Infatti uno strumento fondamentale per lo sviluppo di una teoria di tipo Cartan della $\mathcal{L}$-energia sono gli $\mathcal{L}$-potenziali di misure legate in modo naturale agli operatori integrali di media $\mathcal{M}_r$ e $M_r$ sugli insiemi di livello $B_d(x,r)$ di $\Gamma$. Un risultato cruciale è stato riuscire ad esprimere la $\mathcal{L}$-capacità di un compatto in termini di $\mathcal{L}$-energia.

Nella seconda parte della tesi abbiamo studiato operatori di tipo ultraparabolico in $\boldsymbol{R}^{N+1}$ della forma $L = \sum_{j=1}^{m} X_j^2 + X_0 - \partial_t$, dove per ogni $j = 0, 1, \dots, m$, $X_j$ è un operatore differenziale del primo ordine su $\boldsymbol{R}^N$ a coefficienti di classe $C^\infty$. Esiste un gruppo di Lie omogeneo $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{R}^{N+1}, \circ, d_\lambda)$ tale che $X_1, \dots, X_m, X_0 - \partial_t$ sono invarianti per le traslazioni a sinistra e $X_1, \dots, X_m$ sono $d_\lambda$-omogenei di grado uno, mentre $X_0 - \partial_t$ è $d_\lambda$-omogeneo di grado due. Inoltre, da un'ipotesi di connettività orientata dei punti di $\boldsymbol{R}^{N+1}$ per mezzo di curve $L$-ammissibili, segue che l'algebra di Lie generata da $X_1, \dots, X_m, X_0 - \partial_t$ ha rango massimo in ogni punto e quindi, per il già citato Teorema di Hörmander, anche $L$ è ipoellittico. Questi operatori sono stati introdotti da Kogoj e Lanconelli in [5].

Nel terzo capitolo abbiamo sviluppato per questi operatori $L$ una teoria del potenziale analoga a quella recentemente sviluppata da Bonfiglioli e Lanconelli in [3] per i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot. In particolare, abbiamo caratterizzato le funzioni $L$-armoniche e $L$-subarmoniche in termini di opportuni operatori di media sugli insiemi di livello $\Omega_r(z)$ della soluzione fondamentale $\Gamma$ di $L$. Essi sono una naturale generalizzazione degli operatori di media introdotti da Gauss per il classico operatore di Laplace e molto più tardi estesi all'operatore del calore da Pini, Fulks e Watson. Poi abbiamo studiato gli $L$-potenziali $-\int \Gamma(\zeta^{-1} \circ \cdot)\,d\mu(\zeta)$ di una misura di

Radon $\mu$ ed ottenuto un teorema di rappresentazione di Riesz su aperti limitati per le funzioni $L$-subarmoniche. In seguito è stata provata una formula di tipo Poisson-Jensen che dà di ogni funzione $L$-subarmonica una rappresentazione integrale sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale di $L$, e quindi non è così generale come quella ottenuta nel primo capitolo per i sub-Laplaciani reali. A partire da questa formula di Poisson-Jensen, abbiamo ricavato un'ulteriore formula di rappresentazione, il cui analogo nella teoria classica va sotto il nome di Primo Teorema Fondamentale di Nevanlinna. Questo risultato ci ha permesso di dare una caratterizzazione di tutte e sole le misure di Radon in $\boldsymbol{R}^{N+1}$ che possono essere $L$-misure di Riesz associate a qualche funzione $L$-subarmonica su tutto lo spazio e limitata superiormente. Per tali funzioni abbiamo ottenuto inoltre un teorema di rappresentazione di Riesz globale. Questi risultati sono contenuti nella nota [4], sottoposta ad una rivista scientifica per la pubblicazione.

Nel quarto capitolo abbiamo esteso all'operatore $L$ il principio di Phragmèn-Lindelöf, adattando una tecnica usata da Protter e Weinberger nel caso parabolico classico. Si tratta di un Principio del Massimo su una striscia connessa e illimitata in $\boldsymbol{R}^{N+1}$ per le soluzioni regolari di $Lu \geq 0$ che si mantengono negative o nulle sulla frontiera parabolica di questa striscia e che all'infinito non crescono più velocemente di un esponenziale al quadrato.

Infine, il quinto capitolo è dedicato allo studio del seguente problema di rimozione delle singolarità: data una soluzione di $Lu = 0$ in $D \setminus K$, ove $D$ è un aperto connesso e limitato e $K$ è un compatto, sotto quali condizioni su $K$ si può prolungare $u$ su tutto $D$ in modo che risulti ivi $L$-armonica? Abbiamo risolto questo problema per una particolare sottoclasse di operatori ultraparabolici $L$, che tuttavia è abbastanza ampia da contenere, ad esempio, operatori di tipo Kolmogorov. Abbiamo utilizzato una tecnica che si ispira a quella già usata da Aronson nel 1964 e da Pini nel 1953.

## BIBLIOGRAFIA


[1] BONFIGLIOLI A. e CINTI C., *A Poisson-Jensen type representation formula for subharmonic functions on stratified Lie groups*, Potential Analysis, **22** (2005), 151-169.

[2] BONFIGLIOLI A. e CINTI C., *The theory of energy for sub-Laplacians with an application to quasi-continuity*, Manuscripta Math., **118** (2005), 283-309.

[3] BONFIGLIOLI A. e LANCONELLI E., *Subharmonic functions on Carnot groups*, Math. Ann., **325** (2003), 97-122.

[4] CINTI C., *Sub-solutions and mean-value operators for ultraparabolic equations on Lie groups*, preprint.

[5] KOGOJ A.E. e LANCONELLI E., *An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Mediterr. J. Math., **1** (2004), 51-80.



Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: cinti@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. E. Lanconelli, Università di Bologna