Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Elena Bruni

Programmazione stocastica nonlineare intera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 215–218.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_215_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 215-218

Programmazione stocastica nonlineare intera

MARIA ELENA BRUNI

1. – Introduzione.

La programmazione stocastica si interessa dello studio di problemi di ottimizzazione in cui i dati incerti sono rappresentati tramite variabili aleatorie. Tali modelli sono appropriati quando i dati evolvono nel tempo e le decisioni devono essere prese prima di poter osservare l'incerto flusso dei dati. L'ampia applicabilità dei modelli di programmazione stocastica ha stimolato una considerevole attenzione da parte della comunità scientifica, come testimoniato da numerosi libri ed articoli prodotti negli ultimi anni [1]. Esistono tuttavia, campi della programmazione stocastica poco esplorati che definiscono aree di ricerca particolarmente interessanti. L'oggetto del presente lavoro di tesi è la presentazione di un metodo basato sulla decomposizione per una classe di problemi per cui il terreno di ricerca è ancora vergine. In particolare nella tesi viene proposto un metodo di soluzione per problemi di programmazione stocastica con nonlinearità nella funzione obiettivo e nei vincoli e interezza nelle variabili di decisione. Tale classe di problemi risulta essere particolarmente difficile per la presenza di non convessità indotte nel problema dalla presenza dei vincoli di integrità e nonlinearità sulle variabili. I risultati ottenuti, collezionati su un ventaglio di problemi test di una nuova versione stocastica del ben noto problema del Trim Loss mostrano la validità e l'efficienza dell'algortimo implementato.

2. – L'approccio risolutivo.

Si consideri la classe dei problemi stocastici nonlineari definiti su uno spazio di probabilità discreto $\Omega = 1, .., S$ equipaggiato con una σ-algebra F. Sia ξ una variabile aleatoria definita sullo spazio di probabilità Ω e $\mathrm{P}[\xi = \xi_i] = \pi_i$ la probabilità associata ad ogni scenario. Nel seguito focalizzeremo la nostra attenzione ai problemi stocastici a due stadi nella seguente forma:

$$
\begin{aligned}
& \min f^1(x) + \sum_{s=1}^{S} \pi_s f^2(x, y_s, \xi_s) \\
& g^1(x) = 0 \\
& h^1(x) \leq 0 \\
& h_s^2(x, y_s, \xi_s) = 0 \quad \forall \;\; s = 1, \ldots, S \\
& g_s^2(x, y_s, \xi_s) \leq 0 \quad \forall \; s = 1, \ldots, S \\
& x \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, y_s \in Y_s \quad \forall \;\; s = 1, \ldots, S \\
& g^1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_e} \quad h^1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i} \\
& g_s^2 : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{t_e} \;\; h_s^2 : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{t_i} \quad\;\; s = 1, \ldots S
\end{aligned} \tag{1}
$$

Alcune decisioni (x) sono attuate prima di osservare la realizzazione delle variabili aleatorie (riferito nel seguito come scenario) mentre altre (y) sono dette di ricorso in quanto prese per compensare, alla luce di nuove informazioni resesi disponibili, le azioni di primo stadio. Le funzioni $f^1, f^2, g^1, g^2, h^1, h^2$ sono nonlineari ma non necessariamente convesse. Sulla base della struttura del di tale problema si è sviluppato un metodo risolutivo a due fasi. La prima fase consiste nella decomposizione del problema non convesso a larga scala originale in sottoproblemi mediante uno schema di duplicazione delle variabili di primo stadio. Grazie a questa riformulazione il problema guadagna una struttura angolare a blocchi in cui ad ogni blocco corrisponde uno scenario al costo dell'aggiunta di un ulteriore vincolo lineare nel problema. Tale vincolo detto di nonanticipatività impone che le decisioni di primo stadio vengano prese prescindendo dalla conoscenza di eventi futuri. Mediante tecniche classiche di rilassamento Lagrangiano la separabilità del problema diventa perfetta ma la differenziabilità del problema viene a mancare. Grazie alla struttura del nostro problema si è potuto specializzare il metodo del subgradiente incrementale proposto in [2]. L'aggiornamento dei moltiplicatori avviene incrementalmente e sfrutta la soluzione ottima dei singoli blocchi componenti il problema. Il processamento di tali blocchi non segue uno schema deterministico ma è randomizzato secondo la distribuzione di probabilità degli scenari.

L'analisi della forma del subgradiente del nostro problema ci ha permesso una riduzione della dimensione del vettore dei moltiplicatori duali in fase computazionale.

Lo schema di decomposizione ha notevoli vantaggi, specialmente se applicato a problemi di grandi dimensioni come nel nostro caso. Infatti, il picco di memoria richiesto per generare e leggere il problema deterministico equivalente può essere evitato. Inoltre il problema può essere passato al solver in blocchi di dimensione minore e quindi più facilmente risolvibili.

La seconda fase si basa su uno schema di Branch and Bound in cui i vincoli rilassati nella prima fase vengono rinforzati.

La struttura a due fasi riflette la forma usuale degli algortimi di Ottimizzazione Globale in cui lo spazio di soluzione è partizionato in insiemi più piccoli ed il problema è risolto in ognuno di questi sottoinsiemi. L'ottimalità globale del problema è garantita solo se lo step di bounding genera validi lower bounds del problema nonconvesso. Tale ostacolo è stato affrontato e risolto mediante la soluzione all'ottimo globale dei sottoproblemi generati durante la fase di esplorazione dell'albero.

L'efficienza dello schema risolutivo ha tratto beneficio dalla definizione di nuove regole di warm start e branching anticipato. La finitezza dell'algoritmo è garantita dall'interezza delle variabili di primo stadio su cui si effettua il branch. L'algoritmo implementato in C++ utilizza la liberia di funzioni LINDO API in un framework orientato agli oggetti. Grandi difficoltà sono emerse durante questa fase per la mancanza di uno standard di rappresentazione per problemi stocastici nonlineari ed addirittura per problemi deterministici nonconvessi. La rappresentazione in formato piatto (flat form) usualmente utilizzata nel caso di problemi nonconvessi deterministici risulta inapplicabile nel nostro caso a causa della presenza do un gan numero di variabili e vincoli. Per far fronte a tale mancanza è stato sviluppato un parser che legge il problema in formato LINGO e lo trasforma nella notazione polacca inversa richiesta dal solver globale. Per ulteriori dettagli riguardanti l'implemetazione del metodo, si rimanda il lettore all'articolo [3].

3. – **Formulazione del problema del Trim Loss stocastico.**

Per testare l'efficienza del metodo proposto, è stata formulata una versione stocastica del problema del Trim Loss. Questo è uno dei problemi più studiati nell'ambito della programmazione combinatoria ed ha suscitato interesse per la sua applicabilità a diversi problemi industriali. L'obiettivo del modello è la determinizaione del piano ottimale di taglio di un certo materiale grezzo nel soddisfacimento della domanda dei clienti. In pratica però i parametri associati a tale problema non sono noti con certezza. Ad esempio la domanda può essere assunta stocastica e modellata tramite un vettore di variabili aleatorie. Il problema è formulato con una struttura a due stadi in cui nel primo stadio si decide se attivare uno schema di taglio e nel secondo stadio, una volta sciolta l'incertezza sulla domanda, può essere presa la decisione concernente il numero di ripetizioni di un taglio che devono essere effettuate per soddisfare la domanda. La natura fortemente non convessa del problema previene l'applicabilità efficiente di software commerciali di ottimizzazione globale.

Diversi problemi test sono stati generati in modo casuale. Variando il numero degli scenari fino ad un massimo di 200 siamo stati in grado di risolvere problemi di programmazione stocastica nonlineare intera con più di 3000 vincoli e 1000 variabili in tempi inferiori ai 200 secondi. Per valutare in modo equo le performance dell'algoritmo i tempi di soluzione sono stati comparati con i tempi impiegati dal solver LINDO API applicato al problema deterministico equivalente. Solo in un caso è stato possibile un reale confronto (5 scenari). In tutte le altre istanze il software LINDO API non è stato in grado di trovare in un intervallo temporale di un'ora la soluzione ottima globale del problema. L'efficienza dello schema proposto si basa essenzialmente sulla ben nota dipendenza esponenziale del tempo di soluzione rispetto alla dimensione del problema non convesso da risolvere all'ottimalità.

4. – Conclusioni.

Il contributo del presente lavoro di tesi è rilevante per la sua originalità sia dal punto di vista teorico che implementativo ed applicativo. Dal punto di vista teorico sono state analizzate le proprietà strutturali di suddetti problemi studiando la natura della non convessità dell'insieme ammissibile. Un metodo di soluzione efficiente per tale classe di problemi è stato proposto e le proprietà di convergenza dimostrate. Dal punto di vista metodologico e implementativo, il presente lavoro, rimane uno dei pochissimi contributi nella programmazione stocastica nonlineare intera che eredita la complessità dei problemi stocastici interi e vi aggiunge difficoltà derivanti dalla natura nonlineare delle funzioni di vincolo e della funzione obiettivo. L'algoritmo sviluppato è stato testato su istanze di un problema test non presente in letteratura la cui formulazione sembra essere rappresentativa del fenomeno aleatorio che governa la specifica applicazione considerata.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIRGE JR. e LOUVEAUX FV., *Introduction to Stochastic Programming*, Springer Series on Operations Research, (1997).
[2] BERTSEKAS DP. e NEDIC A., *Incremental Subgradients Methods for Nondifferentiable Optimization*, SIAM Journal on OPtimization, **12** (2001), 109-138.
[3] BRUNI ME., *Solving Mixed Integer Nonlinear Stochastic Problems: a global perspective*, in Global Optimization from Theory to Implementation, **84** (2006), 75-106.

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica Università della Calabria
e-mail: mebruni@deis.unical.it
Dottorato in Ricerca Operativa (sede amministrativa: Calabria) – Ciclo XVI
Direttore di Ricerca: Prof. Conforti, Università della Calabria
Prof. Beraldi, Università della Calabria