Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alan Bannini

Stime asintotiche di integrali oscillatori ed applicazioni ad equazioni alle derivate parziali iperboliche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **9-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2006), n.2 (Fascicolo dedicato alle tesi di dottorato), p. 195–198.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2006_8_9A_2_195_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2006.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. IX-A, Agosto 2006, 195-198

Stime asintotiche di integrali oscillatori ed applicazioni ad equazioni alle derivate parziali iperboliche

Alan Bannini

1. – Introduzione.

In questa tesi affrontiamo lo studio di stime asintotiche di integrali oscillatori ottenuti come trasformate di Fourier inverse di funzioni definite su superfici algebriche con punti singolari isolati. In altre parole intendiamo determinare stime asintotiche per trasformate di Fourier inverse $I(\lambda)$ della forma

$$I(\lambda) = \int_S e^{i\langle z,\, \lambda\rangle} u(z)\, d\sigma(z)\,, \quad \lambda \to \infty$$

dove S è una superficie in $\mathbb{R}^{n+1}$.

La stima di integrali oscillatori ha una lunga tradizione ed interessa molti ambiti, per esempio la teoria analitica dei numeri, dove Van Der Corput e Hlawka hanno utilizzato il metodo della fase stazionaria in un contesto simile al nostro, e lo studio della stabilità di perturbazioni non lineari di operatori iperbolici. Più in generale, la tesi si inserisce nell'ambito dello studio di integrali oscillatori della forma

$$J(\tau) = \int_U e^{i\tau\varphi(x)} f(x)\, dx\,, \quad \tau \to \infty$$

dove τ è un "grande parametro", φ una funzione di fase, f una ampiezza e $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Siamo interessati a stime di integrali oscillatori che, in qualche modo, forniscano delle applicazioni alla stima di soluzioni di equazioni alle derivate parziali, in particolare iperboliche. A partire da un primo lavoro di Jörgens, uno studio sistematico delle stime asintotiche per le soluzioni dell'equazione delle onde viene affrontato per esempio in lavori di Littman, Segal, Von Wahl, Klainerman, Strauss, Shatah, Klainerman-Ponce, Klaus, Racke, Sideris ed altri. Risultati simili sono stati ottenuti per altre equazioni iperboliche come le equazioni di Klein-Gordon e, a volte, per classi più generali di operatori iperbolici a coefficienti costanti (si vedano per esempio Von Wahl, Littman, Costa). Tutti questi lavori hanno in comune il fatto che gli operatori studiati presentano superfici caratteristiche con molteplicità costante, per cui le stime provate sono riconducibili al seguente teorema di Hlawka che stima l'integrale $I(\lambda)$ nel caso in cui la superficie S sia regolare e con curvatura totale ovunque non nulla (si veda [1]).

TEOREMA 1 (Hlawka, 1950). – *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ una superficie compatta di classe $\mathcal{C}^\infty$ con curvatura totale ovunque non nulla. Sia inoltre $u(z) : S \to \mathbb{C}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ definita sulla superficie S. Allora esiste una costante $c > 0$ tale che l'integrale $I(\lambda)$ soddisfa la seguente stima asintotica*

$$|I(\lambda)| \leq c|\lambda|^{-(n-1)/2}.$$

Per quanto riguarda le soluzioni del problema di Cauchy $\square u(t,x) = 0$, $u_{|t=0} = g_0$, $\partial_t u_{|t=0} = g_1$, g_0, g_1 in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$ è noto che la stima asintotica ottimale del decadimento è

$$|u(t,x)| \leq c(1 + |(t,x)|)^{-(n-1)/2}. \tag{1}$$

2. – Risultati.

Il punto di partenza di questa tesi sono due lavori di Liess, [2] e [3]. In questi lavori viene affrontato lo studio della stima asintotica delle soluzioni del sistema della cristal-ottica che presenta varietà caratteristica con molteplicità variabile. Nel caso di cristalli isotropi queste equazioni si possono ricondurre a sistemi equivalenti all'equazione delle onde e così sarebbe naturale aspettarsi che per le soluzioni dei sistemi della cristal-ottica e della cristal-acustica valgano stime del tipo (\refewavea) per $n = 3$. È perciò interessante che, nei lavori citati, le stime ottenute siano leggermente più deboli in quanto il decadimento ottenuto è del tipo

$$|u(t,x)| \leq c(1 + |(t,x)|)^{-1/2},$$

piuttosto che $|u(t,x)| \leq c(1 + |(t,x)|)^{-1}$. Di fatto risulta quindi una perdita di qualità della stima di una dimensione e il problema che ci poniamo in questo contesto è di capire se questa perdita sia legata ai metodi utilizzati o se le stime siano ottimali. Per il risultato principale in [3], in realtà, il problema può essere formulato anche in termini diversi, in quanto nel lavoro vengono utilizzate specifiche ipotesi per ottenere la stima e quindi ci poniamo il problema di capire cosa succede in assenza di tali ipotesi. Vedremo in questa tesi che, in entrambi i casi, i risultati non si possono migliorare in modo significativo. In [2] e [3] viene messo in evidenza come la stima asintotica di integrali oscillatori ottenuti come trasformate di Fourier di densità definite su di una superficie dipenda dalla regolarità e dalla curvatura della superficie stessa. Infatti nelle regioni della superficie caratteristica che presentano punti singolari o punti in cui la curvatura totale si annulla, rispetto alla parte regolare e con curvatura totale non nulla, risulta la perdita di decadimento asintotico della stima. Menzioniamo anche i lavori di Buchwald e Stodt, che riguardano casi particolari di sistemi legati alla cristal-acustica.

In questa tesi intendiamo anche studiare stime asintotiche di trasformate di Fourier di densità definite su una superficie che presenta delle singolarità maggiormente degeneri rispetto a quelle quelle studiate in [2] e [3]. Vogliamo, inoltre, mostrare delle applicazioni di queste stime allo studio del comportamento per tempi lunghi delle soluzioni di operatori differenziali lineari iperbolici a coefficienti costanti con superficie caratteristica di molteplicità variabile, prestando attenzione all'ottimalità delle stime ottenute. Nel capitolo 5 viene infatti presentato un esempio, anche se (probabilmente) non collegato ad un fenomeno fisico reale, dove è semplice effettuare tutti i calcoli (al contrario della teoria della cristal-ottica e della cristal-acustica dove i calcoli presentano difficoltà notevoli) e dove si verifica che la perdita di stima è effettiva. L'esempio considerato cerca di rispecchiare il più possibile le particolarità del sistema della cristal-ottica e infatti riusciamo a dimostrare che stime analoghe a quelle del lavoro [2] non sono migliorabili. L'operatore differenziale che abbiamo studiato è

$$p(D_t, D_{x,y,z}) = (cD_t^2 - \varDelta)^2 - 4a^2(D_x^2 + D_y^2)D_t^2,$$

dove $\varDelta$ è l'operatore di Laplace nelle variabili (x, y, z).

Descriviamo ora brevemente il contenuto della tesi.

Nel *capitolo 1* riportiamo il metodo della fase stazionaria in varie sue manifestazioni. Il "metodo", che rappresenta lo strumento maggiormente utilizzato in questa tesi, viene infatti presentato nella sua forma più classica, cioè quando la funzione di fase ammette punti stazionari isolati e non degeneri. Di una certa importanza risulta anche il lemma di Erdelyi e un lemma di Stein, che abbiamo trovato molto utile. Per esempio nella stima di integrali del tipo $I(\lambda)$ spesso viene effettuato un cambiamento di variabili in nuove coordinate di cui una "radiale" e le restanti "angolari", successivamente viene applicato il metodo della fase stazionaria nelle sole variabili angolari ed infine si applica il lemma di Stein nella variabile radiale dell'integrale oscillatorio restante.

Nel *capitolo 2* è dimostrata una estensione del lemma di Stein che utilizziamo nella stima di integrali del tipo $I(\lambda)$ definiti su una particolare classe di superfici S, per le quali l'applicazione congiunta del metodo della fase stazionaria e successivamente del lemma di Stein non è possibile. In particolare vengono studiate superfici con singolarità deboli ma con curvatura degenere.

Nel *capitolo 3* mostriamo alcuni esempi di stima asintotica di integrali del tipo $I(\lambda)$ attorno a punti isolati di singolarità conica della superficie S. L'interesse di tali esempi consiste nel fatto che i punti di singolarità conica della "slowness surface" dei sistemi della cristal-ottica e della cristal-acustica sono riconducibili al caso considerato nella seguente proposizione dimostrata nella tesi.

PROPOSIZIONE 1. – *Siano g_1, g_2 due funzione di classe C^∞ definite in un intorno U di $0 \in \mathbb{R}^2$ tali che $g_j(x, y) = O(|(x, y)|^3)$ per $(x, y) \to 0$ per $j = 1, 2$. Consideriamo*

$$g(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + g_2(x, y) + d\sqrt{a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + g_1(x, y)}$$

per qualche $d \in \mathbb{R}$. Infine, assumiamo che le forme quadratiche $(x, y) \to ax^2 + 2bxy + cy^2$ e $(x, y) \to a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2$ siano definite positive. Denotiamo *con* $S = \{(x, y, g(x, y)); (x, y) \in U\}$ *il grafico di* g *in* $\mathbb{R}^3$ *e con* $d\sigma$ *l'elemento di superficie di* S. *In particolare* $0 \in S$. *Se il supporto della funzione* $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ *è sufficientemente vicino a* 0 *e se* $d \in \mathbb{R}$ *è sufficientemente piccolo, allora*

$$I(\xi, \eta, \tau) = \int_S e^{i\tau g(x, y) + ix\xi + iy\eta} f(z)\, d\sigma(z)$$

soddisfa la stima

$$|I(\xi, \eta, \tau)| \leq \tilde{c}(1 + |(\xi, \eta, \tau)|)^{-1}$$

dove $\tilde{c} > 0$ *è una costante che dipende solo da* f.

Nel *capitolo 4* si riprende un risultato del lavoro [3] in situazioni in cui non tutte le ipotesi fissate nel lavoro sono soddisfatte. Si verifica che rispetto al risultato principale in [3] avviene una perdita di stima se si rinuncia a tali ipotesi. In particolare vengono studiate superfici con singolarità uniplanari.

Nel *capitolo 5* sono proposte delle applicazioni agli operatori differenziali iperbolici, in particolare al sistema della cristal-ottica e della cristal-acustica. Si studia inoltre l'ottimalità della stima asintotica della soluzione del problema della cristal-ottica lungo i cerchi di Hamilton, dove la curvatura totale si annulla.

Nel *capitolo 6*, infine, discutiamo brevemente ulteriori due applicazioni: una riguarda la teoria analitica dei numeri e fa riferimento alla stima del numero di "gridpoints" che sono contenuti in tA per $t \to \infty$ dove A è un insieme convesso in $\mathbb{R}^n$ che contiene l'origine, l'altra riguarda la stima della "counting function" per operatori differenziali ellittici.

3. – Sviluppi.

Si ritiene opportuno segnalare che ulteriori sviluppi di alcuni argomenti presentati in questa tesi sono dimostrati nel lavoro [4] in corso di pubblicazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] HLAWKA E., *Über Integrale auf konvexen Körpern, I*, Monatsh. Math., **54** (1950), 1-36.
[2] LIESS O., *Decay estimates for the solutions of the system of crystal optics*, Asymptotic Analysis, **4** (1991), 1-95.
[3] LIESS O., *Estimates for Fourier transforms of surface-carried densities on surfaces with singular points*, Asymptotic Analysis, **37** (2004), 329-363.
[4] BANNINI A. e LIESS O., *Estimates for Fourier transforms of surface carried densities on surfaces with singular points, II*, Annali dell'Università di Ferrara Sez. VII (in corso di pubblicazione)

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: bannini@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) – Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Otto Edwin Liess, Università di Bologna