Bollettino Unione Matematica Italiana

Andrea Malchiodi

Costruzione di spike-layers multidimensionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-B** (2005), n.3, p. 615–628.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_3_615_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
(8) 8-B (2005), 615-628

Costruzione di spike-layers multidimensionali.

ANDREA MALCHIODI (*)

Summary. – *We study positive solutions of the equation* $-\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p$ *in* Ω, *where* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p > 1$ *and* ε *is a positive small parameter. Usually we put Neumann boundary conditions. When* ε *goes to zero, we prove the existence of solutions which concentrate on curves or varietis.*

Sunto. – *Si studiano soluzioni positive dell'equazione* $-\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p$ *in* Ω, *dove* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p > 1$ *ed* ε *è un piccolo parametro positivo. Si impongono in genere condizioni al bordo di Neumann. Quando* ε *tende a zero, dimostriamo esistenza di soluzioni che si concentrano su curve o varietà.*

1. – Introduzione.

Si dimostrano nuovi fenomeni di concentrazione per il seguente problema ellittico con perturbazione singolare

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega , \\ u > 0 & \text{in } \Omega , \end{cases}$$

dove Ω è un dominio limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ν è la normale (interna) al bordo, p è maggiore di 1 ed $\varepsilon > 0$ è un parametro piccolo.

Il problema (P_ε) è motivato dallo studio di strutture create da alcuni sistemi di reazione-diffusione, che modellizano esperimenti di chimica o biologia.

Richiamiamo innanzi tutto il seguente risultato di Matano e Casten-Hol-

(*) Comunicazione presentata a Milano in occasione del XVII Congresso U.M.I.

land, [3], [16]: sia u una soluzione (linearmente) *stabile* dell'equazione

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) & \text{in } \Omega\ ; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega\ . \end{cases}$$

Allora, se Ω è convesso, u deve essere *costante*. D'altro canto, come osservato inizialmente da Turing, [21], se si considera un *sistema* di equazioni di reazione-diffusione, la situazione può cambiare drasticamente. In particolare, quando i coefficienti di diffusione dei reagenti sono molto diversi tra loro, si osserva la formazione di una vasta gamma di strutture che comprende punti, linee, curve, nido d'ape e perfino frattali.

Un esempio particolarmente studiato è il seguente modello introdotto nel 1972 da Gierer and Meinhardt, [8], per descrivere esperimenti di rigenerazione sull'*Hydra*

$$(GM) \qquad \begin{cases} \mathcal{U}_t = d_1 \Delta\, \mathcal{U} - \mathcal{U} + \dfrac{\mathcal{U}^p}{\mathcal{V}^q} & \text{in } \Omega \times (0,\ +\infty), \\ \mathcal{V}_t = d_2 \Delta\, \mathcal{V} - \mathcal{V} + \dfrac{\mathcal{U}^r}{\mathcal{V}^s} & \text{in } \Omega \times (0,\ +\infty), \\ \dfrac{\partial\, \mathcal{U}}{\partial \nu} = \dfrac{\partial\, \mathcal{V}}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\ +\infty), \end{cases}$$

Le funzioni $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ rappresentano rispettivamente le densità di un attivtore chimico (che favorisce la rigenerazione) a lenta diffusione e un inibitore a diffusione rapida. Quindi si assume che $d_1 \ll 1$ e che $d_2 \gg 1$. I numeri p, q, r, s sono non-negativi e soddisfano le seguenti disuguaglianze

$$0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}\,.$$

Nel caso statico di (GM) e nel limite $d_2 \to +\infty$, considerando la seconda equazione si vede che $\mathcal{V}$ è pressochè armonica, e poichè soddisfa la condizione di Neumann al bordo, $\mathcal{V}$ deve essere vicina ad una costante. Quindi l'equazione significativa in (GM) è la prima, e il sistema viene descritto dall'equazione scalare (P_ε), di veda il survey [17] per i dettagli. In particolare quando ε tende a zero, che corrisponde al caso $d_1 \ll 1$, ci si aspetta che le soluzioni diventino fortemente piccate vicino a punti o in generale insiemi di Ω.

Molti lavori sono stati dedicati al problema (P_ε), per capire dove la concentrazione avviene e quale sia il profilo delle soluzioni. Numerosi contributi, a partire dai lavori [12], [18], [19], sono stati dati nel caso in cui $p < \dfrac{n+2}{n-2}$, e si è provato che già la struttura delle soluzioni che si concentrano su uno o più punti di $\overline{\Omega}$, dette *spike-layers*, è molto ricca. Ad esempio uno dei risultati più generali, dovuto a Gui e Wei, [9], afferma che dati due interi arbitrari l_1 and l_2, esistono soluzioni che hanno l_1 picchi sul bordo di Ω e l_2 picchi nel suo interno. In linea di massima, la concentrazione sul bordo avviene nei punti critici della curvatura media mentre la concentrazione all'interno nei punti critici della distanza dal bordo. Le tecniche di dimostrazione sono basate soprattutto su riduzioni di Lyapunov-Schmidt, oppure su metodi di minimax o penalizzazione.

Per l'analogo problema di Dirichlet e per l'equazione di Schrödinger non lineare (onde stazionarie), che riprenderemo in seguito, valgono risultati analoghi. Si vedano per esempio [7], [11] e le referenze in essi contenute.

Si è però da subito congetturato, si veda [17], che (P_ε) ammetta anche soluzioni che si concentrano su insiemi k-dimensionali, per ogni intero $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Solo recentemente ci sono stati risultati di carattere generale in questa direzione, che saranno descritti in questa nota. In collaborazione con M. Montenegro la congettura è stata dimostrata in [13], [14] quando $k = n-1$, prima nel caso bidimensionale, e poi in quello generale. Il risulatato è il seguente.

TEOREMA 1. – *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e regolare, e sia $p > 1$. Allora esiste una successione $\varepsilon_j \to 0$ e una successione u_{ε_j} di soluzionni di (P_{ε_j}) con le proprietà seguenti*

i) *u_{ε_j} si concentra su $\partial\Omega$ per $j \to +\infty$, vale a dire per ogni $r > 0$ si ha $\int_{\Omega^r} (\varepsilon_j^2 |\nabla u_{\varepsilon_j}|^2 + u_{\varepsilon_j}^2) \to 0$ per $j \to +\infty$, dove $\Omega^r = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$;*

ii) *se $x_0 \in \partial\Omega$ e se ν_0 denota la normale interna a $\partial\Omega$ in x_0, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulta*

$$u_{\varepsilon_j}(\varepsilon_j(x - x_0)) \to w_0(x \cdot \nu_0) \quad \text{in } C^k_{\mathrm{loc}}(V_0),$$

dove $V_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \nu_0 > 0\}$, e dove w_0 è la soluzione del problema unidimensionale

$$\begin{cases} -v'' + v = v^p & \text{in } \mathbb{R}_+, \\ v'(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

OSSERVAZIONI. – (a) Si noti che nel teorema non si assumono condizioni sull'esponente p all'infuori di $p > 1$. Questo include anche il caso *superitico* diversamente dalle spikes ordinarie, per l'esistenza delle quali l'ipotesi $p < \dfrac{n+2}{n-2}$ è una condizione necessaria, si veda [4]. La differenza è dovuta al fatto che il profilo delle soluzioni è unidimensionale, e infatti per il problema limite (1) non esiste un esponente critico.

(b) La scelta di una successione *specifica* ε_j è fondamentale per il nostro approccio, e non è usata per ottenere compattezza. Serve invece per ottenere l'invartibilità dell'equazione linearizzata in opportune soluzioni approssimate $\tilde{u}_{\varepsilon_j}$. Questa invertibilità è falsa in generale, e ci si aspetta che genericamente la concentrazione lungo una varietà k dimensionale non possa avvenire per valori arbitrari (e piccoli) di ε mantenendo lo stesso profilo, come nel caso di u_{ε_j}.

(c) Per construzione, l'energia di u_{ε_j} è molto grande se paragonata a quella delle spike-layers ordinarie. Inoltre l'indice di Morse di u_{ε_j} tende a $+\infty$ quando $\varepsilon_j \to 0$. Questa è la ragione principale della mancanza di invertibilità dell'operatore linearizzato per alcuni valori di ε. Il fenomeno va anche messo in relazione con un risultato di N.Dancer, si veda [5], dove si dimostra che ogni famiglia di soluzioni di (P_ε) con indice di Morse uniformemente limitato quando $\varepsilon \to 0$ si concentra in un numero finito di punti.

(d) La continua variazione dell'indice di Morse impedisce l'uso dei classici metodi di minimax o delle riduzioni finito-dimensionali. Nonostante ciò, sotto ipotesi di simmetria, è ancora possiblie applicare queste tecniche lavorando in spazi di funzioni simmetriche. Si vedano ad esempio i risultati in [1], [2], [6], [15], [20]. Nell'ultima sezione discuteremo alcuni di essi.

La dimostrazione del Teorema 1 è basata su argomenti di inversione locale. Il primo passo consiste nel torvare una buona soluzione approssimata. Poi si studiano le proprietà spettrali (e in particolare l'invertibilità) dell'equazione linearizzata, il che richiede un'analisi piuttosto raffinata. La difficoltà principale sta nel fatto che lo spettro tende a riempire densamente ogni piccolo intorno di zero sulla retta reale. Ottenuta l'invertibilità, si usa il teorema delle contrazioni in spazi funzonali opportuni.

La prossima sezione contiene uno schema della dimostrazione del Teorema 1, i cui dettagli di trovano nei lavori [13], [14]. L'ultima sezione invece contiene alcuni risultati nel caso di simmetria radiale, ottenuti in [1], [2], [15].

2. – Schema della dimostrazione.

Quando l'esponente p è critico o sottocritico, le soluzioni del problema (P_ε) di classe H^1 si possono trovare come punti crtici del funzionale

$$(2) \quad I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + u^2)\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx, \qquad u \in H^1(\Omega),$$

usando la seguente norma

$$\|u\|^2 = \int_\Omega (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + u^2)\, dx\,, \qquad u \in H^1(\Omega)\,.$$

È utile richiamare alcuni risultati standard che riguardano il problema (1). È ben noto che (1) ammette una sola soluzione positiva in $H^1(\mathbb{R}_+)$, che denotiamo con $w_0(r)$, e che soddisfa le seguenti proprietà

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} w_0'(r) < 0\,, & \text{per ogni } r > 0\,, \\ \lim\limits_{r \to \infty} e^r w_0(r) = \alpha_p > 0, & \lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{w_0'(r)}{w_0(r)} = -1\,, \end{cases}$$

dove α_p è una costante che dipende solo da p. Inoltre, riguardo alla linearizzazione di (1), vale il risultato seguente.

LEMMA 1. – *Sia w_0 come sopra, e data $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ si consideri il problema*

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} -v'' + v - p w_0^{p-1} v = f & \text{in } \mathbb{R}_+\,, \\ v'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Allora (4) *ammette un'unica soluzione v in $H^1(\mathbb{R}_+)$, che soddisfa*

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

In virtù di questo Lemma, definiamo l'operatore $L : L^2(\mathbb{R}_+) \to H^1(\mathbb{R}_+)$ che associa ad f l'unica soluzione del problema (4).

2.1. *Soluzioni approssimate.*

Per trovare soluzioni approssimate di (P_ε), cioè funzioni $\tilde{u}_\varepsilon$ per cui $\|I_\varepsilon'(\tilde{u}_\varepsilon)\|$ è piccola, è conveniente introdurre alcune coordinate locali vicino al bordo di Ω. Per $x' \in \partial\Omega$ e per $x_n \in [0, \delta]$, dove δ è piccolo, definiamo

$$\Gamma_\varepsilon(x', x_n) = x' + x_n \nu(x')\,.$$

Si noti che questa trasformazione di coordinate non è lineare, quindi i coefficienti della metrica nelle nuove variabili dipendono da ε. Denotiamo con $g_{ij} = g_{ij}(\varepsilon)$ i coefficienti del tensore metrico, e con g^{ij} i coefficienti della matrice inversa. Le soluzioni approssimate si troveranno scrivendo l'equazione (P_ε) nelle nuove coordinate e usando uno sviluppo formale in potenze di ε. Più precisamente, ricordiamo che in un sistema di coordinate generico il Laplaciano assume la forma

$$\Delta_g u = -\sum_{ij} g^{ij} u_{ij} + \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \partial_i (g^{ij} \sqrt{\det g})\, u_j .$$

Cercheremo una soluzione approssimata del tipo

$$u_{k,\varepsilon} = w_0(x'/\varepsilon) + \varepsilon w_1(x', x'/\varepsilon) + \dots + \varepsilon^k w_k(x', x'/\varepsilon) + o(\varepsilon^k), \tag{5}$$

dove k è un intero che sarà fissato in seguito. Le funzioni $w_1, \dots, w_k$ si determinano per ricorrenza mediante un'espansione formale di (P_ε) sulla funzione $u_{k,\varepsilon}$. Ad esempio, sviluppando (P_ε) al primo ordine in ε, si vede che la funzione w_1 soddisfa l'equazione

$$Lw_1(x', \cdot) = H(x')\, w_0'(\cdot), \qquad \text{per ogni } x' \in \partial\Omega ,$$

dove $H(x')$ è la curvatura media di $\partial\Omega$ in x', e L è l'operatore definito in precedenza. Notiamo come la geometria del dominio giochi un ruolo fondamentale nel determinare le proprietà delle soluzioni. In maniera analoga, dal termine i-esimo dello sviluppo di (P_ε) si vede che la funzione w_i, con $i \geq 2$, soddisfa un'equazione del tipo

$$Lw_i(x', \cdot) = F_i(x', \cdot, p, w_1, \dots, w_{i-1}) \quad \text{per ogni } x' \in \partial\Omega,$$

dove la dipendenza di F_i dalle funzioni w_j, $j = 1, \dots, i-1$, può coinvolgerne anche le derivate.

Questi sviluppi, di carattere formale, possono essere giustificati rigorosamente, e si può scegliere una solutione approssimata $\tilde{u}_\varepsilon$ nella forma (5) moltiplicandola per una opportuna funzione cut-off nella variabile x_n. Si ottiene in questo modo il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 1. – *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una funzione $\tilde{u}_\varepsilon = \tilde{u}_{k,\varepsilon}$: $\Omega \to \mathbb{R}$ che soddisfa le proprietà seguenti*

$$\|I_\varepsilon'(\tilde{u}_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_k \varepsilon^{k+1-\frac{n-1}{2}}; \qquad \tilde{u}_\varepsilon \geq 0 \quad in\ \Omega; \qquad \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad su\ \partial\Omega , \tag{6}$$

dove C_k dipende solo da Ω, p e k.

2.2. *Studio dell'operatore linearizzato.*

Studiamo ora il differenziale secondo di I_ε in $\tilde{u}_\varepsilon$. Questo è dato dalla seguente formula

$$I_\varepsilon''(\tilde{u}_\varepsilon)[u, v] = \int_\Omega (\varepsilon^2 \nabla u \cdot \nabla v + uv - p\tilde{u}_\varepsilon^{p-1} uv)\, dx, \qquad u, v \in H^1(\Omega).$$

Lo scopo è di dimostrare che per una opportuna successione $\varepsilon_j \to 0$ l'operatore

$I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$ è invertibile, e che l'inverso soddisfa una limitazione quantificabile in ε.

Per un ε fissato, usando in un primo momento stime di confronto non si riesce a studiare lo spettro di $I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$ con sufficiente precisione, poichè si ottengono errori di ordine ε mentre la distanza media di due autovalori consecutivi vicini a zero è di ordine ε^n, si vedano le formule (10) e (11). L'idea è dunque di considerare gli autovalori come funzioni di ε, e di studiarne il comportamento al variare del parametro. Richiamiamo il seguente risultato dovuto a T. Kato, si veda [10].

PROPOSIZIONE 2. – *Sia $T(\chi)$ una famiglia di operatori da uno spazio di Hilbert H in sè, dipendente in maniera differenziabile da un parametro χ che appartiene ad un intorno di zero. Sia $T(0)$ un operatore autoaggiunto della forma Identità-compatto*, e sia $\zeta(0) = \zeta_0 \neq 1$ un autovalore di $T(0)$. Allora l'autovalore $\zeta(\chi)$ è differenziabile in 0 rispetto a χ. La derivata di ζ (che può essere una funzione a valori multipli) è data da $\dfrac{\partial \zeta}{\partial \chi} = \left\{ \textit{autovalori di } P_{\zeta_0} \circ \dfrac{\partial T}{\partial \chi}(0) \circ P_{\zeta_0} \right\}$, *dove $P_{\zeta_0}: H \to H_{\zeta_0}$ è la proiezione sull'autospazio H_{ζ_0} di $T(0)$ corrispondente all'autovalore ζ_0.*

Notiamo che per applicare questo risultato sono necessarie informazioni sull'autospazio H_{ζ_0}. Per ottenerle nel caso in questione, decomponiamo un'autofunzione generica v di $I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$ in serie di Fourier nel modo seguente (usiamo ancora le coordinate x', x_n introdotte sopra)

$$v(x', x_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x') \, \hat{v}_i(x_n), \tag{7}$$

dove le φ_i sono autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami su $\partial\Omega$, cioè soddisfano l'equazione

$$-\Delta_{x'} \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad \text{su } \partial\Omega; \qquad 0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \to +\infty .$$

Usando la formula di Weyl si ha la seguente stima asintotica

$$\lambda_i \sim i^{\frac{2}{n-1}} \qquad \text{per } i \to +\infty . \tag{8}$$

Vogliamo ora mettere in relazione gli autovalori λ_i (e le autofunzioni φ_i) con gli autovalori e le autofunzioni di $I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$. Per far questo si deve considerare il seguente problema agli autovalori. Sia w_0 come sopra e sia $\alpha > 0$. Sia μ_α il primo autovalore (che risulta essere semplice) del problema

$$\begin{cases} -v'' + (1+\alpha)\, v - p w_0^{p-1} v = \mu_\alpha(-v'' + v); & \text{in } \mathbb{R}_+ ; \\ v'(0) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

con l'autofunzione corrispondente v_α. Allora, usando fondamentalmente una separazione di variabili, si ottiene che funzioni della forma

$$\Phi_i^\varepsilon(x) \sim \varphi_i(x')\, v_{\varepsilon^2\lambda_i}(x_n/\varepsilon)$$

soddisfano l'equazione agli autovalori approssimata

$$I_\varepsilon''(\tilde{u}_\varepsilon)\,\Phi_i^\varepsilon = \mu_{\varepsilon^2\lambda_i}\Phi_i^\varepsilon + O(\varepsilon)\,. \tag{10}$$

Si può anche dimostrare, usando la (8), che gli autovalori $\mu_{\varepsilon^2\lambda_j}$ si comportano *qualitativamente* nel modo seguente

$$\mu_{j,\varepsilon} \sim -(p-1) + \varepsilon^2 j^{\frac{2}{n-1}} + O(\varepsilon) \qquad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo e } j \text{ grande}\,. \tag{11}$$

Viceversa, scrivendo le funzioni $\hat{v}_i$ in (7) come combinazione lineare di $v_{\varepsilon^2\lambda_i}$ e del suo ortogonale (in una opportuna norma dipendente da i), si dimostra che se

$$I_\varepsilon''(\tilde{u}_\varepsilon)\,v = \lambda v \qquad \text{con } \lambda \sim 0\,,$$

allora v è della forma seguente

$$v = \sum_{j\in J}\beta_j\Phi_\varepsilon^j + o(1), \qquad \text{con} \qquad \mu_{\varepsilon^2\lambda_j} \sim 0 \ \text{ per ogni } j \in J,$$

dove $o(1) \to$ per $\varepsilon \to 0$, e dove $(\beta_j)_j$ sono coefficienti reali. A questo punto, avendo caratterizzato gli autospazi di $I_\varepsilon''(\tilde{u}_\varepsilon)$ corrispondenti ad autovalori vicini a zero, si può applicare la Proposizione 2 e si ottiene il seguente risultato.

LEMMA 2. – *Sia τ un numero positivo sufficientemente piccolo. Allora esiste una funzione positiva e continua $\tilde{F}$ tale che, se λ è un autovalore di $I_\varepsilon''(\tilde{u}_\varepsilon)$, si ha*

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\big(\tilde{F}(\lambda) + o(1)\big),$$

dove $o(1) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

Si ragiona poi nel seguente modo. Dalla formula asintotica per $\mu_{\varepsilon^2\lambda_i}$ in (11) si trovano in $[-\tau, \tau]$ degli intervalli dove non ci sono autovalori di $I_\varepsilon''(\tilde{u}_\varepsilon)$. La loro posizione, data la scarsa accuratezza di (11), non si può stimare con precisione. Però, variando il valore di ε opportunamente, si possono portare questi intervalli vicino a zero. Usando il Lemma 3 si vede inoltre che la loro ampiezza non cambia in maniera apprezzabile per piccole variazioni di ε. Si ottiene dunque il seguente risultato di invertibilità.

PROPOSIZIONE 3. – *Sia $\tilde{u}_\varepsilon$ data dalla Proposizione* 1. *Allora per una opportuna successione $\varepsilon_j \to 0$, l'operatore $I_{\varepsilon_j}''(\tilde{u}_{\varepsilon_j}) : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ è invertibile e il* *suo inverso soddisfa la stima*

$$\|I''_{\varepsilon_j}(\tilde{u}_{\varepsilon_j})^{-1}\| \leqslant \frac{C}{\varepsilon_j^{n-1}} \qquad \textit{per ogni } j \in \mathbb{N}\,.$$

OSSERVAZIONE. – Seguendo la dimostrazione precedente, si può dimostrare che l'insieme dei valori di ε per cui $I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$ è invertibile (e per i quali il nostro metodo produce soluzioni di (P_ε)) non è solo una successione, ma ha una densità che in misura converge a 1 in intorni destri di zero via via più piccoli.

2.3. *Esistenza di un punto fisso.*

Sia $(\varepsilon_j)_j$ data dalla Proposizione 3. Per semplicità, scriveremo ora solo ε al posto di ε_j. Assumiamo per il momento $p \leqslant \dfrac{n+2}{n-2}$. A questo punto è sufficiente applicare il teorema delle contrazioni, cercando una soluzione u_ε della forma

$$u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon + w\,, \qquad w \in H^1(\Omega)\,.$$

Poichè $I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)$ è invertibile (per $\varepsilon = \varepsilon_j$), è lecito scrivere

$$I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon + w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = -\big(I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\big)^{-1}\big[I'_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) + G(w)\big]\,, \tag{12}$$

dove

$$G(w) = I'_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon + w) - I'_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) - I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)[w]\,.$$

Notiamo che

$$G(w)[v] = -\int_\Omega \big[(\tilde{u}_\varepsilon + w)^p - \tilde{u}_\varepsilon^p - p\,\tilde{u}_\varepsilon^{p-1} w\big]\, v \qquad v \in H^1(\Omega)\,,$$

quindi $G(w)$ è fondamentalmente superlineare in w. Definiamo l'operatore $F_\varepsilon \colon H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ nel modo seguente

$$F_\varepsilon(w) = -\big(I''_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon)\big)^{-1}\big[I'_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) + G(w)\big]\,, \qquad w \in H^1(\Omega)\,.$$

Dimostreremo che F_ε è una contrazione in un opportuno insieme chiuso di $H^1(\Omega)$. Dalla Proposizione 1 e da alcune disuguaglianze di tipo standard si deduce che

$$\|F_\varepsilon(w)\| \leqslant \begin{cases} C\varepsilon^{-(n-1)}\big(\varepsilon^{k+1-\frac{n-1}{2}} + \|w\|^p\big) & \text{per } p \leqslant 2\,, \\ C\varepsilon^{-(n-1)}\big(\varepsilon^{k+1-\frac{n-1}{2}} + \|w\|^2\big) & \text{per } p > 2\,, \end{cases} \qquad \|w\| \leqslant 1\,; \tag{13}$$

$$\|F_\varepsilon(w_1) - F_\varepsilon(w_2)\| \leqslant \begin{cases} C\varepsilon^{-(n-1)}(\|w_1\|^{p-1} + \|w_2\|^{p-1})\,\|w_1 - w_2\| & p \leqslant 2\,, \\ C\varepsilon^{-(n-1)}(\|w_1\| + \|w_2\|)\,\|w_1 - w_2\| & p > 2\,, \end{cases} \tag{14}$$

per $\|w_1\|$, $\|w_2\| \leqslant 1$. Ora scegliamo degni interi d and k tali che

$$d > \begin{cases} \dfrac{n-1}{p-1} & \text{per } p \leqslant 2\,, \\ n-1 & \text{per } p > 2\,, \end{cases} \qquad k + 1 > d + \frac{3}{2}(n-1)\,, \tag{15}$$

e poniamo

$$\mathcal{B} = \left\{ w \in H^1(\Omega) : \|w\| \leqslant \varepsilon^d \right\}.$$

Dalle stime (13) e (14) si vede che F_ε è una contrazione in $\mathcal{B}$ per ε piccolo, e quindi ne segue l'esistenza di una soluzione u_ε. Questa funzione, per costruzione, ha le proprietà asintotiche richieste, e si verifica facilmente che deve essere positiva. Questo conclude la dimostrazione per $p \leqslant \frac{n+2}{n-2}$. Per il caso supercritico si veda il paragrafo seguente.

Il caso supercritico. La dimostrazione è nello stesso spirito, ma richiede alcune modifiche. Si usano troncature nella parte non lineare del funzionale, in modo da renderlo ancora sottocritico per $|u|$ grande. Poi l'argomento delle contrazioni viene eseguito in un intorno di zero in $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Usando stime ellittiche di regolarità, si ottengono limitazioni in L^∞ indipendenti dalla troncatura. Quindi i punti critici di questi funzionali modificati saranno effettivamente soluzioni di (P_ε).

3. – Alcuni risultati con simmetria radiale.

Consideriamo ora alcune situazioni con simmetria radiale. In questo caso, lavorando in spazi di funzioni invarianti per rotazione, è possibile usare metodi di riduzione finito-dimensionale del problema, si veda la Proposizione 3, e trovare soluzioni che si concentrano su sfere. Si trovano in questo modo numerose soluzioni di tipo nuovo, le quali suggeriscono altri possibili fenomeni di concentrazione anche nel caso non radiale.

3.1. *Nuove soluzioni per* (P_ε).

In [2] è dimostrata l'esistenza di soluzioni di (P_ε) che hanno il profilo di spikes interne (diversamente dal Teorema 1) e che si avvicinano al bordo di Ω quando questo è una palla (o al bordo esterno quando questo è un anello). Questo fenomeno si può spiegare euristicamente come segue. L'energia di una soluzione concentrata su una sfera è proporzionale alla superficie di essa, la quale tenderebbe a ridursi se non ci fossero ulteriori *forze* o vincoli. D'altro canto, il bordo del dominio tende ad attirare le soluzioni a sè (questo si può dedurre da analoghe considerazioni energetiche). Quindi ci si può aspettare che si possa ottenere un *equilibrio di forze* per certi valori del raggio della sfera.

Estendendo la funzione w_0 in modo pari a tutto l'asse reale, definiamo

$$z_\varrho(r) = w_0\left(\frac{r-\varrho}{\varepsilon}\right); \qquad \text{per } \varrho \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \ r \in [0, 1],$$

e la varietà

$$Z = \left\{z_\varrho \colon \varrho \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}.$$

Il metodo di riduzione finito-dimensionale di (P_ε) è basato sulla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 4. – *Esiste un numero positivo μ (sufficientemente grande) con la proprietà seguente. Per $\varepsilon \to 0$ e per ogni $\varrho \in \left[\frac{1}{2}, 1-\varepsilon\mu\right]$ esiste una funzione $w(\varepsilon, z_\varrho) = w_\varrho$ che soddisfa*

i) $I_\varepsilon'(z_\varrho + w(z_\varrho)) = \alpha_\varrho \dfrac{\partial}{\partial \varrho} z_\varrho$;

ii) $w(z_\varrho^N) \perp T_{z_\varrho^N} Z^N$,

dove $\alpha_\varrho \in \mathbb{R}$ e C è una costante positiva che dipende da n, p e μ. Inoltre, se per qualche $\varepsilon \ll 1$, ϱ_ε è un punto critico di $\Psi_\varepsilon(\varrho) := I_\varepsilon(z_\varrho + w_\varrho)$, allora $\tilde{u}_\varepsilon = z_{\varrho_\varepsilon} + w_{\varrho_\varepsilon}$ è un punto critico di I_ε.

Per il funzionale Ψ_ε vale il seguente sviluppo.

LEMMA 3. – *Sia z_ϱ come sopra, e sia w_ϱ come nella Proposizione 4. Allora si ha*

$$I_\varepsilon(z_\varrho + w_\varrho) = \varepsilon\varrho^{n-1}\left[C_1 - C_2 e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-\varrho)}\right] + O(\varepsilon^2) + o\left(\varepsilon e^{-\frac{2}{\varepsilon}(1-\varrho)}\right),$$

per ogni $\varrho \in \left[\frac{1}{2}, 1-\varepsilon\mu\right]$. C_1 e C_2 rappresentano due costanti positive che dipendono soltanto da n e da p.

Si vede facilmente che Ψ_ε ha un punto critico per $|\varrho - 1| \sim \varepsilon|\log\varepsilon|$, da cui si deduce il seguente risultato.

TEOREMA 2. – *Sia Ω la palla unitaria B_1 o l'anello $A_r = \{r < |x| < 1\}$. Allora esiste una famiglia di soluzioni radiali u_ε di (P_ε) che si concentrano vicino a $|x| = 1$. Più precisamente, u_ε possiede un massimo locale $r_\varepsilon < 1$ per cui vale $1 - r_\varepsilon \sim \varepsilon|\log\varepsilon|$.*

Il teorema precedente può essere esteso al caso di soluzioni con più creste che ancora si avvicinano al bordo dell'insieme.

TEOREMA 3. – *Sia N un intero positivo fissato. Allora esiste $\varepsilon_N > 0$ tale che per ogni $\varepsilon < \varepsilon_N$, il problema (P_ε) su B_1 o su A_r ammette una soluzione radiale u_ε con la proprietà seguenti: u_ε si concentra su N sfere $\{|x| = r_j^\varepsilon\}$, $j = 1, \dots, N$ con*

$$1 - r_1^\varepsilon \sim \varepsilon |\log \varepsilon|, \qquad r_{j-1}^\varepsilon - r_j^\varepsilon \sim \varepsilon |\log \varepsilon|, \quad j = 2, \dots, N. \tag{16}$$

3.2. *Il problema di Dirichlet.*

Consideriamo ora il seguente problema con condizioni di Dirichlet.

$$(D_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega, \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega, & u > 0 \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

In questo caso, valgono considerazioni euristiche analoghe a quelle fatte in precedenza per il problema di Neumann. Stavolta però l'effetto del bordo di Ω è opposto, cioè respinge le soluzioni. In maniera simile si ottiene allora il seguente risultato.

TEOREMA 4. – *Sia $r < 1$, e sia $\Omega = A_r = \{r < |x| < 1\}$. Allora esiste una famiglia di soluzioni radiali di (D_ε) che si concentrano vicino a $|x| = r$. Più precisamente, u_ε possiede un massimo locale $r < r_\varepsilon < 1$ per cui vale $r - r_\varepsilon \sim \varepsilon |\log \varepsilon|$.*

3.3. *Equazione di Schrödinger nonlineare.*

Con il metodo di riduzione descritto sopra, si ottengono anche risultati di concentrazione su sfere per il seguente problema

$$(NLS_\varepsilon) \qquad -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)\, u = u^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n; \qquad p > 1,$$

cioè l'equazione di Schrödinger nonlineare nel limite semiclassico. Consideriamo qui potenziali *radiali*, $V(x) = V(r)$, $r = |x|$, che soddisfano anche le seguenti condizioni

($V1$) $V \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty$;

($V2$) $V_0 := \inf\{V(r) : r \in \mathbb{R}^+\} > 0$.

La combinazione di energia potenziale e di volume è espressa da un potenziale ausiliario $M(r)$

$$M(r) = r^{n-1}(V(r))^{\theta}; \qquad \theta = \frac{p+1}{p-1} - \frac{1}{2}.$$

Vale il seguente risultato.

TEOREMA 5. – *Sia $p > 1$, e supponiamo che il potenziale radiale $V(x) = V(r)$ soddisfi le ipotesi $(V1)$-$(V2)$. Allora la condizione $M'(r) = 0$ fornisce condizioni necessarie e sufficienti per la concentrazione su sfere di soluzioni del problema (NLS_ε).*

Nonostante la simmetria permetta di trascurare i fenomeni di risonanza dovuti alla concentrazione multidimensionale, questi tuttavia persistono se si considerano spazi di funzioni non radialmente simmetriche. Usando questo fatto e applicando metodi di biforcazione, si ottiene esistenza di soluzioni non radiali vicine a quelle ottenute tramite il Teorema 5.

TEOREMA 6. – *Supponiamo che il potenziale radiale $V(x) = V(r)$ soddisfi le ipotesi $(V1)$-$(V2)$, e sia $\bar{r} > 0$ tale che $M'(\bar{r}) = 0$ e*

$$M''(\bar{r}) \neq 0 .$$

Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ e una famiglia di soluzioni di (NLS_ε) tale che l'insieme

$$\Lambda = \{u_\varepsilon \text{ è una soluzione radiale di } (NLS_\varepsilon) : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$$

è una curva regolare. Inoltre esiste una successione $\varepsilon_j \to 0$ tale che da ogni $u_{\varepsilon_j} \in \Lambda$ si biforca una famiglia di soluzioni non radiali di (NLS_ε).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AMBROSETTI - A. MALCHIODI - W.-M. NI, *Singularly Perturbed Elliptic Equations with Symmetry: Existence of Solutions Concentrating on Spheres, Part I*, Comm. Math. Phys., **235** (2003), 427-466.

[2] A. AMBROSETTI - A. MALCHIODI - W.-M. NI, *Singularly Perturbed Elliptic Equations with Symmetry: Existence of Solutions Concentrating on Spheres, Part II*, Indiana Univ. Math. J., **53**, no. 2 (2004), 297-329.

[3] R. G. CASTEN - C. J. HOLLAND, *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eq. **27**, no. 2 (1978), 266-273.

[4] S. CINGOLANI - A. PISTOIA, *Nonexistence of single blow-up solutions for a nonlinear Schrödinger equation involving critical Sobolev exponent*, Z. Angew. Math. Phys., **55**, no. 2 (2004), 201-215.

[5] E. N. DANCER, *Stable and finite Morse index solutions on $\mathbb{R}^n$ or on bounded do-*

mains with small diffusion. II, Indiana Univ. Math. J., **53**, no. 1 (2004), 97-108.

[6] T. D'APRILE, *On a class of solutions with non-vanishing angular momentum for nonlinear Schrödinger equations*, Diff. Int. Eq., **16**, no. 3 (2003), 349-384.

[7] M. DEL PINO - P. FELMER, *Semi-classical states for nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal., **149**, no. 1 (1997), 245-265.

[8] A. GIERER - H. MEINHARDT, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik (Berlin), **12** (1972), 30-39.

[9] C. GUI - J. WEI, *On multiple mixed interior and boundary peak solutions for some singularly perturbed Neumann problems*, Canad. J. Math., **52**, no. 3 (2000), 522-538.

[10] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Band 132, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[11] Y. Y. LI - L. NIRENBERG, *The Dirichlet problem for singularly perturbed elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **51** (1998), 1445-1490.

[12] C. S. LIN - W.-M. NI - I. TAKAGI, *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis systems*, J. Diff. Eq., **72** (1988), 1-27.

[13] A. MALCHIODI - M. MONTENEGRO, *Boundary concentration phenomena for a singularly perturbed elliptic problem*, Comm. Pure Appl. Math., **15** (2002), 1507-1568.

[14] A. MALCHIODI - M. MONTENEGRO, *Multidimensional boundary layers for a singularly perturbed Neumann problem*, Duke Math. J., **124**, no. 1 (2004), 105-143.

[15] W.-M. NI MALCHIODI - J. WEI, *Multiple Clustered Layer Solutions for Semilinear Neumann Problems on A Ball*, Ann. I.H.P. Analyse non lineaire, to appear.

[16] H. MATANO, *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **15**, no. 2 (1979), 401-454.

[17] W. M- NI, *Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states*, Notices Amer. Math. Soc., **45**, no. 1 (1998), 9-18.

[18] W. M. NI - I. TAKAGI, *On the shape of least-energy solution to a semilinear Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math., **41** (1991), 819-851.

[19] W. M. NI - I. TAKAGI, *Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J., **70** (1993), 247-281.

[20] J. SHI, *Semilinear Neumann boundary value problems on a rectangle*, Trans. Amer. Math. Soc., **354**, no. 8 (2002), 3117-3154.

[21] A. M. TURING, *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. Royal Soc. London, Series B, Biological Sciences, **237** (1952), 37-72.

SISSA, via Beirut 2-4, 34014 Trieste, Italy

Pervenuta in Redazione
l'1 luglio 2004