Bollettino
Unione Matematica Italiana

Piermarco Cannarsa

Funzioni semiconcave, singolarità e pile di sabbia

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-B** (2005), n.3, p. 549–567.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_3_549_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
(8) 8-B (2005), 549-567

Funzioni semiconcave, singolarità e pile di sabbia.

PIERMARCO CANNARSA (*)

Summary. – *Semiconcavity is a natural generalization of concavity that retains most of the good properties known in convex analysis, but arises in a wider range of applications. This is a survey of the main properties of semiconcave functions which emphasizes the study of singularities. An application to a dynamic model for granular matter will be discussed.*

Sunto. – *La semiconcavità è una nozione che generalizza quella di concavità conservandone la maggior parte delle proprietà ma permettendo di ampliarne le applicazioni. Questa è una rassegna dei punti più salienti della teoria delle funzioni semiconcave, con particolare riguardo allo studio dei loro insiemi singolari. Come applicazione, si discuterà una formula di rappresentazione per la soluzione di un modello dinamico per la materia granulare.*

1. – Introduzione.

A dire il vero, non saprei indicare chi per primo ha definito la nozione di funzione semiconcava, così come non saprei dire chi per primo ha definito la nozione di convessità. Infatti, lo studio delle proprietà di questa classe di funzioni non è nato come una teoria sistematica, ma piuttosto come una serie di risultati accumulatisi nel tempo in modo abbastaza casuale, sotto la spinta «utilitaristica» di questa o quella applicazione ai problemi più disparati.

Ad esempio, i primi risultati di esistenza e unicità per equazioni a derivate parziali del primo ordine convesse nel gradiente furono ottenuti nella classe delle funzioni semiconcave da Douglis [16] e Kruzhkov [28, 29, 30]. Successivamente, la semiconcavità ha rivestito un ruolo importante nello studio delle soluzioni deboli di equazioni di Hamilton-Jacobi ([21]), come proprietà regolarizzante in ana-

(*) Conferenza tenuta a Milano il 10 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

lisi prossimale ([24]) e in analisi «nonsmooth» ([38]), come utile tecnica nel trattamento di problemi di filtraggio nonlineare ([22]), e, infine, come strumento essenziale per la stabilizzazione dei sistemi nonlineari ([36, 37]).

D'altra parte, non mi pare necessario ricorrere a nessuna delle applicazioni appena citate per motivare lo studio delle funzioni semiconcave. Partirei piuttosto da un paragone che considero molto efficace: è ben noto che una funzione concava $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si può caratterizzare come inviluppo inferiore di funzioni lineari, ossia

$$u(x) = \inf_{i \in \mathfrak{I}} u_i(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

con $u_i(x) = \langle A_i, x\rangle + b_i$. Ebbene, che tipo di funzione si ottiene come inviluppo sostituendo la linearità delle u_i con la richiesta che queste siano funzioni regolari, ad esempio di classe C^2? Esattamente una funziona semiconcava!

Ciò spiega, inoltre, perchè insistiamo a considerare la proprietà di semiconcavità, piuttosto di quella forse più familiare di semiconvessità: la prima è legata ai problemi di minimo, la seconda a problemi di massimo.

Lo scopo di questa presentazione è di fornire una breve rassegna delle proprietà delle funzioni semiconcave, soprattutto per quanto riguarda la struttura delle loro singolarità, e di alcune loro recenti applicazioni a modelli differenziali che interessano la teoria del trasporto ottimo. Chi fosse interessato ad uno studio sistematico di questa classe di funzioni può consultare la monografia [13], che ha fatto seguito a numerosi altri testi — quali [32], [18], [23] e [6] — in cui vengono presentati aspetti specifici della teoria, per lo più relativi ad applicazioni alle equazioni a derivate parziali.

Vorrei ringraziare il Comitato Organizzativo del XVII Congresso dell'UMI per avermi invitato a parlare e il Presidente dell'UMI, Carlo Sbordone, per la pazienza con cui ha atteso questo mio testo scritto.

2. – Funzioni semiconcave: definizioni e prime proprietà.

Iniziamo col dare la definizione di funzione semiconcava. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$.

DEFINIZIONE 2.1. – *Diciamo che una funzione $u : A \to \mathbb{R}$ è* semiconcava con modulo lineare *se u è continua su A e, per un'opportuna costante $C \in \mathbb{R}$,*

$$u(x+h) + u(x-h) - 2u(x) \leq C|h|^2, \tag{1}$$

per ogni scelta di punti $x, h \in \mathbb{R}^N$ tali che il segmento $[x-h, x+h]$ sia contenuto in A. In questo caso si dice che C è una costante di semiconcavità *di u su A.*

La nozione precedente può essere generalizzata sostituendo l'errore quadratico al secondo membro di (1) con un termine della forma $|h|\omega(|h|)$, con $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ semicontinua superiormente, nondecrescente e tale che $\lim_{r \downarrow 0} \omega(r) = 0$. Si ottiene così la nozione di funzione *semiconcava con modulo* ω su A. Si è inoltre soliti considerare la classe delle funzioni *localmente semiconcave su* A, cioé semiconcave su ogni compatto contenuto in A. In questa sede considereremo solo funzioni semiconcave con modulo lineare, riferendoci ad esse, più semplicemente, col termine di funzioni semiconcave.

Diamo ora alcune caratterizzazioni alternative della semiconcavità la cui dimostrazione si può trovare in molti dei testi già citati sull'argomento, ad esempio in [13].

PROPOSIZIONE 2.2. – *Siano dati un aperto convesso* A, *una funzione* $u : A \to \mathbb{R}$ *e un numero reale* C. *Le proprietà seguenti sono allora equivalenti.*

(a) u *è semiconcava su* A *con costante di semiconcavità* C.

(b) u *verifica*

$$\lambda u(x) + (1-\lambda)\, u(y) - u(\lambda x + (1-\lambda)\, y) \le C \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} |x-y|^2, \tag{2}$$

per ogni scelta di punti x, y *tali che* $[x, y] \subset A$ *e per ogni* $\lambda \in [0, 1]$.

(c) *La funzione* $x \to u(x) - \dfrac{C}{2}|x|^2$ *è concava su* A.

(d) *Per ogni vettore unitario* $\nu \in \mathbb{R}^N$ *risulta* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \le C$ *in* A *nel senso delle distribuzioni, cioè*

$$\int_A u(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2}(x)\, dx \le C \int_A \phi(x)\, dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(A), \quad \phi \ge 0\,.$$

(e) $u(x) = \inf_{i \in \mathfrak{I}} u_i(x)$ *per un'opportuna famiglia di funzioni* $\{u_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ *in* $C^2(A)$ *che verificano* $\|D^2 u_i\|_\infty \le C$ *per ogni* $i \in \mathfrak{I}$.

È ben noto che una funzione convessa $u : A \to \mathbb{R}$ è localmente lipschitziana in A e quindi, per il Teorema di Rademacher, differenziabile quasi ovunque su A. La stessa conclusione vale per ogni funzione semiconcava u su A, grazie al punto (c) della proposizione precedente. Inoltre, Du è una funzione vettoriale localmente limitata in A. Pertanto, per ogni $x \in A$, l'insieme $D^* u(x)$ di tutti i *gradienti raggiungibili* (o gradienti *limite*) di u in x, cioè di tutti i vettori p della forma

$$p = \lim_{i \to \infty} Du(x_i)$$

dove $\{x_i\}$ è una successione in A di punti di differenziabilità per u, è un chiuso non vuoto. L'involucro convesso di tale insieme, co $D^* u(x)$, è il cosiddetto gradiente di Clarke di u in x, $\partial_C u(x)$, le cui proprietà sono analizzate a fondo in [15]. Grazie al fatto che u è semiconcava, non è difficile verificare che tale insieme coincide col *superdifferenziale* di u in x, definito in generale come

$$D^+ u(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^N : \limsup_{y \to x} \frac{u(y) - u(x) - \langle p, y - x \rangle}{|y - x|} \leq 0 \right\}.$$

In modo del tutto analogo si può definire il *subdifferenziale* di u in x come

$$D^- u(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^N : \liminf_{y \to x} \frac{u(y) - u(x) - \langle p, y - x \rangle}{|y - x|} \geq 0 \right\}.$$

Si vede peraltro che, nel caso di una funzione semiconcava, è il primo insieme ad essere rilevante. Infatti, come ricordato poc'anzi, $D^+ u(x)$ è non vuoto per ogni $x \in A$. Di conseguenza, o $D^- u(x) = \emptyset$ oppure u è differenziabile in x. Valgono inoltre le seguenti proprietà, per la dimostrazione delle quali rinviamo a [13].

PROPOSIZIONE 2.3. – *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e $u : A \to \mathbb{R}$ una funzione semiconcava di costante C. Sia $x \in A$ e $p \in \mathbb{R}^N$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

(a) *$p \in D^+ u(x)$ se e solo se*

$$u(y) - u(x) - \langle p, y - x \rangle \leq C|y - x|^2 \tag{3}$$

per ogni $y \in A$ tale che $[y, x] \subset A$.

(b) *$D^+ u(x) = \{p\}$ se e solo se u è differenziabile in x e $Du(x) = p$;*

(c) *$D^* u(x)$ è un sottoinsieme della frontiera di $D^+ u(x)$.*

3. – Osservazioni ed esempi.

Vogliamo ora illustrare alcuni degli ambiti in cui la semiconcavità si presenta in maniera naturale. Così facendo, verranno alla luce ulteriori proprietà interessanti delle funzioni semiconcave.

3.1. *Funzione distanza.*

La *funzione distanza* da un chiuso non vuoto $C \subset \mathbb{R}^N$ è definita come

$$d_C(x) = \min_{y \in S} |y - x|, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

È ben noto che d_C è una funzione lipschitziana su $\mathbb{R}^N$ con costante di Lipschitz uguale a 1. Invece, si vede facilmente che d_C non è mai semiconcava su tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$. Ad esempio, per $N = 1$ e $C = \{0\}$ risulta $d_C(x) = |x|$ che è convessa, ma non semiconcava. Valgono tuttavia i seguenti risultati di semiconcavità, per la dimostrazione dei quali rimandiamo a [13].

PROPOSIZIONE 3.1. – *Sia $C \subset \mathbb{R}^N$ un insieme chiuso, diverso dal vuoto e da tutto $\mathbb{R}^N$. Allora la funzione distanza d_C ha le seguenti proprietà.*

(i) *d_C^2 è semiconcava su $\mathbb{R}^N$ di costante 2.*

(ii) *d_C è localmente semiconcava su $\mathbb{R}^N \setminus C$. Più precisamente, fissato un insieme S (non necessariamente compatto) tale che* $\operatorname{dist}(S, C) > 0$, *$d_C$ è semiconcava su S di costante* $\operatorname{dist}(S, C)^{-1}$.

(iii) *Se C ha la proprietà di sfera intera per un certo $r > 0$, allora d_C è semiconcava su $\overline{\mathbb{R}^N \setminus C}$ di costante r^{-1}.*

Ricordiamo che $C \subset \mathbb{R}^N$ ha la *proprietà di sfera interna* se, per un opportuno numero $r > 0$, S è unione di sfere chiuse di raggio r, cioé se per ogni $x \in C$

$$\exists y \in C \quad \text{tale che} \quad x \in \overline{B_r(y)} \subset C. \tag{4}$$

Equivalentemente, si può richiedere che la proprietà (4) valga per ogni x sul bordo di C.

3.2. *Insiemi di livello di funzioni semiconcave.*

Abbiamo appena esaminato il legame che intercorre tra la proprietà di sfera interna dell'insieme C e la semiconcavità della funzione distanza d_C. Questo non è un fatto isolato, ma riguarda la struttura stessa degli insiemi di livello di una funzione semiconcava, come mostra il risultato seguente.

TEOREMA 3.2. – *Sia u una funzione semiconcava su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di costante $C > 0$. Supponiamo che esista $\varrho > 0$ tale che ogni punto $x \in \Omega$ ammetta un vettore $p_x \in D^+ u(x)$ che soddisfa $|p_x| \geq \varrho$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello*

$$U_\lambda := \{x \in \Omega : u(x) \leq \lambda\}$$

ha la proprietà di sfera interna di raggio $\varrho/2C$.

DIM. – Sia $r = \varrho/2C$. Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, sia $x \in U_\lambda$. Facciamo vedere che la sfera chiusa $\overline{B}\left(x - r\frac{p_x}{|p_x|}, r\right)$ è contenuta in U_λ, ossia che

$$x - r\frac{p_x}{|p_x|} + r\theta \in U_\lambda \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}^N, \quad |\theta| \leqslant 1 .$$

Dal punto (c) della Proposizione 2.3 segue che

$$\begin{aligned} u\left(x - r\frac{p_x}{|p_x|} + r\theta\right) &\leqslant u(x) + \left\langle p_x, r\theta - r\frac{p_x}{|p_x|}\right\rangle + Cr^2 \left| \theta - \frac{p_x}{|p_x|}\right|^2 \\ &\leqslant \lambda + r\langle p_x, \theta\rangle - r|p_x| + 2Cr^2\left(1 - \frac{\langle p_x, \theta\rangle}{|p_x|}\right) \\ &= \lambda + r(\langle p_x, \theta\rangle - |p_x|)\left(1 - \frac{2Cr}{|p_x|}\right) \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$(\langle p_x, \theta\rangle - |p_x|)\left(1 - \frac{2Cr}{|p_x|}\right) \leqslant 0$$

per la scelta di r e l'ipotesi che $|p_x| \geqslant \varrho$. Ne discende la tesi. ■

3.3. *Autovalori.*

Sia $M(x)$ una matrice reale e simmetrica $k \times k$, a coefficienti funzioni di $C^2(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Allora il minimo autovalore di $M(x)$ è una funzione localmente semiconcava su Ω. Per verificarlo, ricordiamo che il minimo autovalore $\lambda_1(x)$ di $M(x)$ si caratterizza come

$$\lambda_1(x) = \min_{\xi \in S^{k-1}} \langle M(x)\,\xi, \xi\rangle,$$

dove S^{k-1} è la superficie sferica di raggio 1 in $\mathbb{R}^k$. Poiché la famiglia di funzioni $x \mapsto \langle M(x)\xi, \xi\rangle$ è di classe C^2 uniformemente rispetto a $\xi \in S^{k-1}$, la tesi è conseguenza del punto (e) della Proposizione 2.2.

D'altra parte, $\lambda_1(\cdot)$ non è in generale una funzione differenziabile come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 3.3. – Per $x \in \mathbb{R}$, sia

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $M(x)$ sono $\pm x$. Quindi $\lambda_1(x) = \min\{-x, x\} = -|x|$, che è concava ma non differenziabile in 0.

3.4. *Equazioni a derivate parziali.*

Il risultato che presentiamo ora, relativo ad equazioni tipo di Hamilton-Jacobi-Bellman, vuole essere un esempio introduttivo alle numerose applicazioni della semiconcavità alle equazioni a derivate parziali nonlineari. Ne riportiamo una dimostrazione che mette in luce il ruolo essenziale del principio del massimo in tutta questa teoria.

PROPOSITION 3.4. – *Sia $u \in C^4([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione*

$$\partial_t u(t, x) + H(\nabla u(t, x)) = a\Delta u(t, x), \tag{5}$$

dove $a > 0$ e $H \in C^2(\mathbb{R}^n)$ è una funzione uniformemente convessa. Supponiamo che u abbia derivate parziali limitate fino al secondo ordine. Allora, per ogni $t \in]0, T]$, la funzione $u(t, \cdot)$ è semiconcava su $\mathbb{R}^n$ di costante $(\lambda t)^{-1}$, dove $\lambda > 0$ è il minimo autovalore di $D^2 H$.

DIM. – Posto $w(t, x) = t\partial^2_{x_1 x_1} u(t, x)$ si ha

$$\begin{aligned}\partial_t w &= \frac{w}{t} + t\partial^2_{x_1 x_1}(a\Delta u - H(\nabla u))\\ &= \frac{w}{t} + a\Delta w - \langle DH(\nabla u), \nabla w\rangle - t\langle D^2 H(\nabla u)\, \nabla\partial_{x_1} u, \nabla\partial_{x_1} u\rangle .\end{aligned}$$

Per ipotesi,

$$t\langle D^2 H(\nabla u)\, \nabla\partial_{x_1} u, \nabla\partial_{x_1} u\rangle \geqslant t\lambda\, |\nabla\partial_{x_1} u|^2 \geqslant \lambda w^2/t .$$

Pertanto,

$$\partial_t w \leqslant \frac{w}{t}(1 - \lambda w) + a\Delta w - \langle DH(\nabla u), \nabla w\rangle.$$

Poiché $w(t, \cdot) \to 0$ uniformemente per $t \to 0$, dal principio del massimo segue che $\lambda w(t, x) \leqslant 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi, $\partial^2_{x_1 x_1} u(t, x) \leqslant (\lambda t)^{-1}$. Lo stesso argomento si applica a $\partial^2_{\nu\nu} u$ per ogni vettore unitario $\nu \in \mathbb{R}^n$. Ne discende la tesi per il punto (d) della Proposizione 2.2. ■

L'aspetto interessante della proprietà precedente non è la semiconcavità in sé (che seguirebbe dalla regolarità della soluzione assunta per ipotesi), ma il fatto che la costante di semiconcavità è indipendente dal coefficiente a del termine diffusivo. Questo fatto ha conseguenze notevoli sul cosiddetto *metodo della viscosità artificiale* per lo studio dell'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\partial_t u(t, x) + H(\nabla u(t, x)) = 0 , \tag{6}$$

per la quale si cerca di costruire una soluzione come limite per $a \to 0^+$ delle soluzioni u_a di (5). L'equazione (5), detta la *regolarizzazione parabolica* della (6), è, in un certo senso, più facile da studiare della (6). Infatti, (5) ha parte principale lineare e si inquadra nella teoria classica delle equazioni paraboliche semilineari. Dalla stima di semiconcavità uniforme della Proposizione 3.4 segue la compattezza delle u_a e il fatto che il loro limite uniforme $u = \lim_{a \downarrow 0} u_a$ è a sua volta semiconcavo. La semiconcavità permette inoltre di ottenere un risultato di unicità per (6).

Il metodo dell viscosità artificiale si chiama così in analogia con la teoria delle leggi di conservazione in fluidodinamica, dove il termine del secondo ordine è legato alla viscosità del fluido. Va osservato che la moderna teoria delle *soluzioni di viscosità* permette di ottenere l'esistenza e l'unicità della soluzione di (6) (con un'opportuna condizione iniziale) in ipotesi molto più generali di quelle qui considerate.

Va infine ricordato che la proprietà di semiconcavità vale per soluzioni di altre classi di equazioni a derivate parziali del secondo ordine, come ad esempio l'equazione dei mezzi porosi

$$\partial_t v(t, x) = av(t, x)\Delta v(t, x) + |\nabla v(t, x)|^2$$

per lo studio della quale rimandiamo a [5].

4. – Singolarità.

Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione semiconcava su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Abbiamo già osservato che u è differenziabile quasi ovunque in virtù del Teorema di Rademacher. Chiameremo *insieme singolare* di u l'insieme di tutti i punti di Ω in cui u non è differenziabile e denoteremo questo insieme con $\Sigma(u)$. I punti di $\Sigma(u)$ sono detti *punti singolari* o *singolarità* di u.

4.1. *Rettificabilità di $\Sigma(u)$.*

Per raffinare l'analisi dell'insieme singolare, è utile far ricorso alla nozione di insieme rettificabile. Ricordiamo che un insieme $S \subset \mathbb{R}^N$ si dice *k-rettificabile* ($k \in \{0, \dots, N\}$) se esiste una funzione Lipschitziana $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ tale che $C \subset f(\mathbb{R}^k)$. Si dice che S è *numerabilmente k-rettificabile* se S è unione numerabile di insiemi k-rettificabili.

A questo punto osserviamo che

$$\Sigma(u) = \{x \in \Omega : \dim D^+ u(x) \geq 1\}$$

e quindi

$$\Sigma(u) = \bigcup_{k=1}^{N} \Sigma^k(u)$$

dove

$$\Sigma^k(u) = \{x \in \Omega : \kappa(x) = k\} \qquad k \in \{0, \dots, N\}.$$

Dato un punto singolare x, la *magnitudine* di x è l'intero $k \in \{0, \dots, N\}$ tale che $x \in \Sigma^k(u)$. È interessante notare che si riesce a stimare con precisione quanto decrescono gli insiemi singolari $\Sigma^k(u)$ al crescere della magnitudine.

TEOREMA 4.1. – *Per ogni $k \in \{0, \dots, N\}$ l'insieme $\Sigma^k(u)$ è numerabilmente $(N-k)$-rettificabile. Di conseguenza, l'insieme singolare $\Sigma(u)$ è numerabilmente $(N-1)$-rettificabile.*

Questo risultato, nella formulazione precedente, è da attribuirsi a Zajíček [39, 40]. Nel caso della funzione distanza, esso è dimostrato in [17] nel caso $k=N$, mentre viene esposto sotto forma di congettura per $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Inoltre, il risultato di rettificabilità è stato esteso a funzioni semiconcave di modulo arbitrario in [3], con una tecnica completamente diversa da quella di [39, 40].

4.2. *Propagazione delle singolarità.*

Se poc'anzi abbiamo visto come si possano dare stime dall'alto sull'insieme singolare, ora vogliamo affrontare il problema — in un certo senso duale — di dare «stime dal basso» su $\Sigma(u)$. Fissato un punto $x_0 \in \Sigma(u)$, vogliamo trovare condizioni che garantiscano l'esistenza di altri punti singolari vicino a x_0, cioè che escludano la possibilità che x_0 sia un punto singolare isolato di u. L'esempio che segue aiuta a intuire la natura delle condizioni che cerchiamo.

ESEMPIO 4.2. – Le funzioni

$$u_1(x_1, x_2) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad u_2(x_1, x_2) = -|x_1| - |x_2|$$

sono concave su $\mathbb{R}^2$, e $(0, 0)$ è un punto singolare per entrambe. Inoltre, $(0, 0)$ è l'unica singolarità di u_1 mentre

$$\Sigma(u_2) = \{(x_1, x_2) : x_1 x_2 = 0\}.$$

Pertanto, $(0, 0)$ è l'intersezione di due rette di punti singolari di u_2. Osserviamo che $(0, 0)$ è una singolarità di magnitudine 2 per entrambe le funzioni in quanto

$$D^+ u_1(0, 0) = \{(p_1, p_2) : p_1^2 + p_2^2 \leqslant 1\}$$

$$D^+ u_2(0, 0) = \{(p_1, p_2) : |p_1| \leqslant 1, \ |p_2| \leqslant 1\}.$$

La diversa struttura degli insiemi $\Sigma(u_1)$ e $\Sigma(u_2)$ nell'intorno di x_0 è riflessa dai rispettivi gradienti raggiungibili. Infatti,

$$D^* u_1(0, 0) = \{(p_1, p_2) : p_1^2 + p_2^2 = 1\} = \partial D^+ u_1(0, 0)$$

$$D^* u_2(0, 0) = \{(p_1, p_2) : |p_1| = 1, \ |p_2| = 1\} \neq \partial D^+ u_2(0, 0).$$

In altri termini, l'inclusione $D^* u(x) \subset \partial D^+ u(x)$ è un'uguaglianza per u_1, mentre è un'inclusione stretta per u_2 (si ricordi il punto (c) della Proposizione 2.3).

L'esempio precedente suggerisce che una condizione sufficiente ad escludere che x_0 sia un punto isolato di $\Sigma(u)$ possa essere che $D^* u(x_0)$ non ricopra tutta la frontiera di $D^+ u(x_0)$. In realtà, tale condizione assicura una proprietà molto più forte, e cioé che da x_0 parte un arco Lipschitziano non costante, interamente costituto di punti singolari. Più precisamente, vale il seguente risultato dimostrato in [1].

TEOREMA 4.3. – *Sia $x_0 \in \Omega$ un punto singolare di una funzione semiconcava u. Supponiamo che*

$$\partial D^+ u(x_0) \setminus D^* u(x_0) \neq \emptyset . \tag{7}$$

Allora esiste un arco Lipschitziano $\boldsymbol{x} : [0, \sigma] \to \mathbb{R}^N (\sigma > 0)$, di punto iniziale $\boldsymbol{x}(0) = x_0$, tale che $\boldsymbol{x}(s) \in \Sigma(u)$ per ogni $s \in [0, \sigma]$ e

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{\boldsymbol{x}(s) - x_0}{s} \neq 0 .$$

Inoltre, $\boldsymbol{x}(s) \neq x_0$ per ogni $s \in]0, \sigma]$.

Osserviamo che la condizione (7) equivale all'esistenza di due vettori, $p_0 \in \mathbb{R}^N$ e $q \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, tali che

$$p_0 \in D^+ u(x_0) \setminus D^* u(x_0) \tag{8}$$

$$\langle q, p - p_0 \rangle \geq 0 \qquad \forall p \in D^+ u(x_0) . \tag{9}$$

Infatti, da (8) e (9) segue che $p_0 \in \partial D^+ u(x_0) \setminus D^* u(x_0)$. Viceversa, se vale (7), allora (8) è soddisfatta da ogni vettore $p_0 \in \partial D^+ u(x_0) \setminus D^* u(x_0)$, mentre per verificare (9) basta prendere $-q \neq 0$ nel cono normale all'insieme (convesso) $D^+ u(x_0)$ nel punto p_0.

L'idea centrale della dimostrazione del Teorema 4.3 consiste nell'osservare che la distanza tra il grafico di u e un piano trasversale ad esso per $(x_0, u(x_0))$ deve risultare massima lungo l'arco singolare che stiamo cercando. Il piano trasversale al grafico che permette di ottenere stime utilizzabili a questo scopo si costruisce usando un vettore della forma $p_0 - q$, dove p_0 e q sono scelti come sopra. Infatti, la condizione (9) assicura che $p_0 - q \notin D^+ u(x_0)$, e quindi il grafico della funzione

$$x \mapsto u(x_0) + \langle p_0 - q, x - x_0 \rangle \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{10}$$

è trasversale al grafico di u. Osserviamo inoltre che dalla dimostrazione risulta

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{\boldsymbol{x}(s) - x_0}{s} = -q\,.$$

Se il Teorema 4. fornisce una descrizione accurata della propagazione di singolarità per funzioni semiconcave nel piano, è anche vero che l'analisi si complica notevolmente in dimensione più alta. In tal caso, infatti, è lecito aspettarsi che le singolarità si propaghino anche lungo «varietà» di dimensione maggiore di 1. Senza entrare in ulteriori dettagli, rimandiamo il lettore a [1] per un risultato in questa direzione.

4.3 *Singolarità della funzione distanza.*

Esaminiamo ora alcune proprietà che sono specifiche dell'insieme singolare della funzione distanza d_S da un chiuso non vuoto S di $\mathbb{R}^N$. Indichiamo con $\mathrm{proj}_S(x)$ l'insieme delle proiezioni di x su S, cioé

$$\mathrm{proj}_S(x) = \{y \in S : d_S(x) = |x - y|\} \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Posto

$$\Sigma_S = \Sigma(d_S) \cap (\mathbb{R}^N \setminus S),$$

un risultato ben noto assicura che un punto $x \notin S$ appartiene a Σ_S se e solo se $\mathrm{proj}_S(x)$ contiene almeno due punti.

Ovviamente, Σ_S può avere punti isolati. Tuttavia, la presenza di singolarità isolate della distanza è caratterizza in modo preciso nel risultato seguente, che costituisce una versione riveduta di un classico risultato di Motzkin [33] (si veda [1] per una dimostrazione che usa la propagazione di singolarità).

TEOREMA 4.4. – *Sia S un chiuso non vuoto di $\mathbb{R}^n$ e $x \in \Sigma_S$. Allora, le proprietà seguenti sono equivalenti:*

(a) *x è un punto isolato di Σ_S;*

(b) $\partial D^+ d_S(x) = D^* d_S(x)$;

(c) $\mathrm{proj}_S(x) = \partial B_r(x)$ *dove* $r := d_S(x)$.

In altri termini, un punto x_0 è una singolarità isolata della funzione distanza se e solo se esiste una sfera aperta B di centro x_0, tale che $B \cap S = \emptyset$ e $\partial B \subset S$. Se, in particolare, S è un insieme semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$, o un insieme di $\mathbb{R}^N$ con gruppo di omotopia $(N-1)$-dimensionale banale, allora la distanza da S non possiede singolarità isolate nel complementare di S.

Dal punto (b) dell'enunciato precedente e dal Teorema 4.3 si deduce subito che da ogni punto isolato di Σ_S parte almeno un arco Lipschitziano non costante formato interamente da punti singolari di d_S. Ulteriori informazioni si ottengono osservando che d_S è una soluzione semiconcava del problema

$$\begin{cases} |Du(x)|^2 = 1 & \text{q.o. in } \mathbb{R}^N \backslash S \\ u(x) = 0 & \text{su } \partial S \end{cases} \tag{11}$$

(d_S è anzi l'unica soluzione nonnegativa del problema (11)).

TEOREMA 4.5 ([2]). – *Sia $x_0 \in \Sigma_S$. Allora, le affermazioni seguenti sono equivalenti.*

(a) $x_0 \notin \text{co}\, \text{proj}_S(x_0)$.

(b) *Esiste un arco singolare lipschitziano non costante $\boldsymbol{x}(s)$, $s \in [0, \sigma]$, che verifica*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(s) \in D^+ d_S(\boldsymbol{x}(s)) \ \textit{q.o. in } [0, \sigma] \\ \boldsymbol{x}(0) = x_0 . \end{cases} \tag{12}$$

4.4. *Cut locus.*

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e limitato con frontiera di classe C^2, e poniamo

$$d(x) = d_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega}(x), \qquad \text{proj}\,(x) = \text{proj}_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega}(x), \qquad \Sigma = \Sigma_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega}.$$

La chiusura di Σ, $\overline{\Sigma}$, coincide con il cosiddetto «cut locus» di $\partial\Omega$ in Ω. In letteratura, questo insieme viene anche indicato come *medial axis* o *ridge* (vedi, ad es., [14]). Si dimostra inoltre che $\overline{\Sigma}$ è un connesso non vuoto, di misura nulla, e che $d \in C^2(\overline{\Omega} \backslash \overline{\Sigma})$.

Siano ora $x \in \overline{\Omega} \backslash \overline{\Sigma}$ e $t > 0$ tali che $x + sDd(x) \notin \overline{\Sigma}$ per ogni $s \in [0, t)$. È ben noto che

(a) $d(x + sDd(x)) = d(x) + s$

(b) $Dd(x + sDd(x)) = Dd(x)$

(c) $\text{proj}\,(x + sDd(x)) = \text{proj}(x)$

per tutti gli $s \in [0, t)$. Dai punti (a) o (c) segue che $x + sDd(x) \in \overline{\Sigma}$ per almeno un $s > 0$. Quindi, l'applicazione $\tau : \overline{\Omega} \to [0, \operatorname{diam} \Omega/2]$

$$\tau(x) = \begin{cases} \min\left\{t \geqslant 0 : x + tDd(x) \in \overline{\Sigma}\right\} & \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{\Sigma} \\ 0 & \forall x \in \overline{\Sigma} \end{cases} \tag{13}$$

è ben definita. Tale funzione misura la distanza di un punto x dall'insieme $\overline{\Sigma}$ lungo la direzione $Dd(x)$ (si noti che in generale questa distanza differisce dalla distanza di x da $\overline{\Sigma}$), e viene chiamata *distanza normale* da $\overline{\Sigma}$ (o dal cut locus).

Lo studio della regolarità della distanza normale τ, ancora agli inizi, è molto interessante e si preannuncia ricco di applicazioni. Mentre è piuttosto semplice vedere che τ è *continua* su $\overline{\Omega}$, la questione si fa più complessa quando si cercano risultati di regolarità di grado più elevato. Un passo importante in questa direzione è il seguente.

TEOREMA 4.6. – *Se Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera di classe $C^{2,1}$, allora la distanza normale τ è lipschitziana su $\partial\Omega$.*

Una prima dimostrazione di questo risultato si trova in [26] per frontiere di classe C^∞. Sotto l'ipotesi $\partial\Omega \in C^{2,1}$ il risultato precedente è dimostrato in [34]. Nel caso bidimensionale ($N = 2$) si può dare una dimostrazione semplice del Teorema 4.6 usando il Teorema 4.3, come mostrato in [10]. Osserviamo che il risultato precedente è falso se si indebolisce l'ipotesi di regolarità su $\partial\Omega$, ad esempio se si suppone che $\partial\Omega$ sia di classe $C^{2,\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$.

Un'applicazione immediata del Teorema 4.6 è che, se Ω è un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera di classe $C^{2,1}$, allora la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale di $\overline{\Sigma}$ è finita. Più precisamente,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\overline{\Sigma}) \leqslant k_\Omega \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega) < \infty$$

dove $k_\Omega \geqslant 0$ è una costante che dipende dalla costante di Lipschitz di τ e dal massimo della curvatura di $\partial\Omega$.

Osserviamo che, dal risultato di lipschizianità del Teorema 4.6 e dal fatto che $\operatorname{proj}(\cdot)$ è regolare su $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Sigma}$, segue immediatamente che τ è localmente lipschitziana in $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Sigma}$. Una domanda naturale è allora se tale proprietà di lipschitzianità valga su tutto $\overline{\Omega}$. La risposta è, peraltro, negativa a causa della presenza dei cosiddetti *punti focali* (o punti *coniugati* della funzione distanza), come si constata con semplici esempi. Per domini piani dotati di frontiera analitica reale, si può tuttavia dimostrare un risultato di regolarità hölderiana globale per τ su $\overline{\Omega}$ (vedi [12]).

5. – Pile di sabbia.

In quest'ultima parte della trattazione ci occuperemo del sistema di equazioni a derivate parziali

$$
\begin{cases} -\operatorname{div}(vDu) = f & \text{in } \Omega \\ |Du| - 1 = 0 & \text{in } \{v > 0\} \end{cases} \tag{14}
$$

in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^2.

Il sistema (14) si presenta naturalmente nello studio della dinamica di materia granulare, problema che è stato oggetto di numerosi lavori già da qualche decennio, vedi ad es. [35], e [19]. Recentemente, Hadeler e Kuttler [25] hanno proposto un modello matematico, costruito su quello iniziale di Boutreux e de Gennes [9], per descrivere l'evoluzione della pila che si forma versando materia granulare (ad es. sabbia) su di un «tavolo». In tale modello, il tavolo è rappresentato da un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e la sorgente di sabbia da una funzione $f(t, x) \geqslant 0$. La descrizione della pila che si forma fa uso della nozione di *strato fisso* e *strato mobile* (in inglese *standing layer* e *rolling layer*, rispettivamente). Il primo contiene la quantità di materia che resta a riposo, il secondo la materia che rotola giù lungo la superficie dello strato fisso e finisce col cadere quando la base della pila tocca la frontiera del tavolo.

Il sistema (14) descrive le configurazioni di equilibrio del modello fisico quando la sorgente è costante in t. Per spiegare questo collegamento conviene indicare con $u(x)$ e $v(x)$, rispettivamente, l'altezza dello strato fisso e quella dello strato mobile di una configurazione di equilibrio in un punto $x \in \Omega$. Per considerazioni di natura fisica, la pendenza dello strato fisso non può eccedere una data costante, tipica del materiale in esame, che noi supporremo normalizzata a 1. Pertanto, lo strato fisso deve annullarsi sul bordo del tavolo. Quindi, $|Du| \leqslant 1$ in Ω e $u = 0$ su $\partial\Omega$. Inoltre, nella regione in cui v è positiva, lo strato fisso deve avere altezza massimale perchè altrimenti altra materia rotolerebbe lì per andarsi a fermare. D'altra parte, lo strato mobile consta della materia che viene trasportata dal supporto della sorgente di sabbia lungo la superficie dello strato fisso a una velocità proporzionale alla pendenza di Du (con costante di proporzionalità che supporremo ancora uguale a 1). Da tali considerazioni si è allora portati a considerare il problema

$$
\begin{cases} -\operatorname{div}(vDu) = f & \text{in } \Omega \\ |Du| - 1 = 0 & \text{in } \{v > 0\} \\ |Du| \leqslant 1 \quad u, v \geqslant 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{15}
$$

Oltre all'interpretazione appena descritta, il sistema (14) ha altre applicazioni notevoli a problemi di grande interesse, quali la teoria del trasporto ottimo (vedi, ad es., [20] e [4]), l'analisi del comportamento asintotico per $p \to \infty$ dell'equazione $-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = f$ (vedi [7], [27] e [19]), e, per finire, l'ottimizzazione delle forme (vedi [8]).

Prima di enunciare un risultato rigoroso di esistenza e unicità per il problema (15) può essere utile iniziare a capire la struttura di un'eventuale soluzione (u, v) con considerazioni di tipo euristico. Osserviamo innanzitutto che, siccome u risolve l'equazione iconale nell'aperto $\{v > 0\}$ e si annulla su $\partial\Omega$, è naturale supporre $u(x) \equiv d(x)$ in tale insieme, dove $d(x)$ indica la distanza dal bordo di Ω già considerata nella sezione 4.4. Inoltre, considerazioni di natura fisica portano a concludere che lo strato mobile è uguale a zero sul cut locus — proprietà che si può peraltro dedurre anche da (15).

Sia dunque (d, v) una soluzione classica del problema (15), con v uguale a zero su $\overline{\Sigma}$. Fissato un punto $x \in \Omega \setminus \overline{\Sigma}$, calcoliamo, per ogni $t > 0$, più piccolo della distanza normale dal cut locus $\tau(x)$, la derivata

$$(16)\qquad \frac{d}{dt} v(x + tDd(x)) = \langle Dv(x + tDd(x), Dd(x)\rangle =$$
$$- v(x + tDd(x))\, \Delta d(x + tDd(x)) - f(x + tDd(x))$$

(qui abbiamo usato la relazione $Dd(x + tDd(x)) = Dd(x)$).

A questo punto, per poter procedere, dobbiamo calcolare il laplaciano della funzione distanza. A questo scopo, per $y \in \partial\Omega$, indichiamo con $\kappa(y)$ la curvatura di $\partial\Omega$ in y, adottando la convenzione $\kappa \geqslant 0$ per Ω convesso. Con un piccolo abuso di notazione, denoteremo con lo stesso simbolo l'estensione di κ a $\overline{\Omega} \setminus \Sigma$ definita come

$$(17)\qquad \kappa(y) = \kappa(\operatorname{proj}(y)) \qquad \forall y \in \overline{\Omega} \setminus \Sigma\,.$$

È allora ben noto che, per ogni $y \in \overline{\Omega} \setminus \overline{\Sigma}$ si ha

$$\kappa(y)\, d(y) < 1 \qquad \text{e} \qquad D^2 d(y) = -\frac{\kappa(y)}{1 - \kappa(y)\, d(y)}\, q \otimes q$$

dove q è un qualsiasi vettore unitario, ortogonale a $Dd(y)$.

Ritorniamo ora alla formula (16). Per le considerazioni precedenti si ha

$$\Delta d(x + tDd(x)) = -\frac{\kappa(x)}{1 - (d(x) + t)\, \kappa(x)}$$

poiché $\kappa(x + tDd(x)) = \kappa(x)$ e $d(x + tDd(x)) = d(x) + t$. Pertanto, $V(t) :=$

$v(x + tDd(x))$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} V'(t) - \dfrac{\kappa(x)}{1 - (d(x) + t)\,\kappa(x)} V(t) + f(x + tDd(x)) = 0 \\ V(\tau(x)) = 0\,. \end{cases}$$

Integrando l'equazione precedente e osservando che $v(x) = V(0)$, concludiamo che

$$v(x) = \int_0^{\tau(x)} f(x + tDd(x))\, \frac{1 - (d(x) + t)\,\kappa(x)}{1 - d(x)\,\kappa(x)}\, dt \qquad \forall x \in \Omega \setminus \overline{\Sigma}\,.$$

Veniamo ora ad una descrizione più tecnica di come si può studiare il sistema (14). Osserviamo innanzitutto che, come ben noto, l'equazione iconale $|Du| = 1$ non possiede, in generale, soluzioni classiche globali, e così pure la legge di conservazione $-\operatorname{div}(vDu) = f$. Dobbiamo quindi chiarire cosa intendiamo per soluzione di (15). Diremo che una coppia (u, v) di funzioni *continue* in Ω è soluzione del problema (15) se:

- $u = 0$ su $\partial\Omega$, $\|Du\|_{\infty,\Omega} \leqslant 1$, e u è soluzione di viscosità di
$$|Du| = 1 \quad \text{nell'aperto} \quad \{x \in \Omega : v(x) > 0\}$$
- $v \geqslant 0$ in Ω e, per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,
$$\int_\Omega v(x) \langle Du(x), D\phi(x) \rangle\, dx = \int_\Omega f(x)\, \phi(x)\, dx\,.$$

Incidentalmente, notiamo che la nozione di soluzione di viscosità porta con sé la proprietà di massimalità dello strato fisso, giustificata in precedenza con considerazioni di natura fisica. Siamo ora in grado di enunciare un risultato di esistenza e unicità per il problema (15).

TEOREMA 5.1 ([10]). – *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato con frontiera di classe C^2 e $f \geqslant 0$ una funzione continua in Ω. Allora una soluzione del problema* (15) *è data dalla coppia* (d, v^f), *dove* $v^f = 0$ *su* $\overline{\Sigma}$ *e*

$$v^f(x) = \int_0^{\tau(x)} f(x + tDd(x))\, \frac{1 - (d(x) + t)\,\kappa(x)}{1 - d(x)\,\kappa(x)}\, dt \qquad \forall x \in \Omega \setminus \overline{\Sigma}\,. \tag{18}$$

Inoltre, vale il seguente risultato di unicità: se (u, v) *è un'altra soluzione di* (15), *allora* $v = v^f$ *in* Ω, *e* $u = d$ *su* $\{x \in \Omega : v^f > 0\}$.

Osserviamo che la formula (18) estende al caso bidimensionale la formula di rappresentazione ottenuta in [25] per domini unidimensionali.

Un'ulteriore caratteristica interessante del teorema precedente, che lo differenzia da analoghi risultati ottenuti per il problema del trasporto ottimo, è che esso fornisce una soluzione continua invece che una soluzione integrabile o addirittura una soluzione misura.

Inoltre, come mostrato in [12], la (18) permette di dedurre che v è hölderiana su $\overline{\Omega}$. Tale risultato è ottimale per considerazioni analoghe a quelle fatte nella sezione 4.4 a proposito della distanza normale dal cut locus.

Va notato, infine, che in [11] il Teorema 5.1 è stato esteso al caso di dimensione $N \geqslant 2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. Albano - P. Cannarsa, *Structural properties of singularities of semiconcave functions*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat., **28** (1999), 719-740.

[2] P. Albano - P. Cannarsa, *Propagation of singularities for solutions of nonlinear first order partial differential equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., **162** (2002), 1-23.

[3] G. Alberti - L. Ambrosio - P. Cannarsa, *On the singularities of convex functions*, Manuscripta Math., **76** (1992), 421-435.

[4] L. Ambrosio, *Optimal transport maps in Monge-Kantorovich problem*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. III* (*Beijing* 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 131-140.

[5] D. G. Aronson, *The porous medium equation*, in *Some problems on nonlinear diffusion* (Fasano A. and Primicerio M., Eds.), Lect. Notes Math. **1224**, Springer, 1986, 1-46.

[6] M. Bardi - I. Capuzzo Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[7] T. Bhattacharya - E. Di Benedetto - J. Manfredi, (1991) *Limits as* $p \to \infty$ *of* $\Delta_p u_p = f$ *and related extremal problems*, Some topics in nonlinear PDEs (Turin, 1989). Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 1989, 15-68.

[8] G. Bouchitté - G. Buttazzo, *Characterization of optimal shapes and masses through Monge-Kantorovich equation*, J. Eur. Math. Soc., **3**, No. 2 (2001), 139-168.

[9] T. Boutreux - P.-G. de Gennes, *Surface flows of granular mixtures, I. General principles and minimal model*, J. Phys. I France, **6** (1996), 1295-1304.

[10] P. Cannarsa - P. Cardaliaguet, *Representation of equilibrium solutions to the table problem for growing sandpile*, J. Eur. Math. Soc., **6** (2004), 1-30.

[11] P. Cannarsa - P. Cardaliaguet - G. Crasta - E. Giorgieri, *A boundary value problem for a PDE model in mass transfer theory: representation of solutions and applications*, pre-print.

[12] P. Cannarsa - P. Cardaliaguet - E. Giorgieri, *The table problem for granular matter: regularity of solutions*, pre-print.

[13] P. Cannarsa - C. Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations and optimal control*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[14] H. I. Choi - S. W. Choi - H. P. Moon, *Mathematical theory of medial axis transform*, Pac. J. Math., **181** (1997), 57-88.
[15] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.
[16] A. Douglis, *The continuous dependence of generalized solutions of non-linear partial differential equations upon initial data*, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 267-284.
[17] P. Erdös, *Some remarks on the measurability of certain sets*, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945), 728-731.
[18] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, A.M.S., Providence, 1998.
[19] L. C. Evans - M. Feldman - R. Gariepy, *Fast/slow diffusion and collapsing sandpiles*, J. Differential Equations, **137**, no. 1 (1997), 166-209.
[20] L. C. Evans - W. Gangbo, *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Mem. Amer. Math. Soc., **137**, no. 653, 1999.
[21] Fleming W. H., *The Cauchy problem for a nonlinear first order partial differential equation*, J. Diff. Eq., **5** (1969), 515-530.
[22] Fleming W. H. - McEneaney W. M., *A max-plus based algorithm for an HJB equation of nonlinear filtering*, SIAM J. Control Optim., **38** (2000), 683-710.
[23] W. H. Fleming - H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
[24] J. H. G. Fu, *Tubular neighborhoods in Euclidean spaces*, Duke Math. J., **52** (1985), 1025-1046.
[25] K. P. Hadeler - C. Kuttler, *Dynamical models for granular matter*, Granular Matter, **2** (1999), 9-18.
[26] J. Itoh - M. Tanaka, *The Lipschitz continuity of the distance function to the cut locus*, Trans. Am. Math. Soc., **353**, No. 1 (2001), 21-40.
[27] U. Janfalk, *Behaviour in the limit, as $p \to \infty$, of minimizers of functionals involving p-Dirichlet integrals*, SIAM J. Math. Anal., **27**, no. 2 (1996), 341-360.
[28] S. N. Kruzhkov, *The Cauchy problem in the large for certain nonlinear first order differential equations*, Soviet. Math. Dokl., **1** (1960), 474-477.
[29] S. N. Kruzhkov, *The Cauchy problem in the large for nonlinear equations and for certain quasilinear systems of the first order with several variables*, Soviet. Math. Dokl., **5** (1964), 493-496.
[30] S. N. Kruzhkov, *Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of the eikonal type I*, Math. USSR Sb., **27** (1975), 406-445.
[31] X. J. Li - J. M. Yong *Optimal control theory for infinite-dimensional systems*, Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 1995.
[32] P. L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman, Boston, 1982.
[33] T. Motzkin, *Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **21** (1935), 562-567.
[34] Y. Y. Li - L. Nirenberg, *The distance function to the boundary, Finsler geometry and the singular set of viscosity solutions of some Hamilton-Jacobi equations*, pre-print.
[35] L. Prigozhin, *Variational model of sandpile growth*, European J. Appl. Math., **7**, no. 3 (1996), 225-235.
[36] Rifford L., *Existence of Lipschitz and semiconcave control-Lyapunov functions*, SIAM J. Control Optim., **39** (2000), 1043-1064.

[37] RIFFORD L., *Semiconcave control-Lyapunov functions and stabilizing feedbacks*, SIAM J. Control Optim., **41** (2002), 659-681.
[38] ROCKAFELLAR R. T., *Favorable classes of Lipschitz continuous functions in subgradient optimization*, in *Progress in Nondifferential Optimization* (Nurminski E., Ed.), IIASA Collaborative Proceedings Series, Laxenburg, **125** (1982).
[39] L. ZAJAÍČEK, *On the points of multiplicity of monotone operators*, Comment. Math. Univ. Carolin., **19** (1978), 179-189.
[40] L. ZAJÍČEK, *On the differentiation of convex functions in finite and infinite dimensional spaces*, Czechoslovak Math. J., **29** (1979), 340-348.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «Tor Vergata»
Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma

Pervenuta in Redazione
il 7 ottobre 2004