
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

NICOLA FUSCO

Simmetrizzazione e disuguaglianze di tipo Pòlya-Szegö

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-B (2005),
n.3, p. 529–548.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_3_529_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Simmetrizzazione e disuguaglianze di tipo Pòlya-Szegö.

NICOLA FUSCO (*)

Summary. – *We present some recent results concerning the Pólya-Szegö inequality and the characterization of the equality cases. In particular we will be concerned with the Steiner symmetrization of sets of finite perimeter and Sobolev functions.*

Sunto. – *Si presentano alcuni risultati recenti riguardanti la disuguaglianza di Pólya-Szegö e la caratterizzazione dei casi in cui essa si riduce ad un'uguaglianza. Particolare attenzione viene rivolta alla simmetrizzazione di Steiner di insiemi di perimetro finito e di funzioni di Sobolev.*

1. – Introduzione.

Lo scopo di questa nota è quello di fornire un quadro complessivo su alcuni risultati recenti relativi alla disuguaglianza di Pòlya-Szegö e alla caratterizzazione dei casi in cui tale disuguaglianza si riduce a un'uguaglianza. I funzionali modello cui ci riferiremo nel seguito sono: il perimetro di un insieme E di \mathbb{R}^n e l'integrale di Dirichlet di una funzione scalare u . Ricordiamo che la disuguaglianza di Pòlya-Szegö afferma che entrambe queste quantità decrescono quando a E o alla funzione u si sostituiscono delle loro opportune simmetrizzazioni. Le simmetrizzazioni che verranno considerate qui sono la simmetrizzazione sferica (o di Schwarz) e la simmetrizzazione di Steiner.

Nel caso di insiemi a frontiera regolare o di funzioni di classe C^1 le disuguaglianze relative al perimetro o all'integrale di Dirichlet sono ormai classiche ([22], [26], [21]). Inoltre, approssimando un insieme di perimetro finito con aperti regolari e una funzione di Sobolev con funzioni C^1 , tali disuguaglianze si

(*) Conferenza tenuta a Milano il 9 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

estendono facilmente per semicontinuità a situazioni più generali ([19], [24], [5]). Tuttavia con ragionamenti di approssimazione non si ottiene alcuna informazione sui casi di uguaglianza nella disuguaglianza di Pòlya-Szegö. Per caratterizzare questi ultimi occorre invece utilizzare proprietà fini degli insiemi di perimetro finito e delle funzioni di Sobolev che a loro volta richiedono l'uso di delicati strumenti di teoria geometrica della misura.

Cominciamo dal caso degli insiemi, ricordando che un sottoinsieme misurabile E di \mathbb{R}^n si dice di *perimetro finito* se la quantità

$$(1.1) \quad P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi \, dx : \phi \in [C_0^1(\mathbb{R}^n)]^n, \|\phi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\},$$

detta *perimetro* di E , è finita. Si osservi che se E è un aperto C^1 si ha $P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$ (qui e nel seguito con \mathcal{H}^k indicheremo la misura di Hausdorff k -dimensionale in \mathbb{R}^n). Per un insieme qualunque un'uguaglianza di questo tipo vale (si veda [13] o [2, Theorem 3.59]) se alla frontiera topologica ∂E si sotituisce un insieme più piccolo, la frontiera ridotta $\partial^* E$ (si veda la definizione nel paragrafo 2). Si ha infatti

$$(1.2) \quad P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E)$$

per ogni insieme E di perimetro finito.

Se come funzionale sulla classe degli insiemi di perimetro finito consideriamo il perimetro e se indichiamo con E^* la palla di \mathbb{R}^n avente la stessa misura di E la disuguaglianza di Pòlya-Szegö si riduce allora alla ben nota disuguaglianza isoperimetrica

$$(1.3) \quad P(E^*) \leq P(E),$$

provata per la prima volta in questa forma così generale da De Giorgi in [14]. Nello stesso lavoro De Giorgi prova anche che se per un insieme E di misura finita la (1.3) si riduce a un'uguaglianza, allora E coincide con E^* a meno di un insieme di misura nulla.

La situazione è più complicata quando si considera la simmetrizzazione di Steiner di un insieme di perimetro finito. Per semplicità qui e nel seguito ci riferiremo, senza perdere in generalità, al caso in cui l'iperpiano di simmetrizzazione coincide col piano ortogonale all'ultimo asse coordinato. Per tale motivo risulterà comodo denotare il generico punto x di \mathbb{R}^n con (x', y) , dove $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}$. Dato allora un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n definiamo per ogni $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} E_{x'} &= \{y \in \mathbb{R} : (x', y) \in \mathbb{R}^n\}, \\ \ell_E(x') &= \mathcal{L}^1(E_{x'}). \end{aligned}$$

dove qui e nel seguito con \mathcal{L}^k denotiamo la misura (esterna) di Lebesgue in \mathbb{R}^k .

Il *simmetrizzato di Steiner* E^s di E rispetto all'iperpiano $y = 0$ è definito allora come l'insieme

$$E^s = \{(x', y) \in \mathbb{R}^n : |y| < \ell_E(x')/2\}.$$

Si può allora provare che se E è di perimetro finito anche E^s lo è; inoltre vale la seguente disuguaglianza di tipo Pòlya-Szegö

$$(1.5) \quad P(E^s) \leq P(E)$$

(si veda [14] o anche [24]). Per quanto riguarda invece la caratterizzazione dei casi in cui vale l'uguaglianza nella (1.5), è ben noto (e abbastanza facile da dimostrare) che se E è un aperto convesso dall'uguaglianza nella (1.5) segue che E^s coincide con E a meno di una traslazione nella direzione y . Il caso di un insieme di perimetro finito, recentemente studiato in [8], è però molto più delicato e sarà discusso nel paragrafo 2.

Passiamo ora alle funzioni scalari, ricordando che se u è una funzione non negativa a supporto compatto in \mathbb{R}^n la sua *simmetrizzata sferica* o *riordinamento sferico* è una funzione $u^* : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ a simmetria radiale, decrescente lungo ogni raggio e i cui insiemi di livello hanno la stessa misura degli insiemi di livello di u . Più precisamente si ha

$$u^*(x) = \sup \{t \geq 0 : \mathcal{L}^n(\{u > t\}) > \omega_n |x|^n\} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n,$$

dove ω_n denota la misura di Lebesgue della palla unitaria di \mathbb{R}^n .

Si osservi che le funzioni u e u^* sono equidistribuite, cioè $\mu_u(t) = \mu_{u^*}(t)$ per ogni $t \geq 0$, dove la *funzione distribuzione* μ_u di u è definita ponendo

$$\mu(t) = \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > t\}) \quad \text{per } t \geq 0.$$

Pertanto ogni norma invariante per riordinamento, cioè ogni norma che dipende solo dalla misura degli insiemi di livello di una funzione, come le norme di Lebesgue, di Lorentz o di Orlicz, è invariante per simmetrizzazione sferica. È anche possibile provare che se u è una funzione non negativa a supporto compatto appartenente a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ anche u^* è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Inoltre, la disuguaglianza di Pòlya-Szegö afferma che

$$(1.6) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \quad \text{per ogni } p \geq 1.$$

Una dimostrazione della (1.6) si può trovare in [23] e [6], mentre generalizzazioni e varianti sono provate in numerosi articoli fra cui ricordiamo [15], [19], [3], [1], [25], [4], [5], [9], [10], [11]. In particolare la (1.6) si estende al caso in cui $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione non negativa a supporto compatto e A è una *funzione di Young*, cioè una funzione convessa da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$, con

$A(0) = 0$. In tal caso risulta

$$(1.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u^*|) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u|) dx.$$

La caratterizzazione delle funzioni per cui vale l'uguaglianza nella (1.6), o più generalmente nella (1.7), è stato un problema aperto per parecchio tempo. Nel caso di funzioni analitiche è stata data in [20] e successivamente in [27] è stata estesa alla classe più ampia delle funzioni di classe C^n . Il caso delle funzioni di Sobolev è stato invece risolto da Brothers e Ziemer in [6] (si veda anche [17]) i quali hanno provato il seguente risultato.

TEOREMA 1.1. – *Siano A una funzione di Young strettamente convessa tale che*

$$0 \leq A(t) \leq L(1 + t^p) \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

per qualche $p \geq 1$, e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ una funzione non negativa a supporto compatto. Se nella (1.7) vale l'uguaglianza e se inoltre

$$(1.8) \quad \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n: \nabla u^*(x) = 0 \text{ e } 0 < u^*(x) < \text{ess sup } u\}) = 0,$$

allora u coincide con u^ (a meno di una traslazione nella x).*

Osserviamo che l'ipotesi di stretta convessità di A è essenziale per la validità del teorema. Infatti se ad esempio $A(t) = t$, allora si ha facilmente $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx$ per ogni funzione i cui insiemi di livello siano delle sfere. Basta quindi prendere una qualunque funzione u , anche regolare, i cui livelli siano delle sfere non concentriche per avere l'uguaglianza nella (1.7) senza che u coincida con u^* .

Per quanto riguarda la condizione (1.8) osserviamo che essa segue dalla

$$(1.9) \quad \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n: \nabla u(x) = 0 \text{ e } 0 < u(x) < \text{ess sup } u\}) = 0$$

e che equivale all'assoluta continuità della funzione di distribuzione μ_u di u .

La necessità della condizione (1.8) (anche in dimensione uno), è evidente quando si considerino la funzione affine a tratti v rappresentata nella Figura 1 e la sua simmetrizzata v^* . In [6] è presentato un esempio più fine di una funzione $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, non coincidente con u^* e per cui si ha l'uguaglianza in (1.6), il cui gradiente è nullo su un sottoinsieme di misura positiva del supporto e per cui si ha che $\mathcal{L}^n(\{u = t\}) = 0$ per ogni $t \in (0, \max u)$.

Passiamo ora a considerare la simmetrizzazione di Steiner di una funzione misurabile non negativa. Come nel caso degli insiemi anche per le funzioni ci limiteremo, senza perdita di generalità, a considerare solo la simmetrizzazione

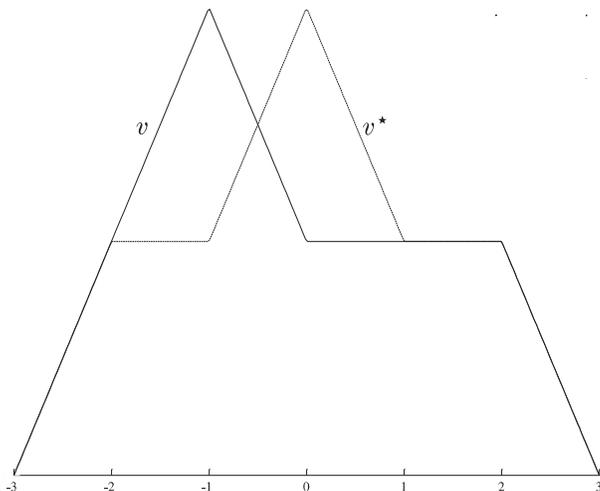


Fig. 1. – Si osservi che $\int_{-3}^3 |v^{*'}(x)|^p dx = \int_{-3}^3 |v'(x)|^p dx$ per ogni $p \geq 1$, ma $v^* \neq v$.

nella direzione dell'asse verticale y e a tale scopo indicheremo con π la proiezione ortogonale di \mathbb{R}^n sullo spazio \mathbb{R}^{n-1} delle prime $n - 1$ componenti. Siano dunque E un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e u una funzione misurabile non negativa in E tale che per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \pi(E)$ si abbia

$$\mathcal{L}^1(\{y \in \mathbb{R} : u(x', y) > t\}) < \infty \quad \text{per ogni } t > 0.$$

La *simmetrizzata* (o *riordinamento*) *secondo Steiner* di u è la funzione $u^s : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$u^s(x', y) = \inf \{t > 0 : \mu_u(x', t) \leq 2|y|\} \quad \text{per ogni } (x', y) \in \mathbb{R}^n,$$

dove

$$(1.10) \quad \mu_u(x', t) = \mathcal{L}^1(\{y \in \mathbb{R} : u_0(x', y) > t\})$$

è la funzione distribuzione di $u(x', \cdot)$ e u_0 denota il prolungamento a zero di u fuori di E . Dunque, se per esempio u è una funzione misurabile non negativa a supporto compatto in \mathbb{R}^n , $u^s(x', \cdot)$ coincide per ogni $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ con il riordinamento sferico della restrizione di u nella direzione verticale. Si osservi che le nozioni di simmetrizzazione secondo Steiner di un insieme e di una funzione sono strettamente collegate. Infatti, indicando con

$$\mathcal{S}_u = \{(x', y, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < t < u(x', y)\}$$

il sottografico di u , si verifica facilmente che

$$(1.11) \quad \mathcal{S}_{u^s} \text{ è equivalente (modulo } \mathcal{L}^{n+1}) \text{ a } (\mathcal{S}_u)^s$$

e che per ogni $t > 0$

$$(1.12) \quad \{(x', y) : u^s(x', y) > t\}$$

è equivalente (modulo \mathcal{L}^n) a $\{(x', y) : u(x', y) > t\}^s$.

Dalla (1.12) segue allora che anche le funzioni u e u^s sono equidistribuite e quindi anche in questo caso le norme di Lebesgue, di Lorentz, etc., delle due funzioni coincidono. Anche per la simmetrizzazione secondo Steiner di due funzioni di Sobolev vale una disuguaglianza di tipo Pölya-Szegö. Si può infatti provare ([7], [5]) che se u è una funzione non negativa a supporto compatto appartenente a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $p \geq 1$, anche u^s è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e inoltre, se A è una qualunque funzione di Young, si ha

$$(1.13) \quad \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u^s|) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u|) dx.$$

Il fatto che in questo caso si simmetrizza solo rispetto alla variabile y suggerisce che la (1.13) si possa estendere anche ad integrandi di tipo più generale, non necessariamente dipendenti dal modulo del gradiente. A tale scopo consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ verificante la condizione

$$(1.14) \quad f(0) = 0$$

e simmetrica rispetto all'ultima variabile, cioè tale che

$$(1.15) \quad f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, -\xi_n)$$

per ogni $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dato un aperto Ω di \mathbb{R}^n le funzioni verranno scelte in una classe di funzioni che si annullano solo sulla parte della frontiera di Ω contenuta nel cilindro $\pi(\Omega) \times \mathbb{R}$. Più precisamente, per ogni $p \geq 1$ poniamo

$$W_{0,y}^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u_0 \in W^{1,p}(\omega \times \mathbb{R}) \text{ per ogni aperto } \omega \subset \pi(\Omega)\}.$$

Vale allora la seguente generalizzazione della disuguaglianza di Pölya-Szegö (1.13) (si veda per esempio [12]).

TEOREMA 1.2. – *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia u una funzione non negativa appartenente a $W_{0,y}^{1,p}(\Omega)$ per qualche $p \geq 1$. Allora $u^s \in W_{0,y}^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, se f è un integrando convesso verificante le (1.14) e (1.15), si ha*

$$(1.16) \quad \int_{\Omega} f(\nabla u^s) dx \leq \int_{\Omega} f(\nabla u) dx.$$

Nel paragrafo 3 discuteremo il caso in cui nella (1.16) vale l'uguaglianza.

È interessante notare che le disuguaglianze di tipo Pölya-Szegö (1.7) e (1.16) si estendono naturalmente a funzionali integrali definiti su $BV(\Omega)$ a pat-

to di sostituire i funzionali che compaiono nelle varie disuguaglianze con i corrispondenti funzionali *rilassati* rispetto alla convergenza $L^1_{loc}(\Omega)$. Consideriamo ad esempio la disuguaglianza (1.7) e poniamo, per ogni funzione $u \in BV(\mathbb{R}^n)$, non negativa e a supporto compatto,

$$J_A(u) = \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u|) dx + A_\infty |D^s u|(\mathbb{R}^n).$$

Qui A è una funzione di Young a crescita lineare, $A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)/t$, ∇u è la parte assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue) del gradiente distribuzionale Du e $|D^s u|(\mathbb{R}^n)$ è la variazione totale della parte singolare $D^s u$ di Du . Fissata dunque u , si può provare che esiste una successione u_h di funzioni regolari con gradienti equilimitati in L^1 , non negative e a supporto compatto, che approssimano u in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e tali che $J_A(u_h) \rightarrow J_A(u)$. Poiché i riordinamenti sferici di u_h convergono in $L^1(\mathbb{R}^n)$ al riordinamento sferico di u , se ne deduce subito che anche u^* è una funzione $BV(\mathbb{R}^n)$ e applicando la (1.7) alle approssimanti u_h , per semicontinuità, si conclude che

$$(1.17) \quad \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u|^*) dx + A_\infty |D^s u^*|(\mathbb{R}^n) \leq \int_{\mathbb{R}^n} A(|\nabla u|) dx + A_\infty |D^s u|(\mathbb{R}^n).$$

Non discuteremo oltre il caso delle funzioni BV . Per la generalizzazione della (1.16) a BV e per la discussione dei casi di uguaglianza nelle disuguaglianze tipo Pòlya-Szegö in BV rimandiamo ai lavori [11], [12], [16], [18].

2. - Insiemi di perimetro finito.

Richiamiamo alcune proprietà fondamentali degli insiemi di perimetro finito, cominciando con l'osservare che dalla definizione (1.1) segue, in virtù del teorema di Riesz sulla rappresentazione dei funzionali lineari e continui in $[C_0(\mathbb{R}^n)]^n$, che un sottoinsieme misurabile E di \mathbb{R}^n è di perimetro finito se e solo se la derivata nel senso delle distribuzioni $D\chi_E$ della sua funzione caratteristica χ_E è una misura di Radon a valori in \mathbb{R}^n con variazione totale finita. Grazie a ciò possiamo estendere la nozione di perimetro di E in un boreliano qualunque A di \mathbb{R}^n ponendo

$$P(E; A) = |D\chi_E|(A).$$

Naturalmente continueremo ad usare la notazione più compatta $P(E)$ per denotare $P(E; \mathbb{R}^n)$, il perimetro di E in \mathbb{R}^n . Dato un insieme di perimetro finito E , indichiamo con ν_i^E , $i = \dots, n$, la derivata della misura $D_i\chi_E$ rispetto alla variazione totale $|D\chi_E|$ di $D\chi_E$.

La *frontiera ridotta* $\partial^* E$ di E è definita allora come l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che il vettore $\nu^E(x) = (\nu_1^E(x), \dots, \nu_n^E(x))$ esiste e $|\nu^E(x)| = 1$. Il vettore

re $\nu^E(x)$ è detto *normale interna generalizzata* a E in x e risulta

$$(2.1) \quad D\chi_E = \nu^E \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E .$$

La (2.1) va intesa nel senso che la misura che compare al primo membro si ottiene integrando la normale generalizzata ν^E sulla frontiera ridotta $\partial^* E$ rispetto alla misura di Hausdorff \mathcal{H}^{n-1} . Si osservi che la (1.2) è una conseguenza immediata della (2.1) e della definizione di perimetro come variazione totale di $|D\chi_E|$. Si osservi infine che, se E è un insieme di misura finita, dire che E ha perimetro finito equivale a dire che la sua funzione caratteristica χ_E appartiene allo spazio $BV(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a variazione limitata. Con il linguaggio delle funzioni BV possiamo allora dire che la (2.1) esprime il fatto che la derivata di χ_E ha una componente puramente di salto ed è concentrata sulla frontiera ridotta di E .

Le considerazioni appena fatte si estendono in modo ovvio al caso degli insiemi di perimetro localmente finito in un dato aperto Ω di \mathbb{R}^n , quelli cioè per cui la derivata distribuzionale $D\chi_E$ è una misura di Radon in Ω (e quindi a variazione finita sui compatti di Ω).

Per dare un'idea della dimostrazione della (1.5) e soprattutto di come si possano caratterizzare i casi in cui tale disuguaglianza è un'uguaglianza dobbiamo richiamare due risultati di teoria geometrica della misura. Il primo è un caso particolare della formula di coarea per insiemi rettificabili e fornisce una formula analoga a quella del teorema di Fubini per integrare una funzione boreliana g da \mathbb{R}^n in $[0, +\infty]$ sulla frontiera ridotta di un insieme di perimetro finito,

$$(2.2) \quad \int_{\partial^* E} g(x) |\nu_n^E(x)| d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{(\partial^* E)_{x'}} g(x', y) d\mathcal{H}^0(y) .$$

Il secondo risultato, dovuto a Vol'pert [28], è relativo alle sezioni unidimensionali degli insiemi di perimetro finito. A tale scopo, denoteremo con $\pi(E)^+$ la *proiezione essenziale* di un sottoinsieme misurabile E di \mathbb{R}^n , ponendo $\pi(E)^+ = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \ell_E^+(x') > 0\}$.

TEOREMA 2.1. – *Sia E un insieme di perimetro finito in \mathbb{R}^n . Allora, per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,*

$$(2.3) \quad E_{x'} \text{ ha perimetro finito in } \mathbb{R}^n ;$$

$$(2.4) \quad (\partial^* E)_{x'} = \partial^*(E_{x'}) ;$$

$$(2.5) \quad \nu_y^E(x', y) \neq \text{ per ogni } y \text{ tale che } (x', y) \in \partial^* E ;$$

esiste una funzione $\chi_E^(x', \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ tale che $\chi_E^*(x', z) = \chi_E(x', z)$ per*

\mathcal{L}^1 -q.o. $z \in \mathbb{R}$, e

$$(2.6) \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow y^+} \chi_E^*(x', z) = 1, & \lim_{z \rightarrow y^-} \chi_E^*(x', z) = 0 & \text{se } \nu_y^E(x', y) > 0 \\ \lim_{z \rightarrow y^+} \chi_E^*(x', z) = 0, & \lim_{z \rightarrow y^-} \chi_E^*(x', z) = 1 & \text{se } \nu_y^E(x', y) < 0. \end{cases}$$

In particolare, esiste un boreliano $G_E \subset \pi(E)^+$ tale che $\mathcal{L}^{n-1}(\pi(E)^+ \setminus G_E) = 0$ e tale che le (2.3)-(2.6) valgono per ogni $x' \in G_E$.

Il prossimo risultato, provato in [8], illustra la relazione esistente fra la variazione totale del gradiente della funzione ℓ_E definita in (1.4) in un boreliano $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ con il perimetro di E nel cilindro $B \times \mathbb{R}$.

LEMMA 2.2. – Sia E un insieme di perimetro finito in \mathbb{R}^n di misura finita. Allora $\ell_E \in BV(\mathbb{R}^n)$ e per ogni boreliano $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ risulta

$$(2.7) \quad |D\ell_E|(B) \leq |D\chi_E|(B \times \mathbb{R}_y).$$

Inoltre, denotando con $\nabla \ell_E$ la parte assolutamente continua di $D\ell_E$ rispetto alla misura di Lebesgue \mathcal{L}^{n-1} , per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \pi(E)^+$, si ha

$$(2.8) \quad \nabla_i \ell_E(x') = \int_{\partial^* E_{x'}} \frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|} d\mathcal{H}^0(y) \quad i = 1, \dots, n-1.$$

OSSERVAZIONE 2.3. – Si osservi che dal Lemma 2.2 segue che il simmetrizzato di Steiner E^s di E , essendo compreso fra il grafico delle funzioni a variazione limitata $\ell_E/2$ e $-\ell_E/2$, è un insieme di perimetro (almeno localmente) finito. Inoltre, applicando la (2.8) a E^s , essendo $\ell_E \equiv \ell_{E^s}$ e $\pi(E)^+ = \pi(E^s)^+$, otteniamo

$$(2.9) \quad \nabla_i \ell_E(x') = 2 \frac{\nu_i^{E^s}}{|\nu_y^{E^s}|} \Big|_{\partial^*(E^s)_{x'}} \quad i = 1, \dots, n-1,$$

per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \pi^+(E)$.

Ragionando come in [8], mostriamo allora come si prova la disuguaglianza (1.5).

DIMOSTRAZIONE DELLA (1.5). – Per semplicità supponiamo che E sia di misura finita.

Poniamo

$$(2.10) \quad B = G_E \cap G_{E^s},$$

dove G_E e G_{E^s} sono i boreliani contenuti rispettivamente in $\pi(E)^+$ e $\pi(E^s)^+$ per cui valgono le (2.3)-(2.6) del Teorema 2.1.

La prima parte della dimostrazione, per la quale rimandiamo al già citato lavoro [8], utilizza la (2.7) per dedurre che in corrispondenza della parte verticale della frontiera ridotta di E il perimetro decresce. Più precisamente si ha

$$(2.11) \quad P(E^s; \mathbb{R}^n \setminus (B \times \mathbb{R})) \leq P(E; \mathbb{R}^n \setminus (B \times \mathbb{R}))$$

dove B è il boreliano definito nella (2.10).

Proviamo ora che anche la parte di perimetro contenuta nel cilindro $B \times \mathbb{R}$ decresce. Si ha

$$(2.12) \quad \begin{aligned} P(E^s; B \times \mathbb{R}) &= \int_{\partial^* E^s \cap (B \times \mathbb{R})} d\mathcal{H}^{n-1} = \int_B dx' \int_{(\partial^* E^s)_{x'}} \frac{d\mathcal{H}^0(y)}{|\nu_y^{E^s}(x', y)|} \\ &= \int_B dx' \int_{(\partial^* E^s)_{x'}} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_i^{E^s}(x', y)}{\nu_y^{E^s}(x', y)} \right)^2} d\mathcal{H}^0(y), \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza è dovuta alla (2.1), la seconda è conseguenza della formula di coarea (2.2) (che possiamo applicare in quanto $\nu_y^{E^s}(x) \neq 0$ su $\partial^* E^s \cap (G_{E^s} \times \mathbb{R})$) e la terza è dovuta al fatto che sulla frontiera ridotta risulta $|\nu^{E^s}| = 1$. Dalla (2.9) e dalla (2.4) applicata a E^s otteniamo, ricordando la (2.8),

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \int_B dx' \int_{(\partial^* E^s)_{x'}} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_i^{E^s}(x', y)}{\nu_y^{E^s}(x', y)} \right)^2} d\mathcal{H}^0(y) &= \\ \int_B dx' \int_{\partial^*(E^s)_{x'}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} |\nabla \ell_E(x')|^2} d\mathcal{H}^0(y) &= \int_B \sqrt{4 + |\nabla \ell_E(x')|^2} dx' \leq \\ \int_B \sqrt{\left(\int_{\partial^*(E_{x'})} d\mathcal{H}^0 \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_{\partial^*(E_{x'})} \frac{\nu_i^E(x', y)}{|\nu_y^E(x', y)|} d\mathcal{H}^0(y) \right)^2} dx' &\leq \\ \int_B dx' \int_{\partial^*(E_{x'})} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_i^E(x', y)}{\nu_y^E(x', y)} \right)^2} d\mathcal{H}^0(y), \end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza è una semplice applicazione della disuguaglianza di Minkowski, mentre la prima è dovuta al fatto che poiché $E_{x'}$ è un insieme di perimetro finito di misura finita la sua frontiera ridotta contiene almeno due punti.

Poiché le stesse uguaglianze che compaiono nella (2.12) valgono anche per E , concludiamo che

$$(2.14) \quad \int_B dx' \int_{\partial^*(E_{x'})} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\nu_i^E(x', y)}{\nu_y^E(x', y)} \right)^2} d\mathcal{H}^0(y) = P(E; B \times \mathbb{R}).$$

Mettendo insieme le (2.12), (2.13), (2.14), si ha

$$(2.15) \quad P(E^s; B \times \mathbb{R}) \leq P(E; B \times \mathbb{R})$$

e da questa, ricordando la (2.11), segue immediatamente la (1.5). ■

Passiamo ora a discutere cosa succede quando nella (1.5) vale il segno di uguaglianza. Un primo risultato (si veda [8]) si può ottenere ripercorrendo la dimostrazione appena conclusa.

PROPOSIZIONE 2.4. – *Sia E un insieme di perimetro finito in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, tale che*

$$(2.16) \quad P(E^s) = P(E).$$

Allora, o E è equivalente a \mathbb{R}^n , oppure $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ e per \mathcal{L}^{n-1} -quasi ogni $x' \in \pi(E)^+$

$$(2.17) \quad E_{x'} \text{ è equivalente ad un segmento } (y_1(x'), y_2(x'))$$

e inoltre

$$(2.18) \quad (\nu_1^E, \dots, \nu_{n-1}^E, \nu_y^E)(x', y_1(x')) = (\nu_1^E, \dots, \nu_{n-1}^E, -\nu_y^E)(x', y_2(x')).$$

DIMOSTRAZIONE. – Limitiamoci a considerare per semplicità il caso in cui E sia di misura finita.

Come nella precedente dimostrazione, poniamo $B = G_E \cap G_{E^s}$. Dall'ipotesi (2.16) e dalle disuguaglianze (2.11) e (2.15) otteniamo in particolare che

$$P(E^s; B \times \mathbb{R}) = P(E; B \times \mathbb{R}).$$

Dalla dimostrazione della (2.15) segue che entrambe le disuguaglianze che compaiono nella (2.13) devono essere delle uguaglianze. Il fatto che la prima di queste disuguaglianze valga come uguaglianza implica allora che

$$(2.19) \quad \mathcal{H}^0(\partial^*(E_{x'})) = 2 \quad \text{per } \mathcal{L}^{n-1}\text{-q.o. ogni } x' \in B.$$

Poiché dal Teorema 2.1 si ha che $\mathcal{L}^n(\pi(E)^+ \setminus B) = 0$, ne segue che la (2.19) vale in definitiva per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. ogni $x' \in \pi(E)^+$. D'altra parte, essendo un insieme di perimetro finito in \mathbb{R} unione di un numero finito di intervalli, si deduce che

per $x' \in \pi(E)^+$ \mathcal{L}^{n-1} -quasi ovunque $E_{x'}$ è equivalente ad un segmento $(y_1(x'), y_2(x'))$.

Per provare la (2.18), osserviamo che dal fatto che anche la seconda disuguaglianza nella (2.13) è in realtà un'uguaglianza e dal fatto che $|\nu^E| \equiv 1$ su $\partial^* E$ segue allora che per quasi ogni $x' \in \pi(E)^+$

$$\nu_i^E(x', y_1(x')) = \nu_i^E(x', y_2(x')) \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1,$$

$$\nu_y^E(x', y_1(x')) = \pm \nu_y^E(x', y_2(x')).$$

Infine, il fatto che l'ultima disuguaglianza valga proprio con il segno « - » discende facilmente dalla (2.6). ■

Osserviamo subito che il teorema appena dimostrato non permette di concludere che dall'uguaglianza dei perimetri (2.16) segue necessariamente che E coincide con E^s come si evince subito dall'esempio illustrato in Figura 2.

In questo esempio si ha che $P(E^s) = P(E)$ e, naturalmente, valgono le conclusioni del Teorema 2.4, ma E non coincide con alcun traslato di E^s . È anche chiaro che il problema è dovuto al fatto che la frontiera di E contiene segmenti paralleli all'asse y che si proiettano all'interno della proiezione di E (mentre i segmenti paralleli all'asse y che si proiettano sulla frontiera di $\pi(E)$ non danno alcun fastidio). Si osservi che l'esempio illustrato in figura si può facilmente generalizzare considerando insiemi di perimetro finito più complicati la cui frontiera ridotta non contiene segmenti paralleli all'asse y , ma comunque ha una parte «verticale» di misura \mathcal{H}^{n-1} finita. Per evitare una situazione di que-

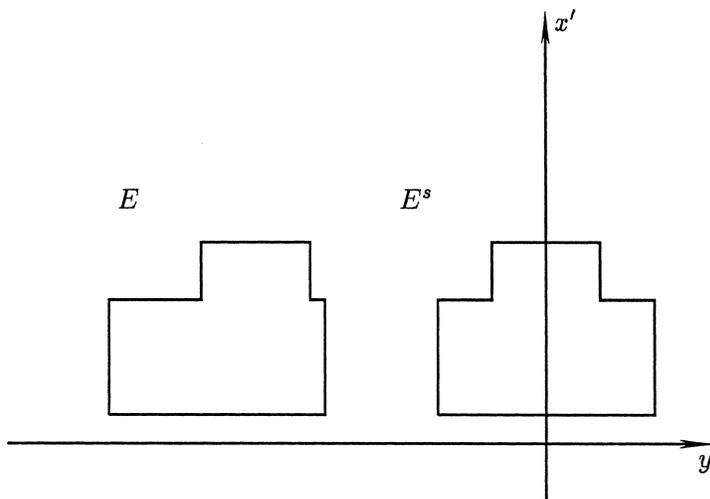


Fig. 2.

sto tipo è allora necessario imporre la seguente condizione di «non verticalità».

Esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, con $\mathcal{L}^{n-1}(\pi(E)^+ \setminus U) = 0$, tale che

$$(2.20) \quad \partial \mathcal{C}^{n-1}(\{x \in \partial^* E^s : \nu_y^E(x) = 0\} \cap (U \times \mathbb{R})) = 0.$$

Grosso modo, la (2.20) dice che la frontiera (ridotta) di E^s non ha parti verticali che si proiettano all'interno di $\pi(E)^+$ e ovviamente taglia via l'esempio proposto in Figura 2.

È interessante notare che la (2.20) è equivalente ad una condizione più analitica che ancora una volta coinvolge la funzione ℓ_E .

PROPOSIZIONE 2.5. – *Sia E un insieme di perimetro finito in \mathbb{R}^n di misura finita e sia U un aperto di \mathbb{R}^{n-1} . Le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (i) $\partial \mathcal{C}^{n-1}(\{x \in \partial^* E^s : \nu_y^E(x) = 0\} \cap (U \times \mathbb{R})) = 0$,
- (ii) $\ell_E \in W^{1,1}(U)$.

Mentre il Lemma 2.2 stabilisce che in generale ℓ_E è solo una funzione di classe BV , dalla Proposizione 2.5 segue che la parte singolare della derivata distribuzionale $D\ell_E$ è concentrata proprio sulla proiezione della parte verticale della frontiera ridotta di E^s . Se tali tratti verticali non sono presenti, $D\ell_E$ non ha parte singolare e quindi ℓ_E è una funzione di Sobolev. Si noti inoltre che l'equivalenza appena enunciata coinvolge il simmetrizzato di Steiner di E e non E . In realtà si può dimostrare che la condizione (i) con E al posto di E^s implica la validità della stessa condizione per E^s . Il viceversa però non è sempre vero e dunque la (2.20) è più generale della stessa condizione scritta con E al posto di E^s .

Tuttavia, neanche la condizione di non verticalità (2.20) è sufficiente a concludere che dalla (2.16) segue l'uguaglianza di E e E^s , come illustrato dall'esempio in Figura 3.

Questa volta il problema è rappresentato dal fatto che l'insieme E è «essenzialmente sconnesso», anche se dal punto di vista strettamente topologico è connesso. Dobbiamo allora evitare che, come accade nell'esempio in figura, in qualche punto la funzione ℓ_E che misura le sezioni di E nella direzione parallela a y converga a zero. Per esprimere questo fatto in maniera rigorosa, tenendo conto del fatto che ℓ_E è una funzione misurabile, possiamo utilizzare la Proposizione 2.5, ricordando che una funzione di Sobolev di $n-1$ variabili può essere precisata \mathcal{C}^{n-2} -quasi ovunque. Infatti se U è un aperto di \mathbb{R}^{n-1} per cui valga la (i), e quindi anche la (ii) della Proposizione 2.5, $\ell_E \in W^{1,1}(U)$ e quindi

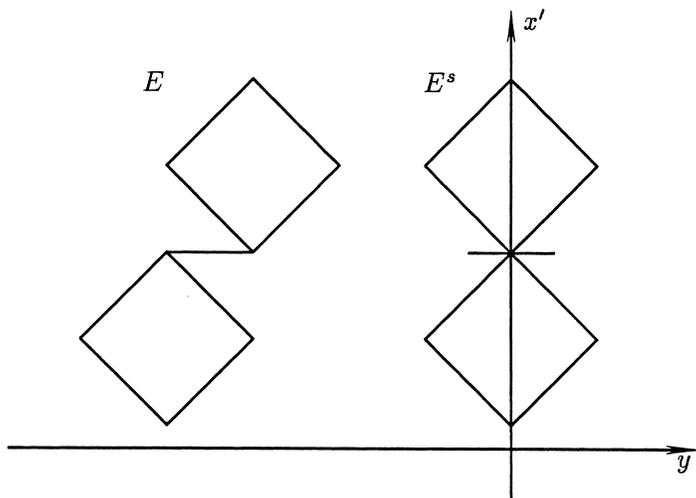


Fig. 3.

per \mathcal{H}^{n-2} -q.o. $x' \in U$ esiste $\tilde{l}_E(x') \in \mathbb{R}$ tale che

$$(2.21) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^{n-1}(B_r^{n-1}(x'))} \int_{B_r^{n-1}(x')} |l_E(z') - \tilde{l}_E(x')| dz' = 0,$$

dove $B_r^{n-1}(x')$ è la palla di \mathbb{R}^{n-1} di centro x' e raggio r .

Il seguente risultato, provato in [8] mostra che gli esempi illustrati nelle Figure 2 e 3 sono gli unici casi in cui le cose possono effettivamente andare male.

TEOREMA 2.6. – *Sia E un insieme di perimetro finito in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, per cui valga la (2.16). Supponiamo che esista un aperto connesso U di \mathbb{R}^{n-1} , con $\mathcal{L}^{n-1}(\pi(E)^+ \setminus U) = 0$, per cui valga la (2.20) e per cui risulti*

$$\tilde{l}_E(x') > 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^{n-2}\text{-q.o. } x' \in U.$$

Allora E è equivalente a E^s (a meno di traslazioni nella direzione y).

La dimostrazione di questo risultato è piuttosto delicata e non vi accenneremo qui. Ci limitiamo soltanto ad osservare che il teorema appena enunciato contiene come caso particolare quello di un aperto convesso E , caso che come abbiamo detto nel paragrafo precedente può essere trattato in maniera assai più elementare.

3. – Funzionali integrali.

Consideriamo ora il caso di un funzionale integrale del tipo

$$\int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx .$$

Come abbiamo detto nell'introduzione, nel caso della simmetrizzazione sferica non solo la disuguaglianza di Pòlya-Szegö (1.7), ma anche la caratterizzazione dei casi in cui tale disuguaglianza diventa un'uguaglianza sono ormai ben acquisiti (si veda il Teorema 1.1). Ci concentreremo allora solo sulla simmetrizzazione di Steiner di una funzione di Sobolev. Per quanto riguarda la Pòlya-Szegö essa è stata provata solo in tempi recenti in [7], [5], e generalizzata nella forma (1.16) in [12]. In questo paragrafo discuteremo il risultato di caratterizzazione dei casi di uguaglianza ottenuto in [12].

Cominciamo col dire che il caso delle funzioni è per certi versi simile a quello, già visto, degli insiemi di perimetro finito. Ciò non deve stupire quando si tenga presente che se u è una funzione non negativa il simmetrizzato di Steiner $(S_u)^s$ del sottografico S_u di u coincide a meno di un insieme di misura nulla con il sottografico S_{u^s} della simmetrizzata di Steiner di u (si veda la (1.11)). Infatti, come nel caso degli insiemi di perimetro finito un ruolo fondamentale è giocato dalla funzione ℓ_E che misura le sezioni di E , così ora lo stesso ruolo verrà giocato dalla funzione di distribuzione $\mu_u(x', t)$ definita in (1.10). A tale scopo, ricordiamo che se $u \in W^{1,1}(\Omega)$, con Ω aperto di \mathbb{R}^n , per \mathcal{H}^{n-1} -q.o. $x \in \Omega$ esiste $\tilde{u}(x) \in \mathbb{R}$, la rappresentante preciso di u in x , per cui risulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)| \, dy = 0 .$$

LEMMA 3.1. – Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n limitato nella direzione y , e sia u una funzione non negativa appartenente allo spazio $W_{0,y}^{1,1}(\Omega)$. Allora, $\mu_u \in BV(\omega \times (0, +\infty))$ per ogni aperto $\omega \subset \subset \pi(\Omega)$ e per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \pi(\Omega)$ si ha

$$(3.1) \quad \nabla_t \mu_u(x', t) = - \int_{\{y: \tilde{u}(x', y) > t\}} \frac{1}{|\nabla_y u|} \, d\mathcal{H}^0,$$

$$(3.2) \quad \nabla_i \mu_u(x', t) = \int_{\{y: \tilde{u}(x', y) > t\}} \frac{\nabla_i u}{|\nabla_y u|} \, d\mathcal{H}^0 \quad i = 1, \dots, n-1,$$

per \mathcal{L}^1 -q.o. $t \in (0, M(x'))$, dove $M(x') = \text{ess sup} \{u(x', y) : y \in \Omega_{x'}\}$.

È evidente l'analogia del lemma appena enunciato con il Lemma 2.2 relativo agli insiemi di perimetro finito. Infatti, anche in questo caso è possibile dare

una formula esplicita per la parte assolutamente continua delle derivate della funzione di distribuzione μ_u . E come nel caso degli insiemi di perimetro finito un punto chiave della dimostrazione della (1.16) e della Proposizione 3.2 è costituito dal fatto che, poiché u e u^s hanno la stessa funzione di distribuzione, è possibile passare dall'integrale di $f(\nabla u)$ a quello di $f(\nabla u^s)$, osservando che le (3.1) e (3.2) continuano ancora a valere, essendo $\mu_u = \mu_{u^s}$, anche quando a secondo membro si sostituiscono le derivate di u con quelle di u^s .

La controparte della formula di coarea (2.2) per gli insiemi di perimetro finito è ora costituita dalla formula di coarea per le funzioni BV che, nel caso in cui u sia una funzione di Sobolev, stabilisce che se $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e $g: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione boreliana si ha

$$(3.3) \quad \int_{\Omega} g(x) |\nabla u(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Omega \cap \{\tilde{u}=t\}} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Infine, il Teorema 2.1 andrà sostituito con la proprietà ben nota per cui se $u \in W^{1,1}(\Omega)$ allora per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \pi(\Omega)$ la funzione $u(x', \cdot)$ appartiene allo spazio di Sobolev unidimensionale $W^{1,1}(\Omega_{x'})$ e $\nabla_y u(x', \cdot)$ coincide \mathcal{L}^1 -q.o. con la derivata distribuzionale di $u(x', \cdot)$.

Una volta che si tenga conto delle differenze fra i due casi, la dimostrazione della (1.16) procede in maniera simile a quella della disuguaglianza (1.5) vista nel paragrafo 2. Inoltre, al posto della Proposizione 2.4, otterremo il seguente risultato di caratterizzazione delle funzioni estremali nella (1.16).

PROPOSIZIONE 3.2. – *Siano f una funzione strettamente convessa verificante le (1.14), (1.15) e Ω un aperto di \mathbb{R}^n limitato nella direzione y . Sia u una funzione non negativa dello spazio $W_{0,y}^{1,1}(\Omega)$ tale che*

$$(3.4) \quad \mathcal{L}^n(\{(x', y) \in \Omega : \nabla_y u(x', y) = 0 \text{ e, o } M(x') = 0, \\ \text{oppure } u(x', y) < M(x')\}) = 0.$$

Se

$$(3.5) \quad \int_{\Omega^s} f(\nabla u^s) dx = \int_{\Omega} f(\nabla u) dx < \infty,$$

allora, per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \pi(\Omega)$, per \mathcal{L}^1 -q.o. $t \in (0, M(x'))$ esistono $y_1(x', t), y_2(x', t) \in \mathbb{R}$, con $y_1(x', t) < y_2(x', t)$, tali che

$$(3.6) \quad \{y : u(x', y) > t\} \text{ è equivalente a } (y_1(x', t), y_2(x', t)),$$

$$(3.7) \quad \nabla_i u(x', y_1(x', t)) = \nabla_i u(x', y_2(x', t)) \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(3.8) \quad \nabla_y u(x', y_1(x', t)) = -\nabla_y u(x', y_2(x', t)).$$

Osserviamo che, poiché la (3.4) coinvolge la restrizione di u alla sola variabile y , si prova facilmente che essa equivale alla condizione che si ottiene sosti-

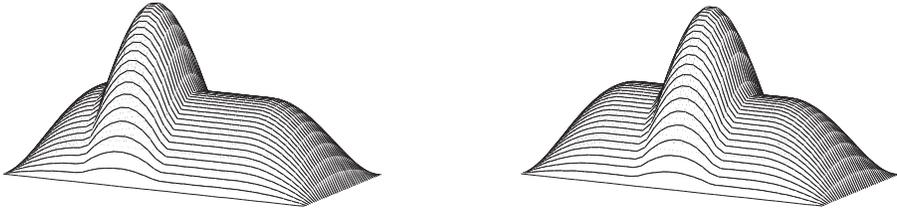


Fig. 4. – A sinistra è rappresentato il grafico di u e a destra quello di u^s .

tuendo u con u^s . Inoltre è chiaro che tale condizione gioca lo stesso ruolo giocato dalla (1.8) nel Teorema 1.1 e come in quel caso è un'ipotesi essenziale per la validità del risultato, come si evince dalla Figura 4. Tuttavia, a differenza del caso della simmetrizzazione di Schwarz, e così come accadeva per gli insiemi di perimetro finito, la Proposizione 3.2 non permette di concludere che, se vale la (3.5), allora u e u^s coincidono. Dovremo quindi aggiungere delle ulteriori condizioni.

A tale riguardo è evidente che la condizione

$$(3.9) \quad \pi(\Omega) \text{ è connesso,}$$

è necessaria. Inoltre dovremo richiedere che

$$(3.10) \quad \Omega \text{ è limitato nella direzione } y$$

e che Ω soddisfa una condizione del tipo di quella considerata nella (2.20), cioè che

$$(3.11) \quad \Omega \text{ ha perimetro localmente finito in } \pi(\Omega) \times \mathbb{R}_y \text{ e} \\ \mathcal{H}^{n-1}(\{(x', y) \in \partial^* \Omega : \nu_y^\Omega(x', y) = 0\} \cap (\pi(\Omega) \times \mathbb{R}_y)) = 0.$$

L'esempio illustrato in Figura 5 mostra che anche la condizione (3.11) è necessaria. Peraltro una semplice variante di quest'esempio mostra che anche la condizione (3.10) non può essere eliminata.

Con tali ipotesi su Ω si perviene allora al seguente risultato di caratterizzazione dei casi di uguaglianza nella (1.16).



Fig. 5. – L'insieme di definizione di u è unione di due rettangoli.

TEOREMA 3.3. – Siano f una funzione strettamente convessa verificante le (1.14), (1.15) e Ω un aperto di \mathbb{R}^n verificante le condizioni (3.9)-(3.11). Sia u una funzione non negativa dello spazio $W_{0,y}^{1,1}(\Omega)$ soddisfacente la (3.4). Se

$$\int_{\Omega^s} f(\nabla u^s) dx = \int_{\Omega} f(\nabla u) dx < \infty,$$

allora u^s è equivalente a u (a meno di una traslazione nella direzione y).

Anche l'ipotesi di stretta convessità di f è essenziale per la validità del Teorema 3.3. Supponiamo infatti ad esempio che $f(\xi) = |\xi|$ e prendiamo una funzione $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto i cui insiemi di livello siano simmetrici rispetto a degli iperpiani paralleli a $\{y = 0\}$, ma non coincidenti. Allora u non è equivalente ad alcuna traslata di u^s , ma come conseguenza della formula di coarea (3.3) si ha comunque che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\nabla u) dx &= \int_0^\infty P(\{u > t\}) dt = \int_0^\infty P(\{u > t\}^s) dt \\ &= \int_0^\infty P(\{u^s > t\}) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(\nabla u^s) dx. \end{aligned}$$

Concludiamo illustrando brevemente l'idea utilizzata nella dimostrazione del Teorema 3.3. Il punto di partenza è il risultato stabilito nella Proposizione 3.2 che garantisce che per \mathcal{L}^{n-1} -q.o. $x' \in \pi(\Omega)$ la funzione $u(x', \cdot)$ è a simmetrizzazione sferica intorno ad un centro di simmetria $b(x')$ che in generale dipenderà da x' (come nel caso illustrato nella Figura 5). L'idea è allora quella di dimostrare che nelle ipotesi del Teorema 3.3 tali centri di simmetria $b(x')$ sono rappresentati da una funzione $W^{1,1}$ (e non generalmente BV come accade se non si fanno ulteriori ipotesi). Successivamente, utilizzando il Lemma 3.1, si calcolano esplicitamente le derivate di $b(x')$ e si prova che quest'ultime sono nulle. Da ciò, grazie all'ipotesi (3.9), si deduce che i centri di simmetria delle restrizioni di u alla y sono allineati e quindi che u coincide a meno di traslazioni con la sua simmetrizzata di Steiner.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ALVINO - V. FERONE - P. L. LIONS - G. TROMBETTI, *Convex symmetrization and rearrangements*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **14** (1997), 275-293.

- [2] L. AMBROSIO - N. FUSCO - D. PALLARA, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [3] A. BAERNSTEIN II, *A unified approach to symmetrization*, in Partial differential equations of elliptic type, A. Alvino, E. Fabes & G. Talenti eds., Symposia Math. 35, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [4] F. BETTA - F. BROCK - A. MERCALDO - M. POSTERARO, *A weighted isoperimetric inequality and applications to symmetrization*, J. Ineq. Appl., 4 (1999), 215-240.
- [5] F. BROCK, *Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner Symmetrization*, Calc. Var., 8 (1999), 15-25.
- [6] J. BROTHERS - W. ZIEMER, *Minimal rearrangements of Sobolev functions*, J. Reine. Angew. Math., 384 (1988), 153-179.
- [7] A. BURCHARD, *Steiner symmetrization is continuous in $W^{1,p}$* , Geom. Funct. Anal., 7 (1997), 823-860.
- [8] M. CHLEBÍK - A. CIANCHI - N. FUSCO, *Perimeter inequalities for Steiner symmetrization: cases of equalities*, in corso di stampa su Annals of Mathematics.
- [9] A. CIANCHI, *Second order derivatives and rearrangements*, Duke Math. J., 105 (2000), 355-385.
- [10] A. CIANCHI, *Rearrangements of functions in Besov spaces*, Math. Nachr., 230 (2001), 19-35.
- [11] A. CIANCHI - N. FUSCO, *Functions of bounded variation and rearrangements*, Arch. Rat. Mech. Anal., 165 (2002), 1-40.
- [12] A. CIANCHI - N. FUSCO, *Steiner symmetric extremals in Pólya-Szegő type inequalities*, preprint del Dip. Mat. e Appl. Univ. Napoli, n. 17 (2003).
- [13] E. DE GIORGI, *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$ -dimensionali in uno spazio a r dimensioni*, Ricerche Mat., 4 (1955), 95-113.
- [14] E. DE GIORGI, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I, 5 (1958), 33-44.
- [15] A. EHRHARD, *Inégalités isoperimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 17 (1984), 317-332.
- [16] L. ESPOSITO - C. TROMBETTI, *Convex symmetrization and Pólya-Szegő inequality*, Nonlinear Anal., 56 (2004), 43-62.
- [17] A. FERONE - R. VOLPICELLI, *Minimal rearrangements of Sobolev functions: a new proof*, Ann. Inst. H.Poincaré, Anal. Nonlinéaire, 20 (2003), 333-339.
- [18] A. FERONE - R. VOLPICELLI, *Convex symmetrization: the equality case in the Pólya-Szegő inequality*, in corso di stampa su Calc. Var. and PDE's.
- [19] B. KAWOHL, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Math. 1150, Springer-Verlag, Berlin (1985).
- [20] B. KAWOHL, *On the isoperimetric nature of a rearrangement inequality and its consequences for some variational problems*, Arch. Rat. Mech. Anal., 94 (1986), 227-243.
- [21] G. PÓLYA - G. SZEGŐ, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, Ann. of Math. Studies, 27, Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [22] J. STEINER, *Gesammelte Werke*, 2, Reimer, Berlin, 1882.
- [23] G. TALENTI, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl., 110 (1976), 353-372.
- [24] G. TALENTI, *The standard isoperimetric theorem*, in Handbook of convex geometry, P. M. Gruber and J. M. Wills eds., North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [25] G. TALENTI, *A weighted version of a rearrangement inequality*, Ann. Univ. Ferrara, 43 (1997), 121-133.

- [26] L. TONELLI, *Sulla proprietà di minimo della sfera*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **39** (1915), 109-138.
- [27] A. URIBE, *Minima of the Dirichlet norm and Toeplitz operators*, preprint (1985).
- [28] A. I. VOL'PERT, *Spaces BV and quasi-linear equations*, Math. USSR Sb., **17** (1967), 225-267.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli «Federico II»
Via Cintia, 80126 Napoli (Italy). E-mail: n.fusco@unina.it

Pervenuta in Redazione
il 20 settembre 2004