Bollettino Unione Matematica Italiana

Maria De Falco

Modularità nei gruppi non-periodici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-B** (2005), n.2, p. 349–358.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8B_2_349_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
(8) 8-B (2005), 349-358

Modularità nei Gruppi Non-periodici.

MARIA DE FALCO (*)

Summary. – *Results concerning the structure of non-periodic groups whose subgroups satisfy a suitable modularity condition are discussed in this paper.*

Sunto. – *In questo lavoro sono contenuti alcuni risultati riguardanti la struttura dei gruppi non-periodici in cui sottogruppi verificano opportune condizioni di modularità.*

1. – Introduzione.

Se H è un sottogruppo di un gruppo G, si dice che H è *modulare* in G se H è un elemento modulare del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ costituito da tutti i sottogruppi di G. I gruppi con reticolo dei sottogruppi modulare, cioè i gruppi in cui ogni sottogruppo è modulare, sono stati descritti da K. Iwasawa e R. Schmidt (cfr. [7], [8], [11]).

Se G e $\overline{G}$ sono gruppi, una *proiettività* tra G e $\overline{G}$ è un isomorfismo tra il reticolo $\mathfrak{L}(G)$ e il reticolo $\mathfrak{L}(\overline{G})$. Si noti che se φ è una proiettività tra G e $\overline{G}$, l'immagine mediante φ di un sottogruppo normale di G può non essere un sottogruppo normale di $\overline{G}$. Infatti esiste una proiettività tra il gruppo simmetrico di grado 3 e un gruppo abeliano elementare di ordine 9; d'altra parte l'immagine proiettiva di un qualunque sottogruppo normale è certamente un sottogruppo modulare. Alla luce di questa osservazione appare naturale considerare la modularità come una traduzione reticolare della normalità.

Nel 1980 Zacher [14] e Rips hanno indipendentemente provato che una proiettività tra un gruppo G e un gruppo $\overline{G}$ manda ogni sottogruppo di indice finito di G in un sottogruppo di indice finito di $\overline{G}$. Questo risultato ha permesso recentemente di studiare classi di sottogruppi che rappresentano una traduzione reticolare di alcune classi di sottogruppi normali generalizzati.

(*) Comunicazione presentata a Milano in occasione del XVII Congresso U.M.I.

Sia H un sottogruppo di un gruppo G. Si ricordi che H si dice *almost normale* in G se H ha un numero finito di coniugati in G, cioè se il normalizzante $N_G(H)$ ha indice finito in G; si dice invece che H è *nearly normale* in G se l'indice $|H^G : H|$ è finito e che H è *normale-per-finito* in G se è finito l'indice $|H : H_G|$, dove H^G e H_G denotano rispettivamente la *chiusura normale* ed il *nocciolo* di H in G. L'insieme di tutti gli elementi di un gruppo G che generano sottogruppi almost normali è un sottogruppo caratteristico che viene chiamato *FC-centro* di G; si dice poi che G è un *FC-gruppo* se G coincide con il suo FC-centro, e si può dimostrare che G è un FC-gruppo se e solo se tutti i suoi sottogruppi ciclici sono nearly normali.

Se G è un gruppo e H è un suo sottogruppo, si dice che H è *almost modulare* in G se esiste un sottogruppo K di indice finito di G tale che H sia un sottogruppo modulare di K; si dice poi che H è *nearly modulare* in G se esiste un sottogruppo K modulare in G tale che H sia un sottogruppo di indice finito di K e che H è *modulare-per-finito* in G se esiste un sottogruppo K modulare in G tale che K sia un sottogruppo di indice finito di H. Dal risultato di Zacher e Rips segue allora che se φ è una proiettività tra un gruppo G e un gruppo $\overline{G}$, l'immagine mediante φ di un sottogruppo che sia almost normale, nearly normale o normale-per-finito in G è un sottogruppo rispettivamente almost modulare, nearly modulare o modulare-per-finito di $\overline{G}$. In una serie di recenti lavori è stata studiata la struttura dei gruppi in cui ogni sottogruppo sia almost modulare, nearly modulare o modulare-per-finito (cfr [5], [6], [2], [3]). Nel caso di gruppi periodici sono stati forniti dei risultati che costituiscono delle interpretazioni reticolari di due celebri teoremi di B.H. Neumann che riguardano rispetttivamente i gruppi in cui tutti i sottogruppi sono almost normali e quelli in cui tutti i sottogruppi sono nearly normali (cfr [9]) e di un risultato di J.T. Buckley, J.C. Lennox, B.H. Neumann, H. Smith e J. Wiegold concernente i gruppi in cui ogni sottogruppo è normale-per-finito (cfr [1]); un'esposizione di questi risultati è stata fornita in [4]. In questo articolo si fornirà un'esposizione dei risultati ottenuti per i gruppi non-periodici; tali risultati vanno visti in relazione al seguente teorema di caratterizzazione dei gruppi non-periodici con reticolo dei sottogruppi modulare.

TEOREMA 1.1 (K. Iwasawa [8]). – *Sia G un gruppo non periodico il cui reticolo dei sottogruppi è modulare. Allora G verifica le seguenti condizioni:*

(a) *L'insieme T di tutti gli elementi periodici di G è un sottogruppo normale di G e il gruppo quoziente G/T è abeliano.*

(b) *Ogni sottogruppo di T è normale in G; gli elementi di periodo primo e quelli di periodo 4 sono centrali in G.*

(c) *Se G/T non è localmente ciclico, G è un gruppo abeliano.*

2. – Sottogruppi modulari.

In questa sezione si esporranno alcune proprietà dei sottogruppi modulari di un gruppo.

LEMMA 2.1. – *Sia G un gruppo e siano x e y elementi periodici di G. Se il sottogruppo $\langle x \rangle$ è modulare in G, allora i prodotti xy e yx sono periodici.*

DIMOSTRAZIONE. – Poiché $\langle x \rangle$ è un sottogruppo modulare di G, il reticolo $\mathfrak{L}(\langle xy \rangle / \langle xy \rangle \cap \langle y \rangle)$ è isomorfo all'intervallo

$$[\langle x, xy \rangle / \langle y \rangle] = [\langle x, y \rangle / \langle y \rangle]$$

e quindi anche a $\mathfrak{L}(\langle y \rangle / \langle x \rangle \cap \langle y \rangle)$. Ne segue che $\langle xy \rangle / \langle xy \rangle \cap \langle y \rangle$ è un gruppo finito e quindi xy è periodico. Lo stesso argomento prova che il prodotto $x^{-1} y^{-1}$ è periodico e quindi anche l'elemento $yx = (x^{-1} y^{-1})^{-1}$ è periodico. ■

Il prossimo risultato si prova agevolmente utilizzando il Lemma 2.1.

LEMMA 2.2. – *Sia G un gruppo, e sia $(\langle x \rangle_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi ciclici finiti modulari in G. Allora il sottogruppo $\langle x_i \mid i \in I \rangle$ è periodico.*

È ben noto che i sottogruppi modulari massimali e non-normali di un gruppo sono sottogruppi massimali; d'altra parte l'esistenza dei gruppi di Tarski prova che un sottogruppo modulare massimale di un gruppo può avere indice infinito nel gruppo; seguendo una notazione introdotta da Stonehewer [13], si indicherà con $\mathfrak{X}$ la classe dei gruppi in cui i sottogruppi modulari massimali hanno indice finito e con $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}^S$ la classe dei gruppi in cui tutti i sottogruppi sono $\mathfrak{X}$-gruppi. Segue dalla definizione che se G è un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo e M è un sottogruppo modulare di G tale che l'intervallo $[G/M]$ sia finito, allora anche l'indice $|G : M|$ è finito, sicché i sottogruppi modulari di un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo sono *permodulari* (cfr [13], Theorem 1). È stato provato da Stonehewer che la classe $\overline{\mathfrak{X}}$ è abbastanza ampia e contiene, ad esempio, ogni gruppo risolubile-per-finito.

LEMMA 2.3. – *Sia G un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo, e sia X un sottogruppo modulare di G. Se X è almost normale in G, allora X^G / X_G è finito.*

DIMOSTRAZIONE. – Siano $X^{g_1}, \ldots, X^{g_t}$ i coniugati di X in G e si ponga $H = \langle X, g_1, \ldots, g_t \rangle$. Allora $X^G = X^H$, per cui l'indice $|X^G : X|$ è finito (cfr. [12], Lemma 6.2.8); ne segue che X^G / X_G è finito. ■

I prossimi due lemmi forniscono delle informazioni sul comportamento dei sottogruppi ciclici infiniti e modulari di un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo.

LEMMA 2.4. – *Sia G un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo e siano $\langle a_1, \ldots, a_t \rangle$ sottogruppi ciclici infiniti e modulari di G. Allora il gruppo $\langle a_1, \ldots, a_t \rangle$ è centrale-per-finito.*

DIMOSTRAZIONE. – Si consideri nell'insieme $\{a_1, \dots, a_t\}$ la relazione di equivalenza $\sim$ definita ponendo

$$a_i \sim a_j \quad \text{se e solo se} \quad \langle a_i \rangle \cap \langle a_j \rangle \neq \{1\},$$

e siano $C_1, \dots C_s$ le classi di equivalenza rispetto a $\sim$; si ponga per ogni $k = 1, \dots, s$ $X_k = \langle C_k \rangle$, sicché $[X_h, X_k] = \{1\}$ se $h \neq k$ (cfr. [13], Theorem 1.3). Qualunque sia $k \leqslant s$ l'intersezone $N_k = \bigcap_{a \in C_k} \langle a \rangle$ è un sottogruppo centrale e non identico di X_k e il gruppo quoziente X_k/N_k è finito, poiché è generato da un numero finito di sottogruppi finiti e modulari. Poiché $\langle X_1, \dots, X_s \rangle = \langle a_1, \dots, a_t \rangle$, segue che $\langle a_1, \dots, a_t \rangle / Z(\langle a_1, \dots, a_t \rangle)$ è finito. ■

Sia G un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo e sia $M(G)$ il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi ciclici infiniti e modulari di G; allora, per il Lemma 2.4, $M(G)$ è localmente centrale-per-finito, sicché il sottogruppo derivato $M(G)'$ è periodico e quindi l'insieme T di tutti gli elementi periodici di $M(G)$ è un sottogruppo normale di G. Sia x un elemento periodico di $M(G)$; allora per ogni sottogruppo ciclico infinito e modulare $\langle a \rangle$ di G si ha che $\langle x \rangle = \langle x, a \rangle \cap T$ è normale in $\langle x, a \rangle$, per cui $\langle x \rangle$ è normale in $M(G)$. Inoltre se x ha ordine 4, il gruppo $\langle x, a \rangle / \langle a^2 \rangle$ non è diedrale di ordine 8 e quindi x appartiene al centro di $M(G)$. Si ha allora che tutti i sottogruppi di T sono normali in $M(G)$ e che T è abeliano poiché non contiene sottogruppi isomorfi al gruppo dei quaternioni di ordine 8. Si vedrà in seguito che $M(G)$ svolge un ruolo cruciale nello studio della struttura dei gruppi in cui ogni sottogruppo è modulare-per-finito.

LEMMA 2.5. – *Sia G un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo privo di sottogruppi normali e periodici non identici. Allora $M(G)$ è un gruppo abeliano senza torsione e ogni sottogruppo ciclico infinito modulare di G è normale.*

DIMOSTRAZIONE. – Poiché il sottogruppo derivato di $M(G)$ è periodico per il Lemma 2.4, si ha che $M(G)$ è un gruppo abeliano senza torsione.

Sia $\langle a \rangle$ un sottogruppo ciclico infinito modulare di G, sicché anche la chiusura normale $\langle a \rangle^G$ è senza torsione. Se x è un elemento periodico di G, allora $\langle a, x \rangle \cap \langle a \rangle^G = \langle a \rangle$, per cui $\langle a \rangle^x = \langle a \rangle$. Sia ora y un elemento aperiodico di G. Se $\langle a \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$, allora y normalizza $\langle a \rangle$ (cfr. [13], Corollary 2.2); si supponga quindi che sia $\langle a \rangle \cap \langle y \rangle \neq \{1\}$, sicché $\langle a, y \rangle$ è centrale-per-finito e quindi $[a, y]$ è un elemento periodico di $\langle a \rangle^G$, per cui $[a, y] = 1$. Si è quindi provato che $\langle a \rangle$ è un sottogruppo normale di G. ■

3. – Il caso almost modulare.

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione del seguente teorema riguardante i gruppi non-periodici in cui ogni sottogruppo è almost modulare.

TEOREMA 3.1 (F. de Giovanni, C. Musella, Y.P. Sysak [5]). – *Sia G un gruppo non periodico in cui tutti i sottogruppi sono almost modulari. Allora:*

(a) *L'insieme T di tutti gli elementi periodici di G è un sottogruppo normale di G e il gruppo quoziente G/T è abeliano.*

(b) *Ogni sottogruppo di T è almost normale in G.*

(c) *Se G/T non è localmente ciclico, G è un FC-gruppo.*

LEMMA 3.2. – *Sia G un gruppo i cui sottogruppi ciclici sono almost modulari. Allora l'insieme di tutti gli elementi periodici di G è un sottogruppo.*

DIMOSTRAZIONE. – Si può chiaramente supporre che G non abbia sottogruppi normali e periodici non identici. Sia x un elemento periodico di G e sia X un sottogruppo di indice finito di G tale che $\langle x \rangle$ sia un sottogruppo modulare di X. Se N è il nocciolo di X in G, per ogni elemento y di N, $\langle x \rangle^y$ è un sottogruppo ciclico finito modulare in $\langle x, N \rangle$. Ne segue che $\langle x \rangle^N$ è un gruppo periodico per il Lemma 2.2 e quindi $[N, x]$ è un sottogruppo periodico e normale di G, per cui $[N, x] = \{1\}$ e N è contenuto in $C_G(x)$. Dunque la classe di coniugio di x in G è finita e allora, per il lemma di Dietzmann, $\langle x \rangle^G$ è finito (cfr [10], part 1, p.45) e $x = 1$, sicché G è senza torsione e il teorema è provato. ■

Nella dimostrazione del Teorema 3.1 si userà il seguente lemma, per la cui dimostrazione si rimanda a [5].

LEMMA 3.3. – *Sia $G = \langle x, y \rangle$ un gruppo residualmente finito in cui tutti i sottogruppi sono almost modulari. Se $\langle x \rangle$ è un sottogruppo modulare di G, allora G è supersolubile.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.1. – (a) Per il Lemma 3.2 l'insieme T degli elementi periodici di G è un sottogruppo, sicché, sostituendo G con G/T si può supporre che G sia senza torsione. Sia x un elemento di G e sia X un sottogruppo di indice finito di G tale che $\langle x \rangle$ sia un sottogruppo modulare di X; si supponga per assurdo che $\langle x \rangle$ non sia normale in X e sia y un elemento di X tale che $\langle x \rangle^y \neq \langle x \rangle$. Posto $H = \langle x, y \rangle$, sia J il residuale finito di H. Poiché tutti i sottogruppi di G sono almost modulari, il reticolo dei sottogruppi di J è modulare e quindi J è abeliano (cfr [12], Lemma 2.4.9). Inoltre il gruppo H/J è supersolubile per il Lemma 3.3, sicché H è risolubile. Poiché $\langle x \rangle$ non è normale in H, risulta $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \{1\}$ e quindi $H/\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ è finito, per cui H' è finito e H è abeliano. Questa contraddizione prova che $\langle x \rangle$ è un sottogruppo normale di X. Si ha allora che tutti i sottogruppi ciclici di G sono almost normali e G è un FC-gruppo, per cui, essendo senza torsione, G è abeliano.

(b) Sia K un sottogruppo di T e sia X un sottogruppo di indice finito di G tale che K sia un sottogruppo modulare di X. Se a è un qualsiasi elemento aperiodico di X, si ha

$$K = \langle K, \langle a \rangle \cap T \cap X \rangle = \langle K, a \rangle \cap T \cap X,$$

sicché a normalizza K. Ne segue che K è normale in X e quindi è almost normale in G.

(c) Sia x un elemento aperiodico di G e sia X un sottogruppo di indice finito di G tale che $\langle x \rangle$ sia un sottogruppo modulare di X. Sia inoltre y un qualunque elemento aperiodico di X.

Si supponga in primo luogo che risulti $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$, sicché $\langle x \rangle$ è normale in $\langle x, y \rangle$ (cfr [13], Theorem 1.3) e quindi $x^y = x^{\pm 1}$. Poiché $\langle y \rangle$ è almost modulare in G, esiste un intero positivo n tale che $\langle y \rangle$ sia modulare e quindi, ancora per il Teorema 1.3 di [13], normale in $\langle x^n, y \rangle$. Ne segue che $x^n y = yx^n$ e quindi $x^y = x$, cioé $xy = yx$.

Si supponga allora che sia $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \{1\}$, sicché l'ipotesi fatta su G/T assicura che esiste un elemento aperiodico z tale che

$$\langle x \rangle \cap \langle z \rangle = \langle y \rangle \cap \langle z \rangle = \{1\}.$$

Sia Y un sottogruppo di indice finito di G tale che $\langle y \rangle$ sia un sottogruppo modulare di Y e sia k un intero positivo tale che z^k appartenga a $X \cap Y$. Poiché $\langle y \rangle \cap \langle z \rangle^k = \{1\}$, come sopra si ottiene che $yz^k = z^k y$ e quindi $\langle y, z^k \rangle = \langle y \rangle \times \langle z^k \rangle$, per cui yz^k è un elemento aperiodico di X. Poiché $\langle y \rangle \cap \langle yz^k \rangle = \{1\}$, si ha anche $\langle x \rangle \cap \langle yz^k \rangle = \{1\}$ e quindi $xyz^k = yz^k x = yxz^k$, sicché $xy = yx$.

Pertanto, essendo X generato dai suoi elementi aperiodici, x è un elemento centrale di X, per cui x appartiene all'FC-centro di G. D'altra parte anche G è generato dai suoi elementi aperiodici, e quindi G è un FC-gruppo. ■

4. – Il caso nearly modulare.

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione del seguente teorema riguardante i gruppi non-periodici in cui ogni sottogruppo è nearly modulare.

TEOREMA 4.1 (F. de Giovanni, C. Musella [6]). – *Sia G un gruppo non periodico e localmente graduato in cui tutti i sottogruppi sono nearly modulari. Allora:*

(a) *L'insieme T di tutti gli elementi periodici di G è un sottogruppo normale di G e il gruppo quoziente G/T è abeliano.*

(b) *Ogni sottogruppo di T è nearly normale in G.*

(c) *Se G/T non è localmente ciclico, G è un FC-gruppo.*

Il prossimo risultato prova in particolare la validità della (b) nel Teorema 4.1.

LEMMA 4.2. – *Sia G un gruppo non periodico i cui sottogruppi ciclici sono* *nearly modulari. Allora l'insieme T di tutti gli elementi periodici è un sottogruppo, e tutti i sottogruppi di T sono nearly normali in G.*

DIMOSTRAZIONE. – Si supponga per assurdo che esistano due elementi periodici x e y tali che il prodotto xy sia aperiodico. Sia X un sottogruppo modulare di G tale che $\langle x\rangle$ sia un sottogruppo di indice finito di X; allora X è normale in $\langle X, xy\rangle = \langle X, y\rangle$ (cfr. [13], Corollary 2.2) e quindi $\langle X, y\rangle$ è finito. Questa contraddizione prova che T è un sottogruppo di G.

Sia K un qualunque sottogruppo di T e sia X un sottogruppo modulare di G tale che K sia un sottogruppo di indice finito di X; allora anche X è contenuto in T e se a è un elemento aperiodico di G, si ha che $X = \langle X, \langle a\rangle \cap T\rangle = \langle X, a\rangle \cap T$ è un sottogruppo normale di $\langle X, a\rangle$. Ne segue che X è normale in G e K è nearly normale in G. ■

Nella dimostrazione del Teorema 4.1 si userà il seguente lemma, per la cui dimostrazione si rimanda a [6].

LEMMA 4.3. – *Sia $G = \langle x, y\rangle$ un gruppo localmente graduato i cui sottogruppi sono nearly modulari. Se $\langle x\rangle$ è un sottogruppo modulare di G, allora G è supersolubile.*

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.1. – (a) Per il Lemma 4.2 l'insieme T degli elementi periodici di G è un sottogruppo. Sia x un elemento aperiodico di G, e sia X un sottogruppo modulare di G tale che $\langle x\rangle$ sia un sottogruppo di indice finito di X. Allora $X_0 = X \cap T$ è un sottogruppo normale finito di X e il gruppo quoziente X/X_0 è ciclico infinito. Poiché X_0 è nearly normale in G, $N = X_0^G$ è finito e quindi il gruppo quoziente $\overline{G} = G/N$ è localmente graduato. Sia $\overline{y}$ un elemento aperiodico di $\overline{G}$ tale che $\overline{X}^{\overline{y}} \neq \overline{X}$. Allora $\overline{L} = \langle \overline{X}, \overline{y}\rangle$ è supersolubile per il Lemma 4.3 e $\overline{X} \cap \langle \overline{y}\rangle \neq \{1\}$ (cfr [13], Theorem 1.3), sicché $\overline{L}/\overline{X} \cap \langle \overline{y}\rangle$ è finito. Ne segue che $\overline{L}'$ è finito (cfr [10] Part 1, Theorem 4.12), e quindi è contenuto in $\overline{T}$. Poiché $\overline{G}$ è generato dai suoi elementi aperiodici, si ha che $\overline{X}\,\overline{T}$ è un sottogruppo normale di $\overline{G}$ e quindi XT è un sottogruppo normale di G. Si è quindi provato che ogni sottogruppo ciclico di G/T è nearly normale, sicché il gruppo G/T è un FC-gruppo senza torsione e quindi è abeliano.

(c) Sia x un qualunque elemento di G, e sia X un sottogruppo modulare di G tale che $\langle x\rangle$ sia un sottogruppo di indice finito di X. Sia y un elemento aperiodico di G e si supponga in primo luogo che risulti $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \{1\}$, sicché $X \cap \langle y\rangle = \{1\}$ e quindi $X^y = X$ (cfr [13], Corollary 2.2). Si supponga ora che $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \neq \{1\}$, sicché x è aperiodico e l'ipotesi fatta su G/T assicura che esiste un altro elemento aperiodico z tale che

$$\langle x\rangle \cap \langle z\rangle = \langle y\rangle \cap \langle z\rangle = \{1\}.$$

Ne segue che $X^z = X$ e che, se Y è un sottogruppo modulare di G tale che $\langle y\rangle$

sia un sottogruppo di indice finito di Y, $Y^z = Y$. Pertanto Y è normale in $\langle Y, z\rangle = \langle Y, yz\rangle$, sicché yz è aperiodico e $Y \cap \langle yz\rangle = \{1\}$. Allora si ha anche $X \cap \langle yz\rangle = \{1\}$, per cui yz normalizza X e quindi $X^y = X$. Poiché G è generato dai suoi elementi aperiodici, X è un sottogruppo normale di G. Si ha quindi che tutti i sottogruppi ciclici di G sono nearly normali, e G è un FC-gruppo. ■

5. – Il caso modulare-per-finito.

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione del seguente teorema riguardante i gruppi non-periodici in cui ogni sottogruppo è modulare-per-finito.

TEOREMA 5.1 (M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella [3]). – *Sia G un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo non periodico le cui immagini omomorfe periodiche sono localmente finite. Se ogni sottogruppo di G è modulare-per-finito, allora G contiene un sottogruppo C di indice al più 2 che verifica le seguenti condizioni:*

(a) *L'insieme T di tutti gli elementi periodici di C è un sottogruppo normale di G e il gruppo quoziente C/T è abeliano.*

(b) *Ogni sottogruppo di T è normale-per-finito in G.*

(c) *Se C/T non è localmente ciclico, ogni sottogruppo ciclico di G è normale-per-finito.*

LEMMA 5.2. – *Sia G un $\overline{\mathfrak{X}}$-gruppo privo di sottogruppi normali e periodici non identici. Se ogni sottogruppo di G è modulare-per-finito, allora il centralizzante $C_G(M(G))$ ha indice al più 2 in G.*

DIMOSTRAZIONE. – Per il Lemma 2.5, $M(G)$ è un gruppo abeliano senza torsione e ogni sottogruppo ciclico infinito e modulare di G è normale. Si supponga per assurdo che G contenga due sottogruppi ciclici infiniti modulari $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ e un elemento x tale che $a^x = a$ e $b^x = b^{-1}$; allora $\langle ab\rangle$ non contiene sottogruppi normali non-identici, il che è assurdo perché $\langle ab\rangle$ contiene un sottogruppo di indice finito modulare, e quindi normale, in G. Ne segue che ogni elemento di G induce su $M(G)$ l'identità oppure l'inversione, sicché $C_G(M(G))$ ha indice al più 2 in G. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 5.1. – (a) Sia T_0 il massimo sottoggruppo normale e periodico di G e si ponga $\overline{G} = G/T_0$. Allora per il Lemma 5.2 il centralizzante $\overline{C} = C/T_0 = C_{\overline{G}}(M(\overline{G}))$ ha indice al più 2 in $\overline{G}$. Ovviamente il gruppo quoziente $\overline{G}/M(\overline{G})$ è periodico e quindi localmente finito, sicché $\overline{C}/Z(\overline{C})$ è localmente finito, per cui $\overline{C}'$ è un sottogruppo normale e localmente finito di $\overline{G}$ e così $\overline{C}$ è abeliano. Ne segue che C' è periodico e quindi l'insieme T di tutti gli elementi periodici di C è un sottogruppo normale di G e il gruppo quoziente C/T è abeliano.

(b) Sia H un qualunque sottogruppo periodico di C, e sia X un sottogruppo di indice finito di H modulare in G; allora X, essendo normalizzato da tutti gli elementi aperiodici di G (cfr. [13], Corollary 2.2), è normale in C e quindi è almost normale in G, per cui il Lemma 2.3 assicura che X^G/X_G è finito, sicché H è normale-per-finito in G.

(c) Sia $\langle x \rangle$ un sottogruppo ciclico infinito di C e sia X un sottogruppo non-identico di $\langle x \rangle$ modulare in G. Sia ora y un altro elemento aperiodico di C e sia Y un sottogruppo non-identico di $\langle y \rangle$ modulare in G. Se $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$, si ha anche $X \cap \langle y \rangle = \{1\}$ e quindi $X^y = X$ (cfr. [13], Corollary 2.2). Si supponga allora che $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \{1\}$, sicché l'ipotesi fatta su C/T assicura che esiste un elemento aperiodico z di C tale che

$$\langle x \rangle \cap \langle z \rangle = \langle y \rangle \cap \langle z \rangle = \{1\},$$

per cui $Y^z = Y$ e $X^z = X$; inoltre l'indice di Y in $\langle y, z \rangle = \langle y, yz \rangle$ è infinito. Poiché C' è localmente finito, il prodotto yz è aperiodico e $Y \cap \langle yz \rangle = \{1\}$, per cui si ha anche che $X \cap \langle yz \rangle = \{1\}$ e quindi che $X^{yz} = X$; ne segue che anche in questo caso $X^y = X$.

Si è quindi provato che X è normalizzato da tutti gli elementi aperiodici di C, sicché è normale in C e $\langle x \rangle$ è normale-per-finito in C. Sia g un elemento aperiodico di G e sia $\langle u \rangle$ il nocciolo di $\langle g \rangle \cap C$ in C; allora $\langle u \rangle$ contiene un sottogruppo non identico $\langle v \rangle$ che è modulare in G e così, essendo $\langle v \rangle$ normale in C, $\langle v \rangle^G/\langle v \rangle_G$ è finito per il Lemma 2.3, sicché $\langle g \rangle$ è normale-per-finito in G. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] J. T. Buckley - J. C. Lennox - B. H. Neumann - H. Smith - J. Wiegold, *Groups with all subgroups normal-by-finite*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **59** (1995), 384-398.

[2] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella - Y. P. Sysak, *Periodic groups with nearly modular subgroup lattice*, Illinois J. Math., **47** (2003), 189-205.

[3] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella, *Groups in which every subgroup is modular-by-finite*, Bull. Austral. Math. Soc., **69** (2004), 441-450.

[4] M. De Falco - F. de Giovanni - C. Musella, *Groups with modular subgroup lattice*, Advances in Group Theory 2002 (Proceedings of the intensive research period held in Napoli, May-June 2002).

[5] F. de Giovanni - C. Musella - Y. P. Sysak, *Groups with almost modular subgroup lattice*, J. Algebra, **243** (2001), 738-764.

[6] F. de Giovanni - C. Musella, *Groups with nearly modular subgroup lattice*, Colloq. Math., **88** (2001), 13-20.

[7] K. Iwasawa, *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen*, J. Fasc. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **4** (1941), 171-199.
[8] K. Iwasawa, *On the structure of infinite M-groups*, Jap. J. Math., **18** (1943), 709-728.
[9] B. H. Neumann, *Groups with finite classes of conjugate subgroups*, Math. Z., **63** (1955), 76-96.
[10] D. J. S. Robinson, *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Springer, Berlin (1972).
[11] R. Schmidt, *Gruppen mit modularem Untergruppenverband*, Arch. Math. (Basel), **46** (1986), 118-124.
[12] R. Schmidt, *Subgroup Lattices of Groups*, de Gruyter, Berlin (1994).
[13] S.E. Stonehewer, *Modular subgroup structure in infinite groups*, Proc. London Math. Soc., **32** (1976), 63-100.
[14] G. Zacher, *Una caratterizzazione reticolare della finitezza dell'indice di un sottogruppo in un gruppo*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), **69** (1980), 317-323.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Napoli Federico II
Complesso Universitario di Monte S. Angelo, Via Cintia, I 80126 Napoli (Italy)

Pervenuta in Redazione
il 3 dicembre 2003