Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Natale Paolo Vinai

Sul grado aritmetico degli anelli bigraduati e del graduato associato

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 653–656.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_653_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 653-656

Sul grado aritmetico degli anelli bigraduati e del graduato associato

NATALE PAOLO VINAI

1. – Grado aritmetico.

Il teorema di Bezout è uno dei primi risultati importanti nella teoria della molteplicità e, da un punto di vista geometrico, della teoria dell'intersezione. Nel caso intersezione propria esso è ben noto ed è ciò che ha condotto ad una buona definizione del concetto di molteplicità di intersezione, sviluppata nei lavori di Van der Waerden, Weil, Chevalley, Samuel e Serre. Per intersezioni improprie si è trovata una soluzione con i lavori di Stückrad e Vogel, che hanno sviluppato un Algoritmo di Intersezione che genera un ciclo di intersezione (il ciclo di Vogel) che richiede dei contributi non solo dalle componenti irriducibili dell'intersezione, ma anche da alcune immerse. Una tecnica per studiare le componenti immerse dell'intersezione è l'utilizzo del grado aritmetico.

Il grado aritmetico è una misura della complessità di un ideale omogeneo in un anello polinomiale. È stato introdotto per la prima volta da Hartshorne ed in seguito studiato da Bayer e Mumford ([2]). Il grado aritmetico è un raffinamento del classico concetto di molteplicità. A differenza di quest'ultimo tiene conto non solo delle componenti primarie di dimensione massima dell'ideale, ma anche di tutte le altre componenti, sia isolate che immerse. Questo ci ha permesso di determinare il comportamento delle componenti immerse di un anello locale noetheriano, rispetto al passaggio al graduato associato (cfr. corollario 2).

DEFINIZIONE 1. – *Sia A un anello graduato (o locale), M un A-modulo finitamente generato ed i un intero non negativo, $\mathrm{H}^0_{\wp}(M_{\wp})$ la (zero) coomologia locale di M a supporto in $\wp$. Sia, inoltre, $\mathrm{e}_i(M)$ il simbolo di molteplicità, che è il coefficente del polinomio di Hilbert del modulo M, se $i = \dim(M)$, e zero altrimenti.*

Definiamo il grado aritmetico i-esimo come segue:

$$\mathrm{adeg}_i(M) = \sum_{\dim A/\wp = i} \ell(\mathrm{H}^0_{\wp}(M_{\wp}))\mathrm{e}_i(A/\wp)$$

ove la somma corre su tutti gli ideali primi.

REMARK 1. – *La somma nella definizione precedente è finita, poichè $\mathrm{H}^0_{\wp}(M_{\wp})$ è non nullo se e soltanto se $\wp$ è un primo associato di M.*

Le diversità tra il grado aritmetico e la molteplicità si evidenziano anche rispetto all'intersezione con ipersuperfici. Il classico teorema di Bezout non vale per il grado aritmetico. Per esso vale solamente una diseguaglianza ([3], [5]).

2. – Anelli bigraduati.

Per anello bigraduato standard si intende un anello polinomiale su un campo k i cui generatori come k-algebra sono di grado $(1,0)$ o $(0,1)$. Van der Waerden ([4]) fu uno dei primi a studiare la funzione di Hilbert per anelli bigraduati standard. Come nel caso graduato anche in questo la funzione di Hilbert diventa polinomiale e ciò permette di definire una molteplicità.

Sia M un modulo biomogeneo finitamente generato su A, anello bigraduato standard. La funzione di Hilbert di M è la funzione:

$$H_M \colon \boldsymbol{Z}^2 \longrightarrow \boldsymbol{N}$$

data da $H_M(i,j) = \ell_k(M_{(i,j)})$.

TEOREMA 1. – *Sia M un modulo finitamente generato di dimensione d su un anello bigraduato standard A. Allora esiste un polinomio di grado al più $d-2$ che concide con la funzione di Hilbert di M per elementi in un quadrante abbastanza grande. Questo polinomio sarà il polinomio di Hilbert di M.*

La prima differenza, rispetto al caso semplicemente graduato, che si osserva è nel grado del polinomio di Hilbert. Tale differenza si riesce ad ovviare, introducento la nozione di dimensione rilevante.

DEFINIZIONE 2. – *Sia A un anello bigraduato standard, $x_1, \ldots, x_n$ i generatori di A di grado $(1,0)$ e $y_1, \ldots, y_m$ quelli di grado $(0,1)$, $A_+ = (x_1, \ldots, x_n) \cap (y_1, \ldots, x_m)$ l'ideale irrilevante. La dimensione rilevante di A è:*

$$\mathrm{rdim}(A) = \dim A/(\mathrm{H}^0_{A_+}(A)).$$

Sia M un A-modulo finitamente generato. La dimensione rilevante di M è:

$$\mathrm{rdim}(M) = \mathrm{rdim} A/(0 : M).$$

DEFINIZIONE 3. – *Un A-modulo finitamente generato M è rilevante se esiste una decomposizione primaria in cui almeno uno dei primi non contiene A_+*

Estendendo da ideali rilevanti a moduli rilevanti un risultato di Trung si dimostra che il grado del polinomio di Hilbert di un modulo rilevante è la dimensione rilevante meno due.

In realtà ciò a cui siamo interessati è la doppia trasformata di somma della funzione di Hilbert:

$$H^{(1,1)}(i,j) = \sum_{v=0}^{j} \sum_{u=0}^{i} H(u,v).$$

Tale funzione è ancora polinomiale e questa volta il grado del polinomio con cui coincide per valori grandi è la dimensione di Krull del modulo M. Possiamo scrivere tale polinomio in forma binomiale:

$$P_M^{(1,1)}(m,n) = \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} \binom{m}{i} \binom{n}{j}.$$

DEFINIZIONE 4. – *Sia* $0 \leq i \leq \dim(M)$ *un intero.*
Per $i = \dim(M)$ *la molteplicità generalizzata del modulo M,* $\underline{e}_i(M)$*, è:*

$$(c_{(0,d)}, \ldots, c_{(t,d-t)}, \ldots, c_{(d,0)});$$

per $i < \dim(M)$ *il vettore con* $d+1$ *componenti nulle.*

Questa nozione di molteplicità è additiva rispetto alle successioni esatte corte.

Con tale definizione è possibile definire il grado aritmetico $\underline{\mathrm{adeg}}_i(M)$ per un anello bigraduato, sostituendo nella definizione 1 il simbolo di molteplicità con il vettore molteplicità generalizzata.

Abbiamo dimostrato che, come per il caso di anelli semplicemente graduati, anche per anelli bigraduati il teorema di Bezout non vale per il grado aritmetico ma viene soddisfatta solo una diseguaglianza. Qui scriviamo il risultato rispetto alla sezione con una ipersuperficie. Il risultato generale si ottiene iterando il seguente teorema.

TEOREMA 2. – *Sia M un A-modulo bigraduato, i un intero non negativo ed F un elemento biomogeneo in* $A_{(a,b)}$ *di grado totale maggiore di* 1 *che non appartiene a nessun associato primo di M di dimensione maggiore od uguale ad i. Allora*

$$\underline{\mathrm{adeg}}_i(M/F) \geq a(\underline{\mathrm{adeg}}_i(M)^{(0,i)}) + b(\underline{\mathrm{adeg}}_i(M)^{(i,0)}),$$

ove $\underline{\mathrm{adeg}}_i(M)^{(i,j)}$ stà per il vettore $\underline{\mathrm{adeg}}_i(M)$ a cui è stato rimosso il posto (i,j).

3. – Anello graduato associato.

Un altro scopo di questa tesi è stato lo studio del comportamento del grado aritmetico di un anello locale rispetto al passaggio al cono normale, cioè rispetto al graduato associato. Abbiamo utilizzato l'approccio alla molteplicità descritto da Achilles e Manaresi in [1], ove viene utilizzato un anello bigraduato per definire la molteplicità di un ideale arbitrario in un anello locale. Tale nozione è un'estensione della classica molteplicità di Samuel. Seguendo tale approccio si è definito il grado aritmetico per un ideale arbitrario in un anello locale rispetto ad un modulo finitamente generato.

DEFINIZIONE 5. – *Sia* $(A, \boldsymbol{m})$ *un anello locale, I un ideale proprio ed M un A-modulo finitamente generato.*

$$GG(M) = \mathrm{gr}_{\boldsymbol{m}}\mathrm{gr}_I(M) = \bigoplus_{i,j} (\boldsymbol{m}^i I^j + I^{j+1})M/(\boldsymbol{m}^{i+1}I^j + I^{j+1})M.$$

REMARK 2. – *$GG(A)$ è un anello bigraduato e $GG(M)$ è un $GG(A)$-modulo finitamente generato biomogeneo. Per cui possiamo definire una molteplicità per I rispetto ad M sfruttando quanto visto nella precedente sezione ed applicare la definizione 1 con questa molteplicità.*

I risultati principali della tesi sono il seguente teorema ed i suoi corollari.

TEOREMA 3. – *Sia* $(A, \boldsymbol{m})$ *un anello locale noetheriano, I un ideale proprio in A, M un A-modulo finitamente generato e* $\boldsymbol{n}$ *l'ideale massimale omogeneo in* $\mathrm{gr}_I(A)$. *Allora*

$$\mathrm{adeg}_i(\mathrm{gr}_{\boldsymbol{n}}\mathrm{gr}_I(M)) \geq \sum_k (\underline{\mathrm{adeg}}_i(I, M))_k.$$

COROLLARIO 1. – *Sia* $(A, \boldsymbol{m})$ *un anello locale noetheriano, I un ideale proprio in A, M un A-modulo finitamente generato. Allora:*

$$\mathrm{adeg}_i(\mathrm{gr}_I(M)) \geq \mathrm{adeg}_i(M).$$

Come ulteriore corollario abbiamo esteso ad ideali arbitrari un risultato di W. Ruppert sul comportamento degli ideali immersi di un anello in relazione al passaggio al graduato associato rispetto all'ideale massimale.

COROLLARIO 2. – *Sia* $(A, \boldsymbol{m})$ *un anello locale noetheriano equidimensionale, I un ideale proprio in A. Se A ha associati primi immersi di dimensione i allora* $\mathrm{gr}_I(A)$ *ha associati primi immersi di dimensione i.*

BIBLIOGRAFIA

[1] ACHILLES R. e MANARESI M., *Multiplicities of a bigraded ring and intersection theory*, Math. Ann., **309** (1997), 537-591.

[2] BAYER D. e MUMFORD D., *What can be computed in algebraic geometry?*, Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Sympos. Math. XXXIV (1993), 1-48.

[3] MIYAZAKY C. e VOGEL W., *Toward a theory of arithmetic degrees*, Manuscripta Math., **192** (1997), 427-438.

[4] VAN DER WAERDEN B.L., *On Hilbert's function, series of composition of ideals and a generalization of the theorem of Bezout*, Proc. Roy. Acad. Amsterdam., **31** (1929), 749-770.

[5] VASCONCELOS W., *Cohomological degrees of graded modules*, Six Lectures on commutatice algebra. Prog. Math., **166** (1998), 345-392.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: vinai@dm.unibo.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bologna) - Ciclo XIV
Relatore: Prof. Rüdiger Achilles, Università degli studi di Bologna