
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ROCCO TROMBETTI

Ovoidi e fibrazioni dei poligoni generalizzati finiti

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 649–652.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_649_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_649_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Ovoidi e fibrazioni dei poligoni generalizzati finiti

ROCCO TROMBETTI

Il presente lavoro riassume l'attività di ricerca che ho svolto durante i quattro anni di dottorato di ricerca sotto la supervisione scientifica del Professor Guglielmo Lunardon. Più precisamente esso è un sunto del contenuto della tesi di dottorato che da tale attività è scaturita.

La tesi è diviso in due parti; la prima è dedicata allo studio dei flock su un semicorpo del cono quadratico in uno spazio proiettivo tridimensionale $PG(3, q)$ su un campo di Galois $GF(q)$ e, alle connessioni che questi oggetti geometrici hanno con gli ovoidi di traslazione del quadrangolo generalizzato classico $Q(4, q)$. Più in particolare viene affrontato lo studio degli ovoidi di traslazione dei quadrangoli generalizzati costruiti a partire dai flock.

Il mio interesse in questi argomenti è nato dopo aver seguito un ciclo di 4 seminari intitolato «*Flocks, ovals and generalized quadrangles*», tenuti dal Professor Tim Penttila, nel mese di Giugno 2000, mentre era in visita all'Università di Napoli «Federico II».

La seconda parte, invece, è dedicata allo studio del cosiddetto *Split Cayley Generalized Hexagon*; oggetto geometrico introdotto nel 1959 da J. Tits e denotato con il simbolo $H(q)$.

In particolare si è focalizzata l'attenzione sulle fibrazioni in rette di $H(q)$ e sugli 1-sistemi della quadrica parabolica $Q(6, q)$, nella quale $H(q)$ può essere canonicamente immerso.

Durante una seconda visita all'Università di Napoli del Professor Tim Penttila nel 2001, ho appreso il concetto di *Bruen chains* (catene di Bruen); queste strutture sono profondamente connesse alla teoria dei piani di traslazione e, per questo motivo si sono inclusi i risultati che in tale ambito si sono ottenuti, con l'aiuto del software di computer algebra Magma, in una Appendice fianle.

Spieghiamo, ora, più dettagliatamente il contenuto dei singoli capitoli.

Il **Capitolo 1** contiene alcune definizioni e risultati preliminari riguardanti la teoria dei *piani di traslazione*, la teoria dei *flock* di un cono quadratico e quella dei *quadrangoli generalizzati*, oltre che una descrizione delle connessioni esistenti tra questi oggetti geometrici. Per quanto riguarda i piani di traslazione, l'attenzione è stata particolarmente rivolta al caso di piani di traslazione con dimensione al più 2 sul proprio nucleo. Questi provengono, attraverso la costruzione di André e Bruck-Bose, da fibrazioni dello spazio proiettivo tridimensionale $PG(3, q)$.

Nel **Capitolo 2** si è affrontato uno studio dei flock del cono quadratico di $PG(3, q)$ e delle connessioni che essi hanno con gli ovoidi di traslazione della quadrica $Q(4, q)$.

Supponiamo che K sia un cono quadratico di $PG(3, q)$ e denotiamo con V il suo vertice; un flock di K è una partizione di $K \setminus \{V\}$ in q coniche. In genere si usa lavorare con l'insieme $\mathcal{F}$ dei piani la cui intersezione con K dà il flock.

Se tutti i piani di $\mathcal{F}$ hanno una retta in comune, allora il flock è detto lineare. Corrispondente ad un flock $\mathcal{F}$ è una fibrazione in rette di $PG(3, q)$ e quindi un piano di traslazione. Se il piano in questione è un piano coordinatizzato da un semicorpo, allora $\mathcal{F}$ è detto flock su un semicorpo. Oltre al flock lineare esistono altre due famiglie infinite di flock su un semicorpo: I flock di Kantor e i flock di Ganley, questi ultimi esistenti solo se $q = 3^r$ con $r > 2$. Esiste poi un solo esempio sporadico in $PG(3, 3^5)$. Quando la caratteristica q del campo è dispari, i flock del cono quadratico di $PG(3, q)$ e gli ovoidi di traslazione di $Q(4, q)$ sono oggetti equivalenti; questa connessione fu scoperta da J. Thas nel 1987 e arricchita poi di interessanti dettagli da G. Lunardon.

Come conseguenza della suddetta connessione, gli ovoidi non sporadici di $Q(4, q)$ sono quelli associati al flock lineare, ai flock di Kantor e ai flock di Ganley; essi sono rispettivamente a) la quadrica ellittica $Q^-(3, q)$, intersezione di $Q(4, q)$ con un iperpiano non tangente; b) l'ovoide di Kantor costruito a partire da un semicorpo di Knuth; c) per $q = 3^r$, $r \geq 3$, l'ovoide di Payne-Thas.

Il solo esempio sporadico di ovoide di traslazione esiste in $Q(4, 3^5)$, ed è stato costruito da T. Penttila e B. Williams, con l'aiuto del computer. Il corrispondente flock, invece, è stato calcolato esplicitamente nel 1997 da L. Bader, G. Lunardon e I. Pinneri.

Il contributo originale apportato in tale ambito è il seguente; si ottiene una costruzione geometrica del *BLT-set* associato al flock sporadico di $PG(3, 3^5)$.

Precisamente si dimostra che, sotto certe ipotesi, l'intersezione completa dell'ovoide di Payne-Thas e di quello di Kantor della quadrica parabolica $Q(4, 3^h)$, è un *BLT-set* se e solo se $h = 5$. Se questo è il caso, allora il *BLT-set* è isomorfo a quello definito dal flock sporadico. Come conseguenza si ottiene una costruzione alternativa dell'ovoide di Penttila-Williams di $Q(4, 3^5)$, usando la rappresentazione lineare di $AG(3, 3^5)$.

Nel **Capitolo 3** si effettua uno studio degli ovoidi di traslazione dei quadrangoli generalizzati costruiti a partire dalle *famiglie quadrangolari*, poi si focalizza l'attenzione al caso particolare dei quadrangoli generalizzati costruiti a partire dai flock, dando una caratterizzazione di questi ovoidi quando essi sono rappresentati nel modello della *geometria dei laterali*.

Come conseguenza di ciò, considerando il quadrangolo generalizzato classico $H(3, q^2)$ come geometria dei laterali, si osserva che ogni ovoide di traslazione di $H(3, q^2)$ definisce un semicorpo di dimensione 2 sul suo nucleo (sinistro) e viceversa. Si è inoltre dimostrato che, sorprendentemente, ogni ovoide di traslazione di

$H(3, q^2)$, con punto di traslazione (∞) , è anche un ovoide di traslazione di un quadrangolo generalizzato costruito a partire da un qualsiasi q -clan, quando q è pari. Infine, vengono esibiti alcuni esempi di ovoidi di traslazione di quadrangoli generalizzati costruiti a partire da flock, quando q è dispari.

Il **Capitolo 4** è dedicato allo *Split Cayley Hexagon*, usualmente denotato con $H(q)$. Questa geometria di incidenza è stata introdotta da J. Tits nel 1959.

Dopo aver dato del materiale introduttivo al fine di rendere il capitolo quanto più possibile autocontenuto, si focalizza l'attenzione sulle *fibrazioni di traslazione* di $H(q)$ e sugli 1-sistemi della quadrica parabolica $Q(6, q)$, in cui $H(q)$ può essere canonicamente immerso, attraverso una costruzione dovuta allo stesso Tits.

Utilizzando il modello della geometria dei laterali si è ottenuto una caratterizzazione delle fibrazioni di $H(q)$ in termini di un insieme di punti dello spazio proiettivo $PG(3, q)$, che giace su corde immaginarie di una *cubica sghemba*; inoltre si costruisce un nuovo esempio di fibrazione semiclassica di traslazione di $H(q)$ quando q è pari.

D. Luyckx and J.A. Thas in un lavoro pubblicato nel 2000, hanno affermato che se q è dispari, un 1-sistema semiclassico localmente Hermitiano di $Q(6, q)$ è isomorfo ad un 1-sistema Hermitiano oppure ad un particolare 1-sistema che generalizza la fibrazione S_9 di $H(q)$. Nella dimostrazione di questo fatto essi assumono che un 1-sistema semiclassico localmente Hermitiano di $Q(6, q)$ che sia una fibrazione di una quadrica ellittica $Q^-(5, q)$ è Hermitiano; in questo capitolo si illustra un controesempio che dimostra esserci un gap nella suddetta classificazione. La classificazione viene dunque completata.

Una **appendice** al Capitolo 1 è dedicata alla teoria delle *Catene di Bruen*, essa contiene i risultati di non esistenza per alcuni valori dell'ordine del campo $GF(q)$, ottenuti attraverso l'uso del software di computer algebra *Magma*.

Una catena di Bruen è un sottinsieme dell'insieme dei *regoli* di una fibrazione regolare di $PG(3, q)$, q dispari con la proprietà che ogni due regoli di tale insieme hanno esattamente due rette in comune e tre regoli di questo insieme non hanno mai una retta in comune.

Il motivo per il quale questo materiale è stato inserito come appendice al primo capitolo è il seguente: nel 1964, T. Ostrom ha generalizzato il cosiddetto metodo della *derivazione*, da lui stesso introdotto, ad un metodo detto *net replacement* per costruire nuovi piani affini di traslazione a partire da piani assegnati. In questa appendice si è considerato solo il caso dei piani di traslazione con dimensione al più 2 sul proprio nucleo sinistro.

Denotiamo il piano di traslazione di ordine q^2 costruito a partire da una fibrazione S di $PG(3, q)$ con $\pi(S)$.

In questo ambito, il metodo della sostituzione delle reti (*net replacement*) consiste semplicemente nel sostituire un certo insieme di rette U di S con un'altra fibrazione

parziale che contiene lo stesso insieme di punti. La fibrazione che ne risulta, cioè $S' = (S \setminus U) \cup V$ determina un nuovo piano affine $\pi(S')$. Le catene di Bruen forniscono esempi di fibrazioni parziali sostituibili. Prima del lavoro riassunto in questa appendice era stato ottenuto un solo risultato di non esistenza precisamente per il campo $GF(29)$.

I risultati ottenuti, pertanto, sono sorprendenti e in qualche modo spiegano la difficoltà incontrata nel tentativo di costruire famiglie infinite di esempi di catene di Bruen.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BADER L. e TROMBETTI R., *Translation ovoids of flock generalized quadrangles*. Europ. J. Combin. (to appear).
- [2] CARDINALI I., DURANTE N., PENTTILA T. e TROMBETTI R., *Bruen chains over fields of small order*. Discrete Math, (to appear).
- [3] CARDINALI I., LUNARDON G., POLVERINO O. e TROMBETTI R., *Spreads in $H(q)$ and 1-systems of $Q(6, q)$* . Europ. J. Combin., **23** (2002), 367-376.
- [4] CARDINALI I., POLVERINO O. e TROMBETTI R., *On the sporadic semifield flock*. Des., Codes Crypt., **30** (2003), 219-226.
- [5] DEMBOWSKI P., *Finite Geometries*. Springer Verlag, 1968.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»

e-mail: rtrombet@unina.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli Federico II) - Ciclo XV

Direttore di ricerca: Prof. Guglielmo Lunardon, Università degli Studi di Napoli Federico II.