Massimiliano Daniele Rosini

Esistenza e stabilità di onde di shock transonici nel modello idrodinamico per semiconduttori

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 633–636.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_633_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 633-636

Esistenza e stabilità di onde di shock transonici nel modello idrodinamico per semiconduttori

MASSIMILIANO DANIELE ROSINI

1. – Introduzione.

1.1. – *Gerarchia dei modelli per i semiconduttori.*

Il recente sviluppo di nuovi dispositivi industriali ha richiesto la simulazione numerica dei semiconduttori, allo scopo di ridurne i costi ed i tempi di produzione. Differenti campi di applicazione hanno dato origine a differenti modelli numerici. Nella figura seguente ne abbiamo riportato una gerarchia [3].

	Modelli classici	**Modelli quantistici**	
Modelli cinetici	Eq. di Boltzmann	Eq. di Boltzmann quantistica	
Modelli quasi idrodinamici	Eq.I idrodinamiche	Eq.I idrodinamiche quantistiche	Eq.I di Poisson-Schroedinger
	Eq-I energy-transport	Eq-I di energy-transport	
	Eq.I di drift-diffusion isentropiche	Eq.I di drift-diffusion isentropiche	
	Eq.I di drift-diffusion standard		

Ad esempio, l'equazione di Boltzmann è una equazione cinetica classica e può essere derivata dall'equazione quantistica di Boltzmann.

Il modello più accurato ed efficiente è quello basato sull'equazione di Boltzmann. Tuttavia, la difficoltà dello studio di tale modello ha spinto i ricercatori a derivare da esso modelli numericamente più semplici, ma al tempo stesso fisicamente accurati nei rispettivi campi di applicazione. In questa direzione si è mosso Bløtekjr [2], che nel 1970 ha introdotto uno dei modelli idrodinamici per semiconduttori maggiormente utilizzato in campo industriale.

1.2. – *Modelli idrodinamici.*

Esistono altri modelli idrodinamici oltre a quello di Bløtekjr, come ad esempio quello di Hansch e Miura-Mattausch, o quello di Woolard, Tian, Trew, Littlejohn e Kim o quello di Thoma, Emunds, Meinerzhagen, Peifer ed Engl. Tutti questi modelli utilizzano delle approssimazioni la cui validità è ancora da dimostrare. Per questo motivo preferiamo studiare quello proposto da Bløtekjr [2]. Tale modello comprende la legge di conservazione del numero di elettroni, la legge di bilancio del momento degli elettroni e la legge di bilancio dell'energia degli elettroni. Tali leggi ne costituiscono la parte idrodinamica, a cui si affianca l'equazione di Poisson per il campo elettrico. Il modello risultante è rappresentato dal seguente sistema iperbolico-ellittico quasilineare

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \\
\partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \dfrac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \phi - \dfrac{1}{\tau_p} u \\
\partial_t p + (u \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot u = \dfrac{1}{\tau_w} (T_l \rho - p) - \dfrac{(\gamma - 1)(\tau_p - 2\tau_w)}{2\tau_p \tau_w} \rho |u|^2 \\
\Delta \phi = \rho - d \ ,
\end{cases} \tag{1}
$$

dove t ed x sono rispettivamente la variabile temporale e quella spaziale, $\rho = \rho(t, x) > 0$ è la densità di carica, $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ è la velocità elettronica, $\gamma > 1$ è l'esponente adiabatico, $\varepsilon = \varepsilon(t, x) > 0$ è l'energia specifica interna, $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ è la pressione, $\phi = \phi(t, x) \in \mathbb{R}$ è il potenziale elettrico, $T_l > 0$ è la temperatura, $d = d(x)$ è il profilo del dopaggio, $\tau_p > 0$ è il tempo di rilassamento del momento e $\tau_w > 0$ è quello dell'energia.

2. – Argomenti della tesi.

I risultati di questa tesi riguardano le soluzioni transoniche del sistema (1) unidimensionale, cioè le soluzioni che non sono né subsoniche, $|u| < c$, né supersoniche, $|u| > c$, dove c è la velocità del suono. Le soluzioni transoniche possono essere regolari o presentare delle discontiuità, dette ammissibili se soddisfano le condizioni di salto di Rankine-Hugoniot e le disuguaglianze di Lax. Gli argomenti esposti derivano dai seguenti articoli:

§1: **M. D. Rosini** (2003) *A phase analysis of transonic solutions for the hydrodynamic semiconductor model* accettato dal Quarterly of Applied Mathematics;

§2: **M. D. Rosini** (2003) *Stability of hydrodynamic model for semiconductor* accettato dall'Archivum Mathematicum;

§3: **M. D. Rosini** (2004) *Stability of transonic strong shock waves for the one-dimensional hydrodynamic model for semiconductors* J. Differential Equations, 199 (2004), no. 2, 326-351 .

Nel primo capitolo abbiamo studiato le soluzioni stazionarie transoniche per il modello idrodinamico unidimensionale utilizzando il piano delle fasi, estendendo i risultati trovati in [1] e [4]. Ascher, Markowich, Pietra e Schmeiser [1] hanno studiato il caso limite isotermico, $\gamma = 1$; mentre Markowich [4] ha più realisticamente preso $\gamma = 5/3$, ma ha dovuto assumere un tempo di rilassamento infinito, riducendosi così a considerare in realtà un plasma elettronico. Noi abbiamo invece lavorato con $\gamma > 1$ arbitrariamente fissato e tempi di rilassamento finiti, prendendo così in considerazione anche lo scattering degli elettroni. Quel che siamo riusciti a dimostrare sono dei risultati del tutto analoghi a quelli raggiunti in [1] e [4]. In particolare

§1.2.1: nel caso di un plasma isentropico abbiamo dimostrato che solo se

(α) la densità sonica ρ_s (quantità da noi introdotta) è maggiore di uno,

(β) la coppia densità di carica-campo elettrico, $(\rho, E = \partial_x \phi)$, appartiene al ramo subsonico della curva sonica T_s caratterizzato da un campo elettrico negativo per $x \to -\infty$,

esistono soluzioni transoniche regolari e discontinuità transoniche ammissibili, e che quest'ultime presentano esattamente un unico salto di discontinuità;

§1.2.2: nel caso isentropico generale, utilizzando l'integrale primo ricavato nel paragrafo §1.2.1 come funzione di Lyapunov, abbiamo dimostrato che non esistono soluzioni transoniche regolari, ma che sotto le ipotesi (α), (β) tutte le soluzioni transoniche presentano esattamente un unico salto di discontinuità;

§1.3.1: nel caso di un plasma adiabatico abbiamo visto che l'entropia specifica è costante su ogni intervallo di regolarità. Per questo il volume delle fasi è stato ottenuto semplicemente riportando su dei piani paralleli il piano delle fasi ottenuto nel §1.2.1 corrispondente alla relativa densità sonica. Abbiamo quindi dimostrato che, come per il plasma isentropico, solo sotto le ipotesi (α), (β) esistono soluzioni transoniche regolari e discontinuità transoniche ammissibili, ma che, a differenza del plasma isentropico, queste ultime possono presentare più di un salto di discontinuità;

§1.3.2: nel caso adiabatico generale siamo riusciti a disegnare il volume delle fasi solo nel caso in cui $\tau_p = 2\tau_w$ e $C_v = 1/(\gamma - 1)$, dimostrando che non esistono soluzioni transoniche regolari e che solo sotto le ipotesi (α), (β) esistono discontinuità transoniche ammissibili. Tuttavia non siamo stati in grado di dimostrare l'esistenza di discontinuità transoniche ammissibili con più di un salto, sebbene presumiamo che sotto appropriate ipotesi ciò sia possibile.

Nel secondo e terzo capitolo abbiamo dimostrato la stabilità delle discontinuità ammissibili transoniche e stazionarie, rispettivamente nel caso isentropico ed in quello adiabatico. A tale scopo abbiamo utilizzato tecniche analoghe a quelle adoperate da Majda e da Métivier. La principale difficoltà nel loro utilizzo è stata dovuta alla necessità di modificarle per poterle applicare al caso di intervalli della variabile spaziale limitati. Il primo passo è stato quello di aggiungere al sistema (1) le condizioni di salto di Rankine-Hugoniot, in quanto l'equazione dell'interfaccia della discontinuità è anch'essa un'incognita. Il secondo passo è stato quello di trasformare il risultante problema di trasmissione in uno con bordo libero, tramite la tecnica del ribaltamento. Il terzo passo è stato linearizzare il sistema (1); il quarto quello di costruire un simmetrizzatore di Kreiss; ed infine il quinto quello di applicare la teoria del calcolo paradifferenziale messo a punto da Bony e Meyer.

BIBLIOGRAFIA

[1] ASCHER U.M., MARKOWICH P.A., PIETRA P. e SCHMEISER C., *A phase plane analysis of transonic solutions for the hydrodynamic semiconductor model*, Math. Models Appl. Sci., **1** (1991), 347-376.
[2] BLØTEKJR K., *Transport equations for electrons in two-valley semiconductors*, IEEE Trans. Electron Devices, **17** (1970), 38-47.
[3] JÜNGEL A. e PENG Y.J., *A hierarchy of hydrodynamic models for plasma: zero-relaxation-time limits*, Comm. P. D. E., **24** (1999), 1007-1033.
[4] MARKOWICH P.A., *On steady-state Euler-Poisson model for semiconductors*, Z. Ang. Math. Phys., **62** (1991), 389-407.
[5] MÉTIVIER G., *Stability of Multidimensional Weak Shock*, Comm. in Partial Diff. Equ., **15** (1990), 983-1028.

Sezione di Matematica per l'Ingegneria, Università di L'Aquila
e-mail: mrosini@univaq.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli «Federico II») - Ciclo XV
Direttori di ricerca: Prof. Angelo Alvino, Università degli Studi di Napoli «Federico II» e Prof. Pierangelo Marcati, Università degli Studi di L'Aquila