Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Lucia Romani

Metodi NURBS e SUBDIVISION per la modellazione di curve e superfici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 629–632.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_629_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 629-632

Metodi NURBS e SUBDIVISION per la modellazione di curve e superfici

LUCIA ROMANI

Sebbene la maggior parte dei sistemi CAD utilizzi le NURBS come standard di fatto nella rappresentazione e scambio dati, in tutti i sistemi di modellazione commerciali i pesi della rappresentazione razionale non sono mai utilizzati per interagire sull'andamento di curve di interpolazione di un set di dati assegnato. Per ottenere un controllo locale sugli interpolanti generati, i sistemi di modellazione esistenti utilizzano la tecnica di interpolazione polinomiale cubica di Hermite dove, facendo variare il modulo delle derivate assegnate nei punti da interpolare, riescono ad ottenere un effetto di tensione locale sul segmento di curva corrispondente, perdendo però i vincoli geometrici che definivano la curva di partenza. Pertanto, nel primo capitolo di questa tesi si è pensato di proporre una tecnica di interpolazione razionale cubica di Hermite, con la quale è possibile utilizzare i pesi della rappresentazione NURBS per esercitare un controllo locale sulla forma dell'interpolante determinato, senza interferire con le derivate che la curva dovrà assumere nei punti assegnati. Tali derivate possono essere date insieme al set di dati da interpolare o determinate da questi ultimi attraverso due differenti algoritmi: il primo sfrutta una congettura geometrica proposta in [1], mentre il secondo, ispirandosi a quanto presentato in [4] per le υ-spline, fa uso delle proprietà caratterizzanti le spline cubiche naturali di interpolazione di Hermite. Ma, mentre le υ-spline sono delle cubiche a tratti, nate come alternativa polinomiale alle spline in tensione e caratterizzate da alcuni parametri in grado di controllarne l'andamento, le funzioni proposte in questa tesi sono la versione NURBS delle cubiche razionali introdotte da J. A. Gregory [3]. Più precisamente, si tratta di cubiche razionali a tratti (C^1 o C^2) caratterizzate dalla presenza di parametri di tensione che permettono di controllarne la forma, sia localmente che globalmente, senza però alterarne il grado di continuità. Tuttavia, mentre le cosiddette υ-spline sono limitate al caso parametrico, gli interpolanti razionali con tensione proposti in questa tesi funzionano efficientemente sia nel caso parametrico che non-parametrico. Nella formulazione parametrica la parametrizzazione della curva risulta buona per ogni scelta dei parametri di tensione in quanto questi influenzano contemporaneamente le funzioni base e i control point della curva. Nonostante ciò, al fine di evidenziare la possibilità di utilizzare tali interpolanti razionali con tensione anche nel caso non-parametrico, ci si è concentrati esclusivamente sulla formulazione scalare. Le funzioni di interpolazione che si ottengono da questa nuova proposta razionale risultano essere particolarmente interessanti anche nell'ottica di un'interpolazione shape-preserving. In particolare, per set di dati monotoni e convessi, si è determinata una strategia per la scelta dei parametri di tensione, in base alla quale la funzione di interpolazione razionale costruita rispetta l'andamento dei dati di partenza e non presenta oscillazioni indesiderate. Mentre già J. A. Gregory [2] aveva proposto una soluzione shape-preserving al problema di interpolazione razionale di Hermite nel caso monodimensionale, nessuno fino ad oggi aveva cercato di estenderla al caso bidimensionale. L'unica proposta di funzioni NURBS bivariate shape-preserving con proprietà di tensione, in grado di risolvere il problema di interpolazione razionale di Hermite su una griglia rettangolare del piano coordinato xy, sembra essere, dunque, quella presentata nel secondo capitolo di questa tesi. Poiché combinando su un rettangolo le due interpolazioni monodimensionali effettuate nelle direzioni x e y, si ottengono funzioni NURBS bivariate di tipo prodotto-tensoriale, le quali non sono in grado di mantenere il controllo locale della tensione che si era ottenuto nel caso univariato, si sono definiti nuovi metodi di interpolazione razionale con proprietà di tensione locale, che risultano di facile implementazione in un sistema di modellazione NURBS. Tali metodi permettono di generare in modo efficiente la superficie di interpolazione razionale con tensione locale di un assegnato set di punti a topologia rettangolare, sia nel caso parametrico che non parametrico, e sono rappresentabili in una forma NURBS standard. I primi due metodi proposti sono metodi di interpolazione di Coons con tensione, uno parziale e l'altro globale, nel senso che il primo interpola solo i quattro vertici e i vettori tangenti assegnati in corrispondenza dei corner di ogni patch, mentre l'altro interpola anche i twist vector. Pertanto, mentre con il metodo di Coons parziale si genera una superficie di interpolazione razionale C^1 con tensione, con il metodo globale si può aspirare ad una superficie di classe C^2. Si ha, inoltre, che le superfici NURBS di interpolazione ottenute continuano a mantenere il proprio grado di continuità (C^1 o C^2) anche quando sono poste in tensione, e a rispettare l'andamento dei dati (monotoni o convessi) scegliendo i parametri di tensione nel modo suggerito dalle strategie shape-preserving studiate. Tuttavia, le superfici NURBS che si ottengono non sono più bicubiche. L'ultimo dei metodi proposti, nasce pertanto dall'esigenza di definire una superficie NURBS bicubica di interpolazione con proprietà di tensione locali. Trattando la superficie NURBS bicubica prodotto-tensoriale, interpolante $(M+1) \times (N+1)$ valori e derivate, come un insieme di $M \times N$ patch NURBS bicubici raccordati C^1, tensionando a piacere il patch desiderato e raccordandolo in modo appropriato ai patch influenzati da tale modifica, possiamo generare superfici NURBS bicubiche C^1 con proprietà di tensione locale. Tale proposta risulta essere quindi strettamente connessa alla risoluzione del problema di gestire il join di un insieme di patch NURBS rettangolari raccordati C^1. In letteratura esistono diverse proposte di soluzione a tale problematica, ma le condizioni di raccordo che ne derivano risultano troppo difficili da gestire nelle applicazioni concrete. Di conseguenza, il mio obiettivo è stato quello di determinare condizioni esplicite per il raccordo di patch NURBS rettangolari che fossero di facile gestibilità. Le funzioni di interpolazione razionale di Hermite proposte, pur risultando molto interessanti dal punto di vista della modellazione geometrica, sono limitate a set di dati a topologia rettangolare. In generale, tutte le superfici NURBS, sebbene siano già da anni lo standard di fatto nella rappresentazione e scambio dati fra sistemi commerciali di modellazione geometrica, sono limitate dal fatto che non sono in grado di rappresentare superfici continue a topologia arbitraria, se non mediante patch NURBS trimmati, il cui utilizzo comporta notevoli difficoltà numeriche di gestione e calcolo. L'alternativa promettente alle NURBS nella modellazione di superfici continue a topologia arbitraria, sembra essere in una nuova emergente classe di superfici, note come superfici SUBDIVISION. A differenza delle NURBS, infatti, le SUBDIVISION permettono di realizzare oggetti perfettamente smussati come limite di un processo di raffinamento di una mesh 3D assegnata. Non essendoci quindi alcuna necessità di creare singoli pezzi che verranno poi assemblati, si evitano giunzioni che potrebbero rompersi durante un'animazione, mostrando orribili vuoti tra un poligono e l'altro. Proprio per questa loro flessibilità, le SUBDIVISION trovano ampia applicazione nella computer graphics. Le previsioni sono che tali superfici sostituiranno le NURBS come standard di rappresentazione della forma geometrica di un oggetto anche nei sistemi di modellazione. La situazione attuale, tuttavia, è quella di un settore di ricerca relativamente nuovo, in rapida evoluzione, con già numerosi risultati interessanti, ma molto frammentario. Nei capitoli 3 e 4 mi sono dedicata pertanto ad un approfondito studio degli schemi di suddivisione proposti in letteratura, cercando di riordinare le esperienze maturate da numerosi ricercatori negli ultimi decenni. Dagli studi effettuati risulta consolidato che il punto chiave per connettere la teoria delle subdivision a quella delle B-spline, sta nella cosiddetta equazione di raffinamento delle suddette funzioni base. Mentre la definizione delle B-spline uniformi per convoluzione ci permette di capire come analiticamente le spline possano essere generate attraverso un processo di suddivisione, la definizione di queste ultime attraverso la sezione trasversale di ipercubi risulta essere molto utile per giungere intuitivamente alla relazione di raffinamento attraverso una semplice costruzione geometrica. Al fine di mostrare l'equivalenza delle due definizioni in modo assai naturale, si è introdotta la teoria della distribuzione di probabilità uniforme, da cui segue una definizione esplicita delle B-spline uniformi, che conduce ad una riformulazione in chiave moderna dei risultati trovati da Sommerfeld [5] nel lontano 1904. Mentre nel capitolo 3 mi sono preoccupata di classificare la vasta gamma di schemi di raffinamento univariati proposti in letteratura ed analizzare la continuità della curva limite che si ottiene applicando ripetutamente tali regole di raffinamento su un poligono iniziale assegnato, nel capitolo 4 mi sono concentrata esclusivamente sull'analisi di schemi di suddivisione bivariati che derivano da schemi B-spline. Mentre lontano dai vertici straordinari (ossia che non rispettano l'usuale topologia della mesh) la superficie generata risulterà C^1, per conoscerne la regolarità nell'intorno di tali vertici, occorre ricavare dall'autostruttura della matrice di suddivisione definita dal processo di raffinamento, la cosiddetta mappa caratteristica. Trattandosi di una parametrizzazione del piano tangente alla superficie nel punto straordinario, qualora risulti regolare e iniettiva, possiamo affermare che la superficie limite sarà C^1 anche in tale punto. Per schemi di tipo B-spline la mappa caratteristica è una superficie B-spline composta da un numero di patch pari alla valenza del vertice straordinario, ognuno dei quali risulta definito da un set di control point 2D determinabile dagli autovettori della matrice di suddivisione. Data la simmetria dello schema, si può dimostrare che la monotonia di tali patch in una sola direzione del piano coordinato, fornisce una condizione sufficiente per garantire la continuità C^1 della superficie limite; per provarla, basta definire la rappresentazione di Bézier dei patch che costituiscono tale mappa, al fine di poterne calcolare esplicitamente la derivata prima in tale direzione e controllarne la positività. Sebbene la conversione di una rappresentazione B-spline in una rappresentazione di Bézier possa essere fatta elegantemente con il procedimento di knot-insertion, sarebbe molto più comodo ed efficiente possedere uno strumento algebrico, quale può essere un prodotto matriciale, che permetta di passare dai control point che definiscono una rappresentazione ai control point dell'altra. Da questa osservazione è nata l'idea di definire una matrice, la cosiddetta matrice di conversione, che permette di trasformare i control point della rappresentazione B-spline nei control point della rappresentazione di Bézier. In questo modo si possiede uno strumento generale ed automatico per verificare la regolarità di una qualunque superficie limite in un intorno del punto straordinario. Ai fini di questa tesi tale algoritmo di conversione è stato messo a punto solo nel caso univariato e nel caso bivariato prodotto-tensoriale, ma il prossimo passo sarà l'estensione alle più generali Box-spline k-direzionali. Per quanto riguarda il caso non-uniforme, si è dimostrato che la matrice di conversione B-spline/Bézier può essere vista come una speciale matrice di suddivisione non-uniforme. Il calcolo di tale matrice, di gran lunga meno sofisticato delle classiche procedure di knot-insertion per partizioni nodali arbitrarie, trova svariate applicazioni nel disegno assistito da calcolatore; meno intuitive, ma non meno utili, sono invece le applicazioni della conversione inversa, ossia da rappresentazione di Bézier a rappresentazione B-spline. Tra queste è stato proposto un algoritmo per risolvere in modo piuttosto semplice il join di curve e patch di Bézier arbitrari dell'ordine desiderato.

BIBLIOGRAFIA

[1] AKIMA H., *A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures*, Journal of the Association for Computing Machinary, **17** (4) (Oct. 1970), 589-602.

[2] GREGORY J.A., *Shape preserving spline interpolation*, Computer Aided Design, **18** (1) (Jan/Feb 1986), 53-57.

[3] GREGORY J.A., SARFRAZ M., *A rational cubic spline with tension*, Computer Aided Geometric Design, **7** (1990), 1-13.

[4] NIELSON G.M., *Some piecewise polynomial alternatives to splines under tension*, in Barnhill R.E., Riesenfeld R.F. (eds.), Computer Aided Geometric Design, Academic Press, (1974), 209-235.

[5] SOMMERFELD A., *Eine besondere auschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes*, Berlin: Festschrift Ludwing Boltzmann (1904), 848-859.

Via G.Verdi 44/A, 47841 Cattolica (RN)
e-mail: romani@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica Computazionale
(sede amministrativa: Università di Padova) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Casciola Giulio, Università di Bologna