BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIAMPAOLO PICOZZA

Operazioni semistar e teoria moltiplicativa degli ideali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 609–612.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_609_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Operazioni semistar e teoria moltiplicativa degli ideali

GIAMPAOLO PICOZZA

1. – Operazioni semistar.

L'oggetto di questo lavoro è lo studio delle operazioni semistar nei domini di integrità. La nozione di operazione semistar è stata introdotta nel 1994 da Okabe e Matsuda [3] per generalizzare la classica nozione di operazione star [2, Section 32] e la classica teoria dei sistemi di ideali basata sui lavori di W. Krull, E. Noether, H. Prüfer e P. Lorenzen (a partire dagli anni '30).

Le operazioni star sono applicazioni dall'insieme degli ideali frazionari di un dominio D in se stesso, definite da assiomi scelti da Krull fra le proprietà soddisfatte da classiche operazioni quali la v -operazione di Artin ($I \mapsto I^v = (I^{-1})^{-1}$), la t -operazione ($I \mapsto I^t := \bigcup J^v$, dove J varia fra gli ideali finitamente generati di D contenuti in I) o il completamento (o chiusura integrale) di un ideale ($I \mapsto I^b := \bigcap IV$, dove V varia nell'insieme dei sopra-anelli di valutazione di D). Negli assiomi classici di operazione star si richiede che D^* (l'immagine di D mediante la star operazione $\star$) coincida con D stesso. In particolare ad esempio il completamento di ideali è un'operazione star se e soltanto se $D^b = \bigcap V = D$, cioè se e soltanto se D è integralmente chiuso (questa è una conseguenza di un celebre teorema di Krull che afferma che un dominio è integralmente chiuso se e soltanto se è intersezione dei suoi sopra-anelli di valutazione).

Le operazioni star sono uno strumento essenziale nella teoria moltiplicativa degli ideali, dato che permettono un nuovo approccio allo studio e alla caratterizzazione di varie rilevanti classi di domini. Per esempio, i domini di Prüfer, che sono definiti come i domini che localmente sono domini di valutazione, possono essere caratterizzati tramite la t -operazione: più precisamente un dominio è di Prüfer se e soltanto se è integralmente chiuso e la t -operazione coincide con l'operazione identità. I domini di Krull (domini che sono definiti come particolari intersezioni di domini di valutazione discreta) possono essere caratterizzati tramite la t -operazione: un dominio è di Krull se e soltanto se $(II^{-1})^t = D$ per ogni ideale I di t (cioè se ogni ideale è t -invertibile).

L'idea di Okabe e Matsuda è quella di definire una classe di operazioni sufficientemente grande da contenere sia le operazioni star che, ad esempio, il completamento di ideali anche nel caso in cui il dominio non sia integralmente chiuso.

Più precisamente, se denotiamo con $\overline{F}(D)$ l'insieme dei D -sottomoduli non nulli del campo dei quozienti K di D , un'operazione semistar $\star$ è una applicazione $\star : \overline{F}(D) \rightarrow \overline{F}(D)$ tale che, per ogni $x \in K$ (il campo dei quozienti di D), $x \neq 0$, e per ogni $I, J \in \overline{F}(D)$ valgono le seguenti condizioni: (1) $(xI)^\star = xI^\star$, (2) se $I \subseteq J$ allora $I^\star \subseteq J^\star$ e (3) $I \subseteq I^\star$ e $(I^\star)^\star = I^\star$.

Le operazioni semistar costituiscono una classe più ampia e una nozione più flessibile per affrontare problemi di teoria moltiplicativa degli ideali. Nel seguito illustreremo alcuni dei risultati ottenuti, riguardanti la relazione fra le operazioni semistar e le operazioni star sui sopra-anelli, l'invertibilità di ideali rispetto ad operazioni semistar, e la generalizzazione di domini classici della teoria degli ideali (domini noetheriani, domini di Prüfer e domini di Dedekind) al contesto delle operazioni semistar.

2. – Operazioni semistar e operazioni star sui sopra-anelli.

L'obiettivo di questa parte del lavoro è mettere in relazione l'insieme delle operazioni semistar su un dominio D con l'insieme delle operazioni star sui sopra-anelli di D . Si consideri un'operazione semistar $\star$ su D e un sopra-anello T di D . Dato che $\overline{F}(T) \subseteq \overline{F}(D)$, ha senso considerare la restrizione di $\star$ a $\overline{F}(T)$. Questa nuova applicazione, che denotiamo con $\star$, (se $\iota : D \hookrightarrow T$ è l'immersione canonica di D in T), è una operazione semistar su T . In particolare, quando $T = D^\star$, $\star$, è una operazione star (o più precisamente, una operazione (semi)star, cioè una operazione semistar su T che ristretta all'insieme degli ideali frazionari è una operazione star). Viceversa, se $\star$ è una operazione semistar su T , l'applicazione $\star' : \overline{F}(D) \rightarrow \overline{F}(D)$ definita da $I^{\star'} := (IT)^\star$ è una operazione semistar su T . Risultano definite un'applicazione $(-)_i : \mathbf{SStar}(D) \rightarrow \mathbf{SStar}(T)$ e una applicazione $(-)' : \mathbf{SStar}(T) \rightarrow \mathbf{SStar}(D)$. Quando $T = D^\star$ si ha che $((\star)_i)' = \star$ e, in generale, $((\star)')_i = \star$. Ne segue che queste applicazioni inducono una biiezione fra l'insieme delle operazioni semistar $\star$ su D tali che $D^\star = T$ e l'insieme delle operazioni (semi)star su T . Si ha allora il seguente teorema:

TEOREMA 1. – *L'applicazione $(-)_i$, stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme delle operazioni semistar su D e l'insieme delle operazioni (semi)star su tutti i sopra-anelli di D .*

Dato che le operazioni (semi)star sono «molto simili» alle classiche operazioni star, questo teorema permette di utilizzare, per lo studio delle operazioni semistar, risultati già noti per le operazioni star. Fra le numerose applicazioni di questo risultato citiamo il fatto che esso consente di determinare facilmente le operazioni semistar sugli anelli di valutazione e di caratterizzare i domini D con $n = \dim(D) + 1$, $\dim(D) + 2$ operazioni semistar.

3. – Semistar invertibilità e domini «semistar Dedekind».

Le principali classi di domini studiate nella teoria classica degli ideali sono i domini noetheriani (domini in cui ogni catena di ideali è stazionaria), i domini di Prüfer (domini in cui ogni ideale finitamente generato è invertibile) e i domini di Dedekind (domini di

Prüfer noetheriani). Tutte queste nozioni sono state generalizzate utilizzando la t -operazione: un dominio di Mori è un dominio in cui ogni catena di t -ideali (ideali tali che $I^t = I$) è stazionaria, un PvMD («Prüfer v -multiplication domain») è un dominio in cui ogni ideale finitamente generato è t -invertibile (come ricordato nella Sezione 1, un ideale I è t -invertibile se $(II^{-1})^t = D$), un dominio di Krull è un PvMD di Mori.

Scopo di questa sezione è quello di definire una «buona» nozione di invertibilità rispetto ad una operazione semistar, e di generalizzare tutte le classi di domini citate al caso di arbitrarie operazioni semistar.

Dato un dominio D e una operazione semistar $\star$ su D , diremo che D è $\star$ -noetheriano se ogni catena di quasi- $\star$ -ideali è stazionaria (un ideale I è un quasi- $\star$ -ideale se $I^\star \cap D = I$). Ad esempio, i domini t -noetheriani sono esattamente i domini di Mori. Vari classici risultati sui domini noetheriani, come il classico teorema di Cohen (un dominio è noetheriano se e soltanto se ogni ideale primo è finitamente generato) e il teorema della base di Hilbert (se un dominio è noetheriano anche l'anello dei polinomi su quel dominio è noetheriano), sono generalizzati nel mio lavoro al caso dei domini $\star$ -noetheriani, per particolari operazioni semistar (canonicamente associate a $\star$) denotate con $\tilde{\star}$ (più precisamente, $E^{\tilde{\star}} := \bigcup\{(E : J) \mid J \text{ ideale finitamente generato di } D \text{ tale che } J^\star = D^\star\}$, per ogni $E \in \overline{F}(D)$).

Il primo (e più immediato) modo di definire una nozione di invertibilità di un ideale rispetto a una operazione semistar è quello di trasportare la definizione di t -invertibilità. Data una operazione semistar $\star$ su un dominio D , diremo che un ideale non nullo I di D è $\star$ -invertibile se $(II^{-1})^\star = D^\star$. Utilizzando questa nozione, M. Fontana, P. Jara e E. Santos [1] hanno definito i $P\star MD$ («Prüfer semistar multiplication domains»): D è un $P\star MD$ se e soltanto se ogni ideale non nullo finitamente generato di D è $\star_f$ -invertibile ($\star_f$ è una operazione semistar «di tipo finito» canonicamente associata a $\star$: più precisamente, per ogni $E \in \overline{F}(D)$, $E^{\star_f} := \bigcup\{F^\star \mid F \subseteq E, F \text{ finitamente generato}$).

Nel caso in cui $\star$ è l'operazione identità, i $P\star MD$ sono esattamente i domini di Prüfer, nel caso in cui $\star = t$ otteniamo i PvMD.

Il passo successivo è quello di definire un dominio $\star$ -Dedekind come un dominio che è allo stesso tempo $\star$ -noetheriano e un $P\star MD$. Chiaramente ci si aspetta che un dominio $\star$ -Dedekind abbia proprietà simili a quelle di un dominio di Dedekind o di un dominio di Krull: in particolare, ci si aspetta che ogni ideale non nullo di D sia $\star$ -invertibile (infatti, in un dominio di Dedekind ogni ideale è invertibile e in un dominio di Krull ogni ideale è t -invertibile). Il prossimo esempio mostra che ciò non accade, e ci conduce a dare una seconda definizione di invertibilità rispetto a una operazione semistar.

ESEMPIO 1. – Sia D un dominio «quasi-Dedekind» (cioè un dominio tale che ogni sua localizzazione a un ideale primo è un dominio di valutazione discreta noetheriano (un DVR)) che non sia un dominio di Dedekind. Esiste allora in D un ideale massimale P non invertibile. Dato che P è un massimale non invertibile di un dominio di Prüfer, si ha che $P^{-1} = D$. Sia $\star$ l'operazione semistar data dall'estensione a D_P , cioè $E^\star = ED_P$ per ogni $E \in \overline{F}(D)$. È facile dimostrare che D è un

dominio $\star$ -Dedekind (essenzialmente perché D è di Prüfer e $D^\star = D_P$ è noetheriano). Ma l'ideale P non è $\star$ -invertibile, perché $(PP^{-1})^\star = PD_P \neq D^\star = D_P$. Si può però osservare che $D^\star = D_P = (P(D_P : P))D_P = (P(D^\star : P))^\star$.

Diremo che un ideale non nullo I di D è *quasi- $\star$ -invertibile* se $(I(D^\star : I))^\star = D^\star$. È facile dimostrare a questo punto che D è un $P\star MD$ se e soltanto se ogni ideale non nullo di D è quasi- $\tilde{\star}$ -invertibile e quindi il seguente teorema, che permette di generalizzare la caratterizzazione dei domini di Dedekind e dei domini di Krull in termini di invertibilità al caso dei domini semistar Dedekind.

TEOREMA 2. – *Sia D un dominio e $\star$ una operazione semistar su D . Le seguenti sono equivalenti:*

- (i) D è un dominio $\star$ -Dedekind.
- (ii) Ogni ideale non nullo di D è quasi- $\tilde{\star}$ -star invertibile.
- (iii) Ogni quasi- $\tilde{\star}$ -ideale primo è quasi- $\tilde{\star}$ -invertibile.

Numerose altre caratterizzazioni dei domini di Dedekind possono essere generalizzate al caso dei domini semistar Dedekind: le raccogliamo nel prossimo teorema, ricordando che un dominio ha $\tilde{\star}$ -dimensione 1 se ogni primo di altezza 1 è un quasi- $\tilde{\star}$ -ideale e che D è quasi- $\tilde{\star}$ -integralmente chiuso se $(I^\star : I^\star) \subseteq D^\star$ per ogni ideale finitamente generato I di D .

TEOREMA 3. – *Sia D un dominio e $\star$ una operazione semistar su D . Le seguenti sono equivalenti:*

- (i) D è un dominio $\star$ -Dedekind.
- (ii) D è $\tilde{\star}$ -noetheriano, ha $\tilde{\star}$ -dimensione 1 ed è quasi- $\tilde{\star}$ -integralmente chiuso.
- (iii) Per ogni ideale non nullo I di D esiste $n \geq 1$ ed esistono quasi- $\tilde{\star}$ -ideali primi $P_1, P_2, \dots, P_n$ e interi non negativi $e_1, e_2, \dots, e_n$ tali che $I^\star = (P_1 P_2 \dots P_n)^{\tilde{\star}}$.
- (iv) Per ogni ideale non nullo I di D ed ogni $a \in I$, $a \neq 0$, esiste $b \in I^\star$ tale che $I^\star = (a, b)^{\tilde{\star}}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FONTANA M., JARA P. e SANTOS E., *Prüfer $\star$ -multiplication domains and semistar operations*, J. Algebra Appl., 2 (2003), 21-50.
- [2] GILMER R., *Multiplicative ideal theory*, Marcel Dekker (1972).
- [3] OKABE T. e MATSUDA R., *Semistar-operations on integral domains*, Math. J. Toyama Univ., 17 (1994), 1-24.

Dipartimento di Matematica, Università «Roma Tre»
e-mail: pizzoza@mat.uniroma3.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma Tre) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Marco Fontana, Università «Roma Tre»