Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giovanni Ortenzi

Nuove gerarchie integrabili e operatori di vertice per algebre di Lie polinomiali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 601–604.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_601_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 601-604

Nuove gerarchie integrabili e operatori di vertice per algebre di Lie polinomiali

GIOVANNI ORTENZI

Nella presente nota si elucidano i punti salienti della soluzione di un problema concernente il filone di ricerca che stabilisce un collegamento tra le gerarchie di simmetrie di PDE integrabili e le rappresentazioni delle algebre di Kac-Moody attraverso i cosiddetti *operatori di vertice* (OV). Nel caso in cui si abbia a che fare con affinizzazioni di algebre di Lie (semi)semplici, questo collegamento è stato chiaramente stabilito durante gli anni ottanta da alcuni fondamentali lavori, come quelli di Kac e Wakimoto di Kac e Peterson (per una summa di questi lavori si veda il libro [5]). In questi articoli si costruisce una rappresentazione dell'affinizzazione di ogni algebra di Lie semplice $\mathfrak{g}$ attraverso l' azione di generatori di operatori differenziali, gli OV appunto, su opportuni spazi di Fock dati da spazi di polinomi in più variabili. Si dimostra, quindi, che attraverso gli OV associati a $\mathfrak{g}$ è possibile costruire un particolare funzionale generatore i cui termini dello sviluppo di Taylor formale sono esattamente le singole equazioni di una gerarchia naturalmente associata a $\mathfrak{g}$ ([1]).

Contemporaneamente, in Giappone, la scuola di Kyoto sviluppava un altro metodo che permette di trovare tutte le soluzioni solitoniche delle gerarchie legate agli OV. Anch'esso risulta legato a particolari rappresentazioni, dette fermioniche, delle algebre di Lie. In questo approccio, sviluppato soprattutto da Date, Jimbo, Kashivara e Miwa [6], si rappresentano i limiti induttivi delle algebre di Lie non eccezionali $(a_\infty, b_\infty, \ldots)$ su spazi di Fock fermionici attraverso l'azione di operatori di creazione ed annichilazione che rispettano regole di anticommutazione dettate dalle algebre di Clifford $Cl_A,\ Cl_B, \ldots$. Uno dei maggiori risultati che si ottennero è legato al fatto che esiste una mappa, la *boson-fermion correspondence*, la quale collega biunivocamente la rappresentazione tramite OV con la rappresentazione fermionica, e dà così la possibilità, a partire solo dall'algebra di Lie iniziale e dall'associata algebra di Heisenberg, di ottenere sistemi integrabili e ampie classi di soluzioni. Combinazioni di questi stessi operatori consentono di rappresentare anche i gruppi infinito-dimensionali associati a queste algebre. Questi gruppi, come mostrò nel 1981 Sato [8], mappano soluzioni solitoniche delle equazioni in soluzioni solitoniche, sono

([1]) Il legame tra algebre di Lie semplici e sistemi integrabili era già stato stabilito pochi anni prima da Drienfeld e Sokolov ([2]) in altro contesto.

cioè il gruppo delle simmetrie interne della gerarchia. Si ricorda che i solitoni sono particolari soluzioni tipo «onda viaggiante» di PDE non lineari. Esse hanno la caratteristica di essere funzioni lisce (almeno in questo contesto) e a decrescenza rapida, costituite da più picchi viaggianti a differente velocità il cui scattering li altera solo di una fase. È possibile dimostrare che l'azione del gruppo delle simmetrie interne coincide con l'applicazione successiva di OV su uno stato dello spazio di Fock che sia soluzione della gerarchia. In particolare si trova le soluzioni di norma note come a «n solitoni» sono date dall'applicazione successiva di OV sullo stato di vuoto dello spazio di rappresentazioni.

Di queste costruzioni molto poco si sa dire se l'algebra di Lie di partenza non è semisemplice e proprio in questa direzione è mosso il nostro interesse. Negli ultimi tempi qualche articolo relativo alle teorie conformi di campo di tipo Wess-Zumino-Witten [3] ha posto l'accento sulla possibilità di affinizzare una classe più ampia di algebre di Lie: le algebre *metriche* [7]. Esse sono algebre dotate di un prodotto scalare ad-invariante e non-degenere il quale garantisce sia la possibilità di costruire un'algebra di Lie infinito dimensionale sia l'esistenza, nell' algebra inviluppante universale, di un Casimir del secondo ordine. Questi sono ingredienti fondamentali per le costruzioni prima viste. È quindi lecito domandarsi se sia possibile trovare per queste algebre metriche anche una rappresentazione tramite OV.

In generale la risposta non è ancora nota.

Nel lavoro di tesi si trova una classe di algebre non-semisemplici ma metriche di cui si possono costruire le rappresentazioni tramite OV: le algebre polinomiali. Esse possono essere definite come $\mathfrak{g}^{(n)} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}^{(n)}(\lambda)$ dove $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie semplice e $\mathbb{C}^{(n)}(\lambda)$ è l'anello dei polinomi di grado n definito come

$$\mathbb{C}^{(n)}(\lambda) := \mathbb{C}(\lambda)/\mathcal{I}_n(\lambda)$$

ove $\mathcal{I}_n(\lambda) = \{p(\lambda) \in \mathbb{C} | \; \exists \; q(\lambda) \in \mathbb{C} : p(\lambda) = \lambda^{n+1} q(\lambda)\}$.

Queste algebre rivestono un interesse particolare per le perturbazioni dei sistemi integrabili. In letteratura, infatti, è stato più volte considerato (p.es. [4]) il sistema integrabile dato da:

$$\begin{aligned} v_t + 6vv_x + v_{xxx} &= 0 \\ w_t + 6vw_x + w_{xxx} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Negli stessi lavori si notava che è ottenibile la corrispondente forma bilineare di Hirota (si veda tanto il libro [6] quanto piuttosto l'ivi citato articolo originale) di queste equazioni

$$\begin{aligned} (D_x^4 - 4D_xD_t)\tau_0\tau_0 &= 0 \\ (D_x^4 - 4D_xD_t)\tau_0\tau_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

dove $v = (\ln \tau_0)_{\chi\chi}$, $w = \frac{\tau_1}{\tau_0}$ e $D_{x_i} fg := f_{x_i} g - f g_{x_i}$ è un operatore di Hirota. Inoltre si dava anche qualche soluzione solitonica del sistema, ma ne mancava un'interpretazione Lie-teoretica. Nella tesi si è mostrato, del tutto in generale, che ogniqualvolta si consideri un sistema integrabile di Gelfand-Dikij, lo si ponga in forma bilineare di Hirota e si sostituisca alla funzione τ il suo sviluppo perturbativo

$$\tau = \tau_0 + \varepsilon\tau_1 + \varepsilon^2\tau_2 + \dots$$

troncato all'ordine n, si ottiene un sistema integrabile di n PDE. Il generatore della gerarchia associata è dato da opportuni OV che rappresentano le affinizzazioni delle algebre polinomiali. Il caso delle equazioni (1) è solo il più semplice ed è ottenibile partendo dall'algebra polinomiale $A_1^{(1)}(\mathbb{R})$, fatto che corrisponde a considerare le equazioni bilineari relative a KdV e a introdurvi lo sviluppo perturbativo $\tau = \tau_0 + \varepsilon\tau_1$. Da tali considerazioni si possono pure costruire a partire da tutte le algebre di Lie, le gerarchie polinomiali KP associate da cui discendono le equazioni in un numero finito di campi di tipo Boussinesq. Tale costruzione consente anche di trovare tutte le soluzioni solitoniche di questi sistemi «polinomiali» attraverso la già citata azione del gruppo delle simmetrie nascoste, che anche per queste algebre è stato esplicitamente trovato.

Sviluppi futuri.

Uno dei problemi maggiormente interessanti sia dal punto Lie teoretico sia da quello fisico-matematico è una comprensione della eventuale possibilità di trovare rappresentazioni tramite OV e relative gerarchie integrabili per una generica algebra metrica non, quindi, necessariamente riduttiva. Oltre ad un approccio diretto a questo problema, uno dei metodi che potrebbero essere utilizzati per tale generalizzazione è la contrazione di Wigner. Per tutti i casi noti in letteratura, infatti, compreso questo delle algebre polinomiali, si ha che ogni algebra metrica è in realtà la contrazione di Wigner di un'algebra riducibile. Partendo quindi dagli OV per le algebre riducibili potrebbe essere possibile ottenere quelli delle algebre metriche. Una dimostrazione o un controesempio di questo fatto non sono ancora noti.

Un altro aspetto da indagare maggiormente riguarda il fatto che la stragrande maggioranza delle gerarchie integrabili evolutive note ad oggi sono *bihamiltoniane*, cioè il loro flusso evolutivo può essere descritto da due differenti coppie di tensore di Poisson-Hamiltoniana. Inoltre i due tensori di Poisson hanno la caratteristica di essere tali per cui una qualunque loro combinazione lineare sia ancora un tensore di Poisson (*involuzione*). Tale approccio all'integrabilità sembra totalmente scollegato da quello tramite OV. In effetti in quest'ultimo non sono evidenziate le forti proprietà geometriche delle equazioni integrabili, mentre nel primo la costruzione della gerarchia è un processo induttivo che non pone la gerarchia stessa come struttura primordiale di ogni sistema integrabile. Una comprensione dei legami tra questi due approcci potrebbe essere, oltre ad una importanza intrinseca per i sistemi integrabili, un interessante viatico alla scoperta di nuove proprietà, più geometriche, degli OV. Tali proprietà sono alla base, ad esempio, delle succitate teorie Wess-Zumino-Witten, le cui soluzioni hanno una struttura di tipo OV.

BIBLIOGRAFIA

[1] Casati P., Ortenzi G., *New Integrable Hierarchies from Vertex Operator Representations of Polynomial Lie Algebras* nlin.SI/0405040, di prossima pubblicazione su J. Geom. Phys.

[2] Drinfeld V. G., Sokolov V. V., *Lie Algebras and Equations of Korteweg-de Vries Type.* J. Sov. Math. **30** (1985), 1975-2036.

[3] Stanciu S., Figueroa-O'Farrill J., *Nonsemisimple Sugawara constructions* Phys. Lett. B327 (1994), 40-46 , hep-th/9402035

[4] Hirota R., Hu X., Tang X., *A vector potential KdV equation and vector Ito equation: soliton solutions, bilinear Bäcklund transformations and Lax pairs* J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), no. 1, 326-348.

[5] Kac V. G., *Infinite diemsional Lie algebras* (third edition) Cambridge University press, Cambridge, 1990.

[6] Miwa T., Jimbo M., and Date E., *Solitons. Differential Equations, Symmetries and Infinite-Dimensional Algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 135, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[7] Medina A., Revoy P., *Algèbres de Lie et produit scalaire invariant.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 18 (1985), no. 3, 553-561.

[8] Sato M., *The KP hierarchy and infinite-dimensional Grassmann manifolds.* Theta functions–Bowdoin 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), 51-66, Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni,
Università degli studi di Milano-Bicocca
e-mail: giovanni.ortenzi@unimib.it

Dottorato in Matematica Pura ed Applicazioni (sede amministrativa: Milano-Bicocca) - Ciclo XVII
Direttore della ricerca: Prof. Franco Magri, Università degli studi di Milano-Bicocca