Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Carla Novelli

Varietà proiettive speciali di dimensione alta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 597–600.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_597_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 597-600

Varietà proiettive speciali di dimensione alta

Carla Novelli

In generale lo studio e la classificazione delle varietà polarizzate, i.e. coppie (X, L) date da una varietà X e da un fibrato lineare molto ampio L (i.e. L è un iperpiano in un dato embedding di X) è l'oggetto della «Teoria dell'Aggiunzione», per la quale rimandiamo a [5]. Questa teoria, sviluppata da A.J. Sommese, P. Ionescu, T. Fujita, L. Bădescu, M.C. Beltrametti ed altri, essenzialmente riconduce lo studio della varietà X ad una sezione iperpiana di X attraverso la formula di aggiunzione.

Come estensione di questa teoria, l'«Aggiunzione Generalizzata» studia le coppie $(X, \mathcal{E})$ date da una varietà liscia X e da un fibrato vettoriale ampio $\mathcal{E}$ su X, dette anch'esse «varietà polarizzate», la cui classificazione è strettamente legata allo studio del cono di Kleiman-Mori $lineNE(X)$, i.e. la chiusura del cono delle classi di equivalenza numerica degli 1-cicli effettivi di X.

1. – Varietà polarizzate da fibrati vettoriali.

Sia X una varietà proiettiva complessa liscia di dimensione $n \geq 3$ e sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale ampio di rango r su X.

Un famoso teorema di S. Mori afferma che se $\mathcal{E}$ è il fibrato tangente di X, allora X è lo spazio proiettivo; questo risultato è stato generalizzato da M. Andreatta e J.A. Wiśniewski con l'ipotesi che $\mathcal{E}$ sia un sottofascio del fibrato tangente di X.

Per dare condizioni sotto le quali si possano classificare varietà polarizzate $(X, \mathcal{E})$, nello spirito della teoria di Mori assumiamo che X non sia minimale, i.e. che il fibrato anticanonico di X, K_X, non sia nef. Possiamo definire il nef-value $\tau := \tau(X,\ \det \mathcal{E}) := \min\{t \in \boldsymbol{R} : K_X + t \det \mathcal{E} \text{ e nef}\}$ della varietà polarizzata $(X,\ \det \mathcal{E})$, che è un numero razionale (per il teorema di razionalità di Y. Kawamata) positivo (perché K_X non è nef).

Inoltre il divisore $K_X + \tau \det \mathcal{E}$ definisce una faccia estremale $F(\mathcal{E}) := \{C \in lineNE(X) : (K_X + \tau \det \mathcal{E}) \cdot C = 0\}$ nella parte poliedrale, $lineNE_{K_X<0}(X)$, del cono di Kleiman-Mori. Questa faccia è generata da un numero finito di raggi estremali $R_i = \boldsymbol{R}^+[C_i]$, dove C_i è una curva razionale. Ad ogni raggio estremale associamo la lunghezza, i.e. l'intero $l(R) := \min\{-K_X \cdot C \mid [C] \in R\}$, che soddisfa $l(R) \leq n+1$ (per un teorema di S. Mori), ed una mappa $\varphi: X \to Y$ su una varietà proiettiva normale a fibre connesse tale che $-K_X$ è φ-ampio, perciò φ è una contrazione di Fano-Mori che contrae tutte e sole le curve la cui classe numerica appartiene a R.

Lavorando con i raggi estremali in $F(\mathcal{E})$, diamo una classificazione delle coppie $(X, \mathcal{E})$ sotto ipotesi opportune sul nef-value $\tau := \tau(X, \det \mathcal{E})$ della varietà polarizzata $(X, \det \mathcal{E})$ per ogni $\tau \geq \frac{n-2}{r}$ ed una condizione sotto la quale il fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ si spezza come somma diretta $\mathcal{E} = L^{\oplus r}$ per qualche fibrato linare L su X.

Questa classificazione è interamente contenuta in [1]. I risultati principali sono i seguenti.

TEOREMA 1. – *Sia $C \subset X$ una curva razionale tale che $l(R) = -K_X \cdot C$ e $[C] \in R$. Allora*

$$\tau := \tau(X, \det \mathcal{E}) \leq \frac{l(R)}{r}\left(\leq \frac{n+1}{r}\right). \tag{1}$$

Inoltre

1) *l'uguaglianza vale se e solo se* $\det \mathcal{E} \cdot C = r$, *e se V è una famiglia di curve razionali che contiene $f: \boldsymbol{P}^1 \to C \subset X$ allora V è non spezzante.*

2) *Se vale l'uguale ed X è razionalmente connessa per catene rispetto a V, i.e. assumiamo che $\rho(X) = 1$, allora esiste un fibrato lineare (univocamente definito) L su X tale che* $\deg f^*L = 1$ *e* $\mathcal{E} \cong L^{\oplus r}$.

TEOREMA 2. – *Sia $\tau = \frac{n+1}{r}$, allora $(X, \mathcal{E}) = (\boldsymbol{P}^n, \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^n}(1)^{\oplus r})$.*

TEOREMA 3. – *Assumiamo $\frac{nr}{\leq}\tau < \frac{n+1r}{}$, e sia $a :=$* $\det \mathcal{E} \cdot C - r$.
Allora vale uno dei fatti seguenti

1) *$X = \boldsymbol{P}^n$, $a \geq 1$ ed $an \leq r$. Se $r \leq n$, allora $\mathcal{E}$ è $T_{\boldsymbol{P}^n}$ o $\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^n}(2) \oplus \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^n}(1)^{\oplus(r-1)}$.*

2) *$X = \boldsymbol{Q}^n$ ed $\mathcal{E} = \mathcal{O}^n_{\boldsymbol{Q}}(1)^{\oplus r}$.*

3) *X è il proiettivizzato di un fibrato vettoriale di rango n su una curva liscia Y, $\pi: \boldsymbol{P}(\mathcal{F}) \to Y$, ed $\mathcal{E}_{|F} = \mathcal{O}^{n-1}_{\boldsymbol{P}}(1)^{\oplus r}$ per ogni fibra F di π.*

2. – Confronto tra i coni di una varietà proiettiva e di una sezione ampia.

Sia X una varietà proiettiva complessa liscia di dimensione n e sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale ampio di rango r su X. Assumiamo che esista una sezione $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ il cui luogo di zeri, $Z := (s)_0$, è una sottovarietà liscia di codimesione r in X.

Ricordiamo che, se la dimensione di Z è almeno 3, possiamo vedere il cono di Kleiman-Mori di Z come sottoinsieme del cono di Kleiman-Mori di X. Perciò, nello spirito della teoria di Mori, le relazioni tra i coni danno un primo passo per confrontare le strutture di X e Z. Queste relazioni sono state studiate da T. de Fernex ed A. Lanteri in [6] e da M. Andreatta e G. Occhetta in [3] e [4].

Nella tesi diamo esempi in cui i coni sono diversi e una condizione necessaria e sufficiente affinché un raggio estremale di X sia anche raggio estremale di Z.

TEOREMA 4. – *Assumiamo che* $R_X = \boldsymbol{R}^+[C]$ *sia un raggio estremale di* X *tale che* $-(K_X + \det \mathcal{E}) \cdot C > 0$, *allora esiste una curva su* Z *la cui classe numerica è* $[\lambda C]$ *per qualche* $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$.

In particolare, se $N_1(X) = N_1(Z)$ *(e.g. se* $\dim Z \geq 3$*), allora un raggio estremale di* X *è anche raggio estremale di* Z *se e solo se si trova nel semispazio definito da* $\{x \in N_1(X) \mid -(K_X + \det \mathcal{E}) \cdot x > 0\}$.

In particolare, se Z *non è minimale, allora esiste almeno un raggio estremale comune a lineNE*(X) *e lineNE*(Z).

Nel caso dei divisori ampi abbiamo un risultato migliore:

TEOREMA 5. – *Assumiamo che* $\dim Z \geq 3$ *e che* $r = 1$, *i.e.* Z *è una sezione di un fibrato lineare ampio* L. *Allora i raggi estremali di* X *contenuti nel semispazio chiuso definito da* $\{x \in N_1(X) \mid -(K_X + L) \cdot x \geq 0\}$ *sono contenuti anche nel bordo di lineNE*(Z).

TEOREMA 6. – *Assumiamo che* $r = 1$. *Se* $mK_Z = \mathcal{O}_Z$ *per qualche* $m > 0$, *allora* X *è di Fano,* $K_Z = \mathcal{O}_Z$ *and* $NE(X) = NE(Z)$.

Inoltre studiamo i casi in cui Z non ha raggi estremali ma K_Z non è ampio e classifichiamo le coppie $(X, \mathcal{E})$ tali che Z è una superficie liscia di dimensione di Kodaira 0 o 1.

Infine studiamo varietà polarizzate (X, L), dove L è un fibrato lineare ampio su X e Z è una varietà di Fano speciale. In particolare classifichiamo queste coppie quando Z è una varietà di Mukai, o una varietà di Fano di coindice 4, o $-K_Z = \det \mathcal{V}$ per qualche fibrato vettoriale ampio $\mathcal{V}$ su Z di rango $\geq \dim Z - 2$.

Questi risultati sono contenuti in [2] e [9].

3. – 3-folds unirigati.

È ben noto che una varietà irriducibile non degenere $X \subset \boldsymbol{P}^n$ di grado d soddisfa $d \geq n - \dim X + 1$, dove l'uguaglianza si ha per le cosiddette *varietà di grado minimo*, che sono completamente classificate, ed è noto che le varietà per le quali d è «piccolo» rispetto ad n sono coperte da curve razionali.

Più in generale, sia $(X, \mathcal{H})$ una coppia formata da una varietà irriducibile X (eventualmente con opportune ipotesi sulle singolarità) e da un fibrato lineare $\mathcal{H}$ su X che sia sufficientemente «positivo» (e.g. molto ampio, o ampio, o nef e big). Poniamo $d := \mathcal{H}^{\dim X}$ ed $n := \dim |\mathcal{H}|$.

Per misurare il «grado» delle curve razionali che coprono X, si dice che X è unirigata di $\mathcal{H}$-grado al più m se tutte le curve razionali Γ che coprono X soddisfano $\Gamma \cdot \mathcal{H} \leq m$.

Nel caso delle superficie, in [10], M. Reid ha trovato bound sull'unirigatura di $(X, \mathcal{H})$ che dipendono da d ed n.

Nel caso dei 3-fold, in [8], M. Mella ha classificato i possibili modelli minimali-$\sharp$ quando $d < 2n - 4$. Per trovare un bound ottimale per l'unirigatura di grado uno nel caso dei 3-fold, nella tesi si pone la seguente congettura, la cui dimostrazione è ora contenuta in [7].

Congettura: *Sia $(X, \mathcal{H})$ una coppia formata da un 3-fold irriducibile terminale $\boldsymbol{Q}$-fattoriale X e da un fibrato lineare big $\mathcal{H}$ su X tale che $|\mathcal{H}|$ sia senza punti base. Poniamo $d := \mathcal{H}^3$ ed $n := h^0(X, \mathcal{H}) - 1$. Se $d \leq 2n - 10$, allora X è unirigato di $\mathcal{H}$-grado uno, tranne quando un modello minimale-$\sharp$ di $(X, \mathcal{H})$ è $(\boldsymbol{P}^3, \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}^3}(3))$ o $(\boldsymbol{Q}^3, \mathcal{O}_{\boldsymbol{Q}^3}(2))$.*

Nella tesi infatti si vede che, a meno di alcune eccezioni, è sufficiente trovare un bound che escluda che un modello minimale-$\sharp$ di $(X, \mathcal{H})$ sia una fibrazione su una curva liscia con fibra generica $(F, H^{\sharp}_{|F}) \cong (\boldsymbol{P}^2, \mathcal{O}(2))$ ed al più un numero finito di fibre $(G, H^{\sharp}_{|G}) \cong (\boldsymbol{S}_4, \mathcal{O}(1))$, dove $\boldsymbol{S}_4$ è il cono sulla curva quartica normale ed il vertice è su una singolarità iperquoziente di tipo $1/2(1, -1, 1)$ con $f = xy - z^2 + t^k$, per $k \geq 1$.

In particolare, studiamo le singolarità di questi 3-fold, e proponiamo un esempio per dimostrare che il bound è ottimale.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREATTA M. e NOVELLI C., *Manifolds polarized by vector bundles*, Preprint.

[2] ANDREATTA M., NOVELLI C. e OCCHETTA G., *Connections between the geometry of a projective variety and of an ample section*, To appear on Math. Nachr.

[3] ANDREATTA M. e OCCHETTA G., *Ample vector bundles with sections vanishing on special varieties*, Internat. J. Math., **10** (1999), 677-696.

[4] ANDREATTA M. e OCCHETTA G., *Extending extremal contractions from an ample section*, Advances in Geometry, **2** (2002), 133-146.

[5] BELTRAMETTI M.C. e SOMMESE A.J., *The adjunction theory of complex projective varieties*, volume 16 of Exp. Math. de Gruyter, Berlin, 1995.

[6] DE FERNEX T. e LANTERI A., *Ample vector bundles and del Pezzo manifolds Kodai,* Math. J., **22** (1999), 83-98.

[7] KNUTSEN A.L., NOVELLI C. e SARTI A., *On varieties which are uniruled by lines*, Preprint.

[8] MELLA M., *$\sharp$-minimal model of uniruled 3-folds*, Math. Z., **242** (2002), 687-707.

[9] NOVELLI C., *Fano manifolds of coindex four as ample sections*, Preprint.

[10] REID M., *Surfaces of small degree*, Math. Ann., **275** (1986), 71-80.

Dipartimento di Matematica, Università di Trento
e-mail: novelli@science.unitn.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Trento) - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Marco Andreatta