Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Raffaele Dario Marcovecchio

Alcuni problemi di approssimazione diofantea

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 581–584.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_581_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 581-584

Alcuni problemi di approssimazione diofantea

RAFFAELE DARIO MARCOVECCHIO

1. – Determinanti polinomiali-esponenziali.

Nel primo capitolo della tesi si studia una classe di equazioni polinomiali-esponenziali che si ottengono annullando opportuni determinanti che generalizzano il determinante di Vandermonde.

Siano $k \geq m \geq 1$ interi, e siano $r_1, \dots, r_m$ interi positivi tali che $r_1 + \cdots = r_m = k$. Siano $a_1, \dots, a_m$ elementi non nulli di un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica zero. Sia $G(x) = G(a_1, \dots, a_m; r_1, \dots, r_m; x_1, \dots, x_k)$ la funzione di variabili intere $x = (x_1, \dots, x_k)$ definita mediante il seguente determinante di ordine k:

$$G(x) = \begin{vmatrix} a_1^{x_1} & \cdots & x_1^{r_1-1}a_1^{x_1} & \cdots & a_m^{x_1} & \cdots & x_1^{r_m-1}a_m^{x_1} \\ a_1^{x_2} & \cdots & x_2^{r_1-1}a_1^{x_2} & \cdots & a_m^{x_2} & \cdots & x_2^{r_m-1}a_m^{x_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{x_k} & \cdots & x_k^{r_1-1}a_1^{x_k} & \cdots & a_m^{x_k} & \cdots & x_k^{r_m-1}a_m^{x_k} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Con argomenti elementari si ottiene l'identità

$$G(x_1, \dots, x_k) = (a_1^{r_1} \cdots a_m^{r_m})^{x_1} G(0, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1).$$

Dunque, nello studio dell'equazione $G(x_1, \dots, x_k) = 0$, non è restrittivo supporre $x_1 = 0$. L'obiettivo del primo capitolo è ottenere un'estensione del seguente risultato di Schlickewei e Viola [5]:

TEOREMA 1. – *Siano $r_1 = \cdots = r_m = 1$, quindi $k = m$, e siano $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}^\times$ tali che a_j/a_l non sia una radice dell'unità per ogni $j \neq l$. Allora l'equazione $G(0, y_2, \dots, y_k) = 0$ ha al più $\exp((6k!)^{3k!})$ soluzioni $(y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k-1}$ in posizione generica, tali cioè che nessun sottodeterminante proprio di $G(0, y_2, \dots, y_k)$ si annulli.*

Un sottodeterminante Δ di $G(a_1, \dots, a_m; r_1, \dots, r_m; x_1, \dots, x_k)$ si dice *ben messo* se è anch'esso della forma (1), ovvero se esistono interi positivi m', $i_1, \dots, i_{m'}$, $r'_1, \dots, r'_{m'}$, k', $j_1, \dots, j_{k'}$, con $1 \leq m' \leq m$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_{m'} \leq m$, $1 \leq r'_h \leq r_{i_h}$ per ogni $h = 1, \dots, m'$, $k' = r'_1 + \cdots + r'_{m'}$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_{k'} \leq k$, per i quali $\Delta = G(a_{i_1}, \dots, a_{i_{m'}}; r'_1, \dots, r'_{m'}; x_{j_1}, \dots, x_{j_{k'}})$. Il principale risultato dimostrato è il seguente [3]:

TEOREMA 2. – *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo di numeri di grado d, siano* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}^\times$ *tali che* a_j/a_l *non sia una radice dell'unità per ogni* $j \neq l$. *Siano inoltre* $k = 4$ *e* $2 \leq m \leq 3$. *Allora l'equazione* $G(0, y_2, y_3, y_4) = 0$ *ha al più* $2^{2^{25}} d^{38400}$ *soluzioni* $(y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^3$ *in posizione generica, tali cioè che nessun sottodeterminante proprio ben messo si annulli.*

In sintesi, la dimostrazione consiste nell'utilizzare un risultato di Schlickewei e Schmidt sul numero delle soluzioni di un'equazione polinomiale-esponenziale con «gruppo di relazione banale» per ricondursi, attraverso un'analisi combinatoria «caso per caso», allo studio di equazioni diofantee abbastanza semplici.

2. – $\mathbb{Q}(a)$-indipendenza lineare di 1, $Li_1(a), Li_2(a)$ mediante le approssimanti di Padè del II tipo

Il polilogaritmo $Li_s(z)$ è definito, per $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, ed s intero positivo, dalla seguente serie:

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^s}.$$

Tali funzioni ammettono un unico prolungamento analitico in $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Nel secondo capitolo della tesi otteniamo l'indipendenza lineare di $1, Li_1(a), Li_2(a)$ su $\mathbb{Q}(a)$, per una classe di numeri algebrici $a \notin [1, +\infty)$ che soddisfano certe condizioni tecniche che, per ragioni di spazio, riassumiamo dicendo che a è «sufficientemente vicino all'origine», in dipendenza dei coniugati di a e del coefficiente direttivo a_0 dell'equazione minima di a: $a_0 a^D + \cdots + a_{D-1} a + a_D = 0$, $a_0, \ldots, a_D \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$, $(a_0, \ldots, a_D) = 1$.

In particolare, proponiamo un'estensione del medoto di Hata analoga all'estensione del medoto di Alladi e Robinson ai logaritmi dei numeri algebrici dovuta ad Amoroso e Viola [1].

Nella sua versione più semplice il criterio d'indipendenza lineare usato può essere così formulato:

PROPOSIZIONE 1. – *Siano* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$. *Supponiamo che esista una successione di vettori* $(\vartheta_{0,n}, \vartheta_{1,n}, \vartheta_{2,n}) \in \mathbb{Z}^3$ *tali che:*

(i) $\vartheta_{0,n}\xi_1 - \vartheta_{1,n} \to 0$ *e* $\vartheta_{0,n}\xi_2 - \vartheta_{2,n} \to 0$ *per* $n \to +\infty$;

(ii) *per ogni* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ *non entrambi nulli esistono infiniti indici n per i quali* $\beta_1(\vartheta_{0,n}\xi_1 - \vartheta_{1,n}) + \beta_2(\vartheta_{0,n}\xi_2 - \vartheta_{2,n}) \neq 0$.

Allora $1, \xi_1, \xi_2$ *sono linearmente indipendenti su* $\mathbb{Q}$.

DIMOSTRAZIONE. – Per assurdo, se $1, \xi_1, \xi_2$ fossero linearmente dipendenti su $\mathbb{Q}$, esisterebbero $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli tali che $\beta_0 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 \in \mathbb{Z}$. Sia

$\chi_n = \beta_1(\vartheta_{0,n}\xi_1 - \vartheta_{1,n}) + \beta_2(\vartheta_{0,n}\xi_2 - \vartheta_{2,n}) = \beta_0\vartheta_{0,n} - \beta_1\vartheta_{1,n} - \beta_2\vartheta_{2,n}$. Per l'ipotesi (i) $\chi_n \to 0$ per $n \to +\infty$. D'altra parte, per l'ipotesi (ii), esistono infiniti indici n tali che χ_n è un intero non nullo, quindi $|\chi_n| \geq 1$, il che è una contraddizione. ■

Sia d_n il minimo comune multiplo degli interi $1, \ldots, n$. Utilizzando la tecnica di Hata [2] si costruiscono tre successioni di polinomi, $a_n(z)$, $a'_n(z)$, $b_n(z)$, di grado n, tali che $d_n^2 a_n(z), d_n a'_n(z), b_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$, e tali inoltre che le funzioni analitiche $I_n(z) = a_n(z) - b_n(z)Li_2(z)$ e $I'_n(z) = a'_n(z) + b_n(z)Li_1(z)$ si annullino nell'origine con molteplicità $\geq 3n+1$.

Tale costruzione è essenzialmente unica, e si ottiene introducendo la seguente successione di polinomi di tipo Legendre:

$$Q_n(x) = \frac{1}{n_1! n_2!}\Big(x^{n_2}\big(x^{n_1}(1-x)^n\big)^{n_1}\Big)^{n_2},$$

dove $n_1 = [\frac{n}{2}]$, $n_2 = [\frac{n+1}{2}]$. Per $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, 1$ poniamo quindi

$$I_n(z) = z^{n+1}\int_0^1 \frac{Q_n(z)}{1-zx}\log x dx \tag{2}$$

$$I'_n(z) = z^{n+1}\int_0^1 \frac{Q_n(z)}{1-zx} dx \tag{3}$$

Per ottenere la condizione (i) della proposizione 1, è sufficiente una maggiorazione di $\limsup_{n\to+\infty} |L_n(z)|^{1/n}$, per $L_n = I_n, I'_n$ (ed anche per $L_n = b_n$ nel caso in cui a sia un numero algebrico non razionale). Queste stime si ottengono grazie ad un'integrazione per parti. Il punto più delicato della dimostrazione è la verifica della condizione (ii), che riposa sulle proprietà di ortogonalità di $Q_n(x)$, ed è la ragione dell'introduzione, che altrimenti appare artificiosa, degli indici n_1 ed n_2.

Come casi particolari, riotteniamo ad esempio il risultato di Chudnovsky-Hata sull'indipendenza lineare su $\mathbb{Q}$ di $1, Li_1\big(\frac{1}{q}\big), Li_2\big(\frac{1}{q}\big)$ per ogni intero $q \in (-\infty, -8] \cup [12, +\infty)$. A titolo esemplificativo, alcuni risultati nuovi sono l'indipendenza lineare su $\mathbb{Q}(i)$ di $1, Li_1\big(\frac{i}{q}\big), Li_2\big(\frac{i}{q}\big)$ per ogni intero $q \in (-\infty, -11] \cup [11, +\infty)$, e l'indipendenza lineare su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ di $1, Li_1(362 - 209\sqrt{3}), Li_2(362 - 209\sqrt{3})$.

3. – $\mathbb{Q}(a)$-indipendenza lineare di 1, $Li_1(a), Li_2(a)$ mediante le approssimanti di Padè del II tipo.

Nel terzo capitolo della tesi viene affrontato lo stesso problema studiato nel capitolo 2 ma da un punto di vista differente. Anziché considerare la successione $\big(I_n(z), -I'_n(z)\big)$ di coppie di forme lineari in 1 e $Li_1(z)$ ed in 1 e $Li_2(z)$ rispettivamente, con il coefficiente comune $-b_n(z)$ per $Li_1(z)$ e per $Li_2(z)$, si considera, seguendo

Rivoal [4], una successione di forme lineari in 1, $Li_1(z)$ e $Li_2(z)$. All'uopo introduciamo, seguendo Nikishin-Rivoal, la seguente serie, dove n è un intero non negativo:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-2n-1)}{k^2(k+1)^2\cdots(k+n)^2} z^{n+k}, \quad |z| < 1.$$

La funzione $S_n(z)$ ammette un unico prolungamento analitico in $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Inoltre $S_n(z)$ si annulla nell'origine con ordine $3n+2$, ed inoltre esistono tre polinomi $A_{0,n}(z)$, $A_{1,n}(z)$ e $A_{2,n}(z)$, di grado n, tali che $d_n^2 A_{0,n}(z), d_n A_{1,n}(z), A_{2,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, ed inoltre $S_n(z) = A_{0,n}(z) + A_{1,n}(z) Li_1(z) + A_{2,n}(z) Li_2(z)$.

Con il programma Maple V ricaviamo una relazione lineare ricorrente di ordine 3 soddisfatta dalla successione $S_n(z)$, e quindi anche dalle successioni $A_{0,n}(z)$,$A_{1,n}(z)$, $A_{2,n}(z)$. Applicando il teorema di Poincaré, o alcune sue opportune varianti, otteniamo i valori esatti di $\lim\limits_{n\to+\infty} |L_n(a)|^{1/n}$, per $L_n = S_n, A_{0,n}, A_{1,n}, A_{2,n}$, ed una maggiorazione per $\limsup\limits_{n\to+\infty} \max\{|A_{0,n}(z)|, |A_{1,n}(z)|, |A_{2,n}(z)|\}^{1/n}$, al variare di z tra i coniugati di a.

Per questa via si determina una nuova classe di numeri algebrici a per i quali $1, Li_1(a), Li_2(a)$ sono $\mathbb{Q}(a)$-linearmente indipendenti. Quest'ultima è strettamente contenuta in quella ottenuta nel capitolo 2, come era stato già annunciato da Chudnovsky.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMOROSO F. e VIOLA C., *Approximation measures for logarithms of algebraic numbers*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), **30** (2001), 225-249.

[2] HATA M., *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures Appl. (9), **69** (1990), 133-173.

[3] MARCOVECCHIO R., *Determinanti polinomiali-esponenziali*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), **7** (2004), 713-730.

[4] RIVOAL T., *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impair*, Thèse de Doctorat de l'Universitè de Caen (2001).

[5] SCHLICKEWEI H.P. e VIOLA C., *Generalized Vandermonde determinants*, Acta Arith., **95** (2000), 123-137.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Pisa
e-mail: marcovec@mail.dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Pisa) - Ciclo XV
Direttore di Ricerca: Prof. Carlo Viola, Università degli Studi di Pisa