Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Livia Marcellino

Su alcuni metodi numerici per il restauro automatico digitale di immagini

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 577–580.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_577_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 577-580

Su alcuni metodi numerici per il restauro automatico digitale di immagini

LIVIA MARCELLINO

1. – Premessa.

Le pellicole cinematografiche costituiscono un patrimonio artistico e culturale inestimabile, che purtroppo tende a degradarsi col l'usura e il tempo.

Questo lavoro concerne le problematiche numeriche relative alla progettazione e implementazione di un software automatico per il restauro digitale di sequenze di immagini, con particolare riguardo al riconoscimento e l'eliminazione di una specifica classe di difetti denominata *blotch* (sporcizia).

2. – Riconoscimento ed eliminazione dei blotch.

I *blotch* (polvere, capelli, impronte digitali, muffa, piccole abrasioni, graffi instabili e acqua) si presentano come macchie chiare o scure di dimensione variabile. La loro intensità luminosa è significativamente differente dall'intensità luminosa delle zone non corrotte e inoltre, essi sono temporalmente indipendenti, ovvero difficilmente si presentano, nella stessa posizione, in fotogrammi adiacenti.

Se indichiamo con $I(x, y) \in \Re$ il valore che definisce l'intensità luminosa del pixel (x, y), ovvero il livello di grigio associato al punto $(x, y) \in \Omega \subset \Re^2$, allora l'intensità luminosa dell'immagine corrotta da *blotch* può essere descritta mediante la funzione $\widetilde{I}$, tale che ad ogni punto $(x, y) \in \Omega$, associa il valore:

$$\widetilde{I}(x, y) = [1 - b(x, y)] + b(x, y) + b(x, y)I^B(x, y) \tag{1}$$

dove b è la *funzione caratteristica* del dominio dei *blotch* B, contenuto nel dominio dell'immagine Ω e assume valore $b(x, y) = 1$, per ogni punto $(x, y) \in B \subset \Omega$; mentre $I^B(x, y)$ definisce i valori dell'intensità luminosa nelle zone corrotte [3].

Il problema del riconoscimento ed eliminazione del difetto consiste, quindi, nel calcolare la funzione b e l'intensità luminosa I^B, nota $\widetilde{I}$. In particolare, consta di due fasi: una prima fase di *individuazione*, in cui si determina la posizione dei *blotch* nell'immagine, ovvero la funzione caratteristica b nota $\widetilde{I}$; e una successiva fase di *rimozione*, in cui si valuta l'intensità luminosa corretta I^B, nota b.

In presenza di sequenze di immagini, tale problema può essere affrontato utilizzando le informazioni relative al *moto* apparente, caratteristico di ogni sequenza di immagini.

3. – Sequenze di immagini.

Indicato con $J \subset \Re$ l'intervallo di tempo, che definisce la sequenza di immagini, l'intensità luminosa della sequenza risulta dunque una funzione dello spazio e del tempo che, al variare di $t \in J$, associa al punto $(P(t), t) \in \Omega \times J$, un'intensità di grigio $I(P(t), t) \in \Re$.

Un approccio alla soluzione di tale problema fa uso dell'assunzione secondo cui *l'intensità luminosa della sequenza resta costante lungo la traiettoria del moto*. Ciò implica che, se ad ogni istante $t \in J$, il vettore $v(t) = \big(v_x(t), v_y(t)\big)$, definisce il *campo di moto* della sequenza, ovvero gli spostamenti di ogni punto $(P(t), t) \in \Omega \times J$, allora la *traiettoria del moto* risulta individuata dalla linea (o arco di linea) L, luogo delle successive posizioni occupate da $P(t)$ al variare del tempo $t \in J$, e dunque:

$$\frac{\partial}{\partial L} I(P(t), t) = 0 \tag{2}$$

Il campo di moto relativo alla sequenza di immagini d'intensità luminosa $\widetilde{I}$, presenta delle discontinuità in corrispondenza delle zone danneggiate, quindi il dominio dei *blotch* nella sequenza può essere caratterizzato come:

$$B \times J = \left\{ (P(t),\, t) \in \Omega \times J : \frac{\partial \widetilde{I}}{\partial L} \neq 0 \right\} \tag{3}$$

Nota la funzione caratterista b e i punti $(P(t), t) \in B \times J$ in cui essa assume valore uno, la funzione I^B nel dominio $B \times J \subset \Omega \times J$, può essere ottenuta risolvendo il problema di migliore approssimazione:

$$I^B = arg \min_{I^B} \{ \|I^0 - I^B\| + \lambda \|\phi(\nabla I^B)\| \} \tag{4}$$

Il termine di regolarizzazione (*edge-preserving*), esprime il vincolo secondo cui: *la soluzione deve essere una funzione costante a tratti*, per cui l'immagine corrispondente deve essere costituita da regioni omogenee delimitate da contorni ben definiti. In particolare, la funzione ϕ misura il gradiente della funzione I^B e verifica le ipotesi per cui il problema (2) ammette un'unica soluzione e può essere sostituito dal seguente problema lineare:

$$min\, E^d(I^B, d) = min\{ \|I^0 - I^B\| + \lambda^2 \|\phi(d\|\nabla I^B\|^2 + \psi((d)))\| \} \tag{5}$$

Minimizzando separatamente rispetto alle variabili d ed I^B (*schema del punto fisso alternato*), l'intensità luminosa I^B si ottiene risolvendo il seguente schema numerico iterativo, di tipo punto fisso:

$$b^{n+1} = \frac{\phi'(\nabla I_n^B)}{2\|\nabla I_n^B\|} \tag{6}$$

$$I_{n+1}^B = G \star I_n^B - \lambda\, div(b^{n+1} \nabla I_n^B) \tag{7}$$

Il problema principale è fornire un'approssimazione iniziale $I_0^B = I^0$, che tenga conto di informazioni attendibili.

L'idea consiste nel valutare la funzione I^0 mediante *interpolazione temporale* [3]. Precisamente, considerati tre istanti successivi della sequenza $t - \Delta t, t, t + \Delta t$, risultano definite le due direzioni della traiettoria del moto: la direzione positiva L^+ (dall'istante $t - \Delta t$ all'istante t) e la direzione negativa L^- (dall'istante $t + \Delta t$ all'istante t).

Se per ogni punto della sequenza, sono noti gli spostamenti: $(\Delta x^+, \Delta y^+)$ dall'istante $t - \Delta t$ all'istante t e $(\Delta x^-, \Delta y^-)$ dall'istante $t + \Delta t$ all'istante t, allora è possibile far corrispondere parti di immagini successive combinando i dati lungo la traiettoria del moto. Tale procedimento è, generalmente, noto col nome di *compensazione del moto* e consiste nel valutare le funzioni $I_{t-\Delta t}^C(P(t), t)$ e $I_{t+\Delta t}^C(P(t), t)$ dette *immagini compensate*, a partire da $I(P(t - \Delta t), t - \Delta t)$ e $I(P(t + \Delta t), t + \Delta t)$ e porre:

$$I^0(P(t), t) = \frac{I_{t-\Delta t}^C(P(t), t) + I_{t+\Delta t}^C(P(t), t)}{2} \tag{8}$$

Quindi, il problema viene ricondotto alla stima del campo di moto.

4. – Il campo di moto in sequenze di immagini.

Il campo di moto (o *flusso ottico*) di una sequenza di immagini è il campo vettoriale $\overrightarrow{v}(t) = (v_x, v_y) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)\right)$, che definisce la variazione dell'intensità luminosa I della sequenza.

La stima del flusso ottico si basa sull'assunzione secondo cui: *l'intensità luminosa della sequenza è costante nel tempo*, ovvero sulla risoluzione dell'*equazione costante del moto* [1]:

$$\frac{d}{dt}I(P(t),\, t) = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} \times \nabla I + I_t = 0 \tag{9}$$

Anche in questo caso, si tratta di un problema *inverso* e *mal posto*, che può essere risolto minimizzando il funzionale:

$$\begin{aligned} \min_{(v_x,v_y)} \Big\{ \big\|\phi_1\big(\big|\nabla I \times \overrightarrow{v} + I_t\big|\big)\big\| + a_r\big\|\phi_2(\|\nabla v_x\|)\big\| + \\ + a_r\big\|\phi_2\big(\big\|\nabla v_y\big\|\big)\big\| + a_h\big\|c(\nabla I)\overrightarrow{v}\big\| \Big\} \end{aligned} \tag{10}$$

in cui si è aggiunto, come nel caso precedente, un termine di regolarizzazione (*edge-preserving*) che esprime l'ipotesi secondo cui: *per piccoli spostamenti la variazione del flusso ottico deve essere trascurabile nelle zone omogenee e rilevante lungo i contorni*. Infatti, le funzioni introdotte ϕ_1 e ϕ_2 misurano rispettivamente l'equazione costante del moto e i gradienti delle funzioni v_x e v_y che definiscono le componenti del vettore $\overrightarrow{v}$, mentre l'ultimo termine regola la densità del flusso ottico nell'immagine.

Quindi, il problema (10) ammette un'unica soluzione [1], e può essere sostituito con il seguente problema lineare:

$$\min\{a\||\nabla I \times \overrightarrow{v} + I_t|^2 + \psi_1(d)\| + a_r\|d_x|\nabla v_x|^2 + \psi(d_x)\| + + a_r\|d_y|\nabla v_y|^2 + \psi(d_y)\| + a_h\|c(\nabla I)\overrightarrow{v}\|\}. \tag{11}$$

Minimizzando separatamente rispetto ad ognuna delle variabili: d_x, d_y, a, v_x, v_y, le componenti del flusso ottico si ottengono utilizzando lo schema numerico iterativo, di tipo punto fisso (alternato).

$$b_x^{n+1} = \frac{\phi_2'(\|\nabla v_x^n\|)}{2\|\nabla v_x^n\|}, b_y^{n+1} = \frac{\phi_2'(\|\nabla v_y^n\|)}{2\|\nabla v_y^n\|}, a^{n+1} = \frac{\phi_{1,\varepsilon}'(|\overrightarrow{v}^n \times \nabla I + I_t|)}{2|\overrightarrow{v}^n \times \nabla I + I_t|} \tag{12}$$

$$a^h c(\underline{x}) v_x^{n+1} = a^{n+1}(\overrightarrow{v}^n \times \nabla I + I_t)I_x + a^r div\,(b_x^{n+1}\nabla v_x^n) \tag{13}$$

$$a^h c(\underline{x}) v_y^{n+1} = a^{n+1}(\overrightarrow{v}^n \times \nabla I + I_t)I_y + a^r div\,(b_y^{n+1}\nabla v_y^n) \tag{14}$$

La risoluzione numerica dello schema proposto si basa sulle seguenti condizioni inziali: $v_x^0 = 0, v_y^0 = 0$; e sfrutta tecniche *multigrid*, per valutare gli spostamenti macroscopici percebili su larga scala e via via raffinare i risultati, all'aumentare della risoluzione dell'immagine, valutando gli spostamenti microscopici percebili su piccola scala [2].

5. – Conclusioni.

Il sistema di restauro ottenuto costituisce un software automatico suddiviso in tre moduli indipendenti. Precisamente, il primo modulo valuta il flusso ottico per ogni coppia della sequenza e fornisce le premesse ai successivi moduli di individuazione e di rimozione.

I risultati sperimentali ottenuti ne illustrano le prestazioni in termini di accuratezza, efficienza e complessità.

BIBLIOGRAFIA

[1] AUBERT G., KORNPROBST P., *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equation and the Calculus of Variations.* Ed. Springer. Applied Math. Sciences n. 147, 2002.

[2] D'AMORE L., MARCELLINO L., MURL A., *Un software numerico basato sull'approccio in multirisoluzione per la stima del flusso ottico*. ICAR-TR-09-04, 2004.

[3] D'AMORE L., MARCELLINO L., MURLI A., *Un software numererico per il riconoscimento e l'eliminazione dei blotch in sequenze di immagini digitali.* ICAR-TR-04-04, 2004.

Via G. Porzio, 17 - 80010 Quarto (Napoli)
e-mail: livia.marcellino@dma.unina.it
Dottorato in Scienze Computazionali e Informatiche: (sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli «Federico II») - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Luigi M. Ricciardi