Giovanna Guidoboni

Metodi di stabilita lineare e nonlineare con applicazioni alla fluidodinamica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 553–556.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_553_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 553-556

Metodi di stabilità lineare e nonlineare con applicazioni alla fluidodinamica

GIOVANNA GUIDOBONI

I moti laminari (stazionari o periodici) sono moti semplici che possono essere soluzioni delle equazioni della fluidodinamica pur non essendo sempre osservabili sperimentalmente. L'osservabilità di una soluzione è legata alla sua stabilità. Supponiamo che un sistema venga perturbato attorno alla soluzione di moto laminare: la perturbazione può, nel tempo, annullarsi, rimanere limitata o crescere. Solamente nel primo caso il moto laminare è osservabile in pratica. Lo studio della stabilità si propone di analizzare l'evoluzione temporale delle perturbazioni a cui ogni sistema fisico è soggetto per capire quali tra le possibili soluzioni sono realmente osservabili.

I metodi di *stabilità lineare* permettono di considerare solo perturbazioni di ampiezza infinitesima e forniscono delle condizioni sufficienti per la *non-osservabilità*. I metodi di *stabilità nonlineare* ammettono perturbazioni di ampiezza finita e danno condizioni sufficienti per l'*osservabilità*.

In alcuni casi la transizione all'instabilità avviene attraverso un moto periodico e risulta interessante capirne le caratteristiche. Questo è lo scopo dell'analisi della *stabilità debolmente nonlineare*.

Nel seguito sono descritti brevemente i diversi tipi di problemi che ho studiato nella tesi. Data la loro diversa natura, è stato necessario utilizzare tutte e tre le tecniche di analisi di stabilità sopraelencate.

1. – Problema di Marangoni-Bénard nell'approssimazione di Boussinesq con frontiera libera.

Uno strato orizzontale di fluido viscoso è appoggiato su di una superficie rigida mantenuta a temperatura costante T_1. La parte superiore dello strato è in contatto con l'ambiente esterno tramite una superficie libera capillare. La temperatura esterna è $T_0 < T_1$ e si assume che la tensione superficiale del fluido vari linearmente con la temperatura (*effetto Marangoni*).

Essendo $T_1 > T_0$, la densità delle particelle in prossimità della parete rigida è minore delle sovrastanti e quindi esse tenderanno a risalire lasciando il posto alle più pesanti mosse dall'azione della gravità (*effetto Rayleigh*). Per tenere conto di questa varazione della densità con la temperatura, il fluido dovrebbe essere descritto come comprimibile. Per semplificare il problema, è solitamente adottata l'*approssimazione di Boussinesq*: il fluido viene considerato incomprimibile e si assume che la variazione della densità con la temperatura risulti significativa solo nel termine della forza gravitazionale ed inoltre che dipenda linearmente dalla temperatura.

Una semplice soluzione delle equazioni del moto è la quiete: velocità del fluido nulla, superficie piatta e temperatura distribuita linearmente attraverso lo spessore dello strato di fluido. Questo moto però non è sempre osservabile sperimentalmente: quando il gradiente di temperatura $(T_1 - T_0)/d$, dove d è la profondità media dello strato, è sufficientemente elevato, insorgono moti convettivi. Nella tesi ho studiato la stabilità nonlineare della quiete per ottenere condizioni sufficienti di osservabilità.

La maggiore difficoltà è rappresentata dalla superficie libera: la sua posizione al variare del tempo non è nota ma rappresenta una ulteriore incognita del problema, assieme alla distribuzione di velocità e temperatura. Il sistema che ne consegue è di tipo parabolico-iperbolico ed il metodo dell'energia classico non è sufficiente per ottenere un decadimento esponenziale della perturbazione della superficie.

Si è reso quindi necessario utilizzare una generalizzazione del metodo dell'energia, introdotta da Padula e Solonnikov in [5], per poter controllare le perturbazioni dell'altezza dello strato di fluido. In collaborazione con Dr. B.J. Jin (Seoul National University, Korea), ho provato il seguente teorema di stabilità asintotica della quiete [3]:

TEOREMA 1. – *Esistono due costanti positive C^* e $(R^2+M)^*$ tali che se $C \leq C^*$ e $R^2 + M \leq (R^2+M)^*$ allora la quiete risulta esponenzialmente stabile nella classe*

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), p(\boldsymbol{x},t), T(\boldsymbol{x},t), \eta(\Sigma,t) : p \in \text{Ł}^\infty(0,\infty; L^2(\Omega_t)), \\ \boldsymbol{u}, T \in L^2(0,\infty; H^1(\Omega_t)) \cap \text{Ł}^\infty(0,\infty; L^2(\Omega_t)), \\ \eta(\Sigma,t) \in \text{Ł}^\infty(0,\infty; C^2(\overline{\Sigma})), \ \int\limits_{\Sigma} \eta \, dx_* = |\Sigma|, \\ \sup\limits_{\Sigma,t} |\eta - 1| \leq m_1 < 1, \ \sup\limits_{\Sigma,t} \left(|\nabla \eta| + |\nabla^2 \zeta| \right) \leq m_2 \end{array} \right\}. \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{u}$, T, p indicano rispettivamente la velocità, la temperatura e la pressione del fluido ed η l'altezza dello strato. Σ è la cella di periodicità sul piano orizzontale, R è il numero di Rayleigh, M il numero di Marangoni e C è il numero di Galileo. Le condizioni su questi numeri adimensionali dicono che se la tensione superficiale media del fluido è abbastanza elevata e se l'effetto Rayleigh e Marangoni non sono troppo pronunciati, allora la quiete risulta esponenzialmente stabile.

2. – Problema di Bénard per uno strato di fluido comprimibile.

L'approssimazione di Boussinesq utilizzata per studiare il problema di Bénard è adatta solo nel caso di strati sottili di fluido. Se si intende studiare problemi in cui la profondità dello strato non è piccola rispetto alle altre dimensioni del sistema allora si deve utilizzare il modello comprimibile.

I due modelli presentano alcuni comportamenti profondamente diversi. Consideriamo per semplicità uno strato di fluido contenuto tra due piani rigidi di estensione infinita. Nell'approssimazione di Boussinesq è semplice provare che se la temperatura del piano inferiore, T_1, è più bassa di quello superiore, T_0, allora la quiete risulta sempre non-linearmente stabile. Questo fenomeno intuitivamente scontato manca di una dimostrazione rigorosa nel caso in cui si adotti il modello comprimibile.

Nella tesi ho provato che, quando la conduttività termica è trascurabile, la quiete risulta sempre linearmente stabile in due casi: (1) la temperatura del piano superiore è più alta di quella del piano inferiore ($T_1 < T_0$); (2) il gradiente di temperatura $(T_1 - T_0)/d$, dove d è lo spessore dello strato è minore del rapporto g/c_p, dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità e c_p è il calore specifico del fluido a pressione costante. Questo rapporto è noto come *gradiente adiabatico.*

È chiaro che questo è un risultato parziale. L'effetto della dissipazione termica deve essere incluso e ci si aspetta che agisca in favore della stabilità. Ciononostante, questo rappresenta un ulteriore passo nella comprensione della dinamica dei fluidi comprimibili in cui ancora oggi tante domande restano aperte.

3. – Moto di Poiseuille con condizioni al contorno di tipo Robin.

Nel caso di parete fissa e rigida, le condizioni tipo Robin prevedono che la componente normale della velocità, u_n, si annulli sul bordo, e che la componente tangenziale, u_τ, sia proporzionale alla sua derivata normale. In termini adimensionali si ha dunque:

$$u_n = 0 \quad u_\tau - K\boldsymbol{n} \cdot \nabla u_\tau = 0, \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{n}$ indica il versore normale, mentre K è un numero adimensionale noto come numero di Knudsen. Nella dinamica di flussi all'interno di microcanali o per gas rarefatti, K rappresenta il rapporto tra il libero cammino medio delle particelle e il diametro del condotto. Nel caso $K = 0$ si ottengono le condizioni di aderenza classiche, mentre $K > 0$ è una misura dello scivolamento delle particelle alla parete.

Nella tesi mi sono proposta di vedere se ed in che modo la stabiltà del moto di Poiseuille è influenzata dal parametro K, dato che i risultati presenti in letteratura sono contrastanti [2], [1]. Ho considerato un fluido incomprimile e viscoso che si muove tra due piani infiniti sotto l'azione di un gradiente di pressione assegnato, ed ho studiato la stabilità (sia l'analisi lineare che nonlineare) del moto di Poiseuille con le condizioni di tipo (2). Le condizioni di stabilità sono scritte per il numero di Reynolds Re. Il valore critico ottenuto con l'analisi lineare, Re_c^L, è una funzione crescente di K, mentre il valore critico ottenuto con l'analisi nonlineare, Re_c^{NL}, è una funzione decrescente di K. Anche nel caso classico $K = 0$ i valori Re_c^L e Re_c^{NL} sono molto diversi, ma il motivo per cui lo scivolamento alla parete ne aumenti la differenza è un problema aperto.

4. – Analisi debolmente nonlineare per la forma delle onde di Faraday.

Uno strato di fluido è fatto oscillare verticalmente. Se l'ampiezza dell'oscillazione è abbastanza elevata, sulla superficie libera del fluido compaiono delle onde, note come *onde di Faraday*, che possono avere la forma di cerchi, rombi, esagoni, fino alle forme più complesse. La forma delle onde dipende da vari parametri tra cui la frequenza dell'oscillazione, la viscosità del fluido, la profondità dello strato o la presenza di pareti laterali.

La comprensione dei fattori che guidano la selezione del tipo di onda è un problema anche di rilevanza tecnologica. Il fenomeno della formazione delle onde di Faraday infatti viene usato per deporre strati di particelle in forme precise su di un substrato e, a seconda del tipo di onda, si possono creare diversi tipi di films.

Dal punto di vista matematico, il problema è complicato dalla presenza della frontiera libera. Questo è il motivo per cui in letteratura si trovano principalmente modelli semplificati per fluidi poco viscosi. Considerando il moto del fluido potenziale, il problema viene ridotto ad una sola equazione sulla frontiera libera.

Nella realtà i fluidi usati hanno elevata viscosità e quindi si rende necessaria una analisi più completa e l'unico modello presente in letteratura è applicabile solo nel caso in cui la profondità dello strato di fluido si possa considerare infinita.

Nella tesi ho derivato la formulazione corretta per lo studio della stabilità debolmente nonlineare nel caso di uno strato di fluido incomprimibile viscoso di profondità finita, con frontiera libera soggetto ad oscillazione verticale con una o due frequenze caratteristiche. Questa analisi permette di determinare la stabilità relativa di diversi tipi di onde (per esempio lineari, rombiche, esagonali).

BIBLIOGRAFIA

[1] BÜHRING H. e RAUH A. e SPILLE A., *Critical curves of plane Poiseuille flow with slip boundary conditions, Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **3**-2 (2001), 171-173.

[2] CHU W.K., *Stability of incompressible helium II: a two fluid system, J. Phys. Condens. Matter*, **12** (2000), 8065-8069.

[3] GUIDOBONI G. e JIN B.J., *On the Nonlinear Stability of Marangoni-Bénard Problem with Free Surface in the Boussinesq Approximation*, Math. Models & Meth. in Appl. Sci., **15**-1 (2005), 1-22.

[4] GUIDOBONI G. e PADULA M., *On the Bénard Problem, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, **61** (2005), 137-148.

[5] PADULA M. e V.A. SOLONNIKOV, *On Rayleigh-Taylor stability, Ann. Univ. Ferrara*, Sez. VII, XLVI, 2000, 307-336.

Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
e-mail: gio@dm.unife.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Ferrara) - Ciclo XVI
Direttore di Ricerca: Prof.ssa Mariarosaria Padula, Università di Ferrara