# Bollettino Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*



Marianna Fornasiero


## Coomologia di De Rham per Log Schemi


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 537–540.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_537_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 537-540

# Coomologia di De Rham per Log Schemi

MARIANNA FORNASIERO

Data una varietà algebrica $X$ su $\mathbb{C}$, anche singolare, diversi autori in letteratura hanno studiato come costruire una struttura di Hodge mista sui gruppi di coomologia dell'associato spazio analitico $X^{an}$, con coefficienti nel fascio costante $\mathbb{C}$.

I metodi usati sono basati principalmente sull'uso di risoluzioni delle singolarità (Hironaka), sulla costruzione di iper-ricoprimenti propri e sulla teoria della discesa (Deligne, Du Bois, Saint-Donat). Ad esempio, Deligne ha descritto la struttura di Hodge mista di uno schema singolare $X$ usando iper-ricoprimenti lisci $\pi_{.}: X_{.} \longrightarrow X$ di $X$ e la teoria della discesa: ha dimostrato che la struttura di Hodge di $X^{an}$ proviene in un certo senso dalla struttura di Hodge di ciascun termine dell'iper-ricoprimento $X_i^{an}$. Infatti, per ogni $i$, Deligne ha considerato una immersione aperta di $X_i$ dentro uno schema proprio e liscio $\overline{X}_i$ su Spec $\mathbb{C}$, il cui complementare $\overline{X}_i - X_i$ fosse un divisore ad incroci normali $D_i$, ed ha analizzato la filtrazione di Hodge e quella dei pesi sul complesso di De Rham con poli logaritmici $\Omega^{\cdot}_{\overline{X}_i}(\log D_i)$ su ciascun $X_i$. La struttura di Hodge mista sulla coomologia $H^{\cdot}(X^{an}, \mathbb{C})$ è allora collegata alle strutture di Hodge sulle coomologie $H^{\cdot}(X_i^{an}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^{\cdot}(\overline{X}_i, \Omega^{\cdot}_{\overline{X}_i}(\log D_i))$.

Un simile approccio è stato usato da Du Bois, che ha costruito la categoria $\mathrm{C}_{\mathrm{diff}}(X)$, i cui oggetti sono complessi filtrati ed i morfismi sono mappe $\mathcal{O}_X-$lineari compatibili con le filtrazioni. Questa categoria $\mathrm{C}_{\mathrm{diff}}(X)$ si può vedere come una «versione filtrata» della categoria dei complessi con operatori differenziali di ordine $\leq 1$ precedentemente introdotta da Herrera-Liebermann. Lavorando con questa categoria, Du Bois ha dimostrato che una parte della struttura di Hodge mista, data dalla filtrazione di Hodge, di una varietà singolare $X$, si può descrivere usando il complesso $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ in categoria derivata $\mathrm{D}_{\mathrm{diff}}(X)$. Questo complesso è costruito usando iper-ricoprimenti propri e lisci $\pi_{.}: X_{.} \longrightarrow X$ di $X$, prendendo il complesso di De Rham classico $\Omega^{\cdot}_{X_i}$ di ciascun termine $X_i$ e definendo $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ come l'immagine diretta $\mathbb{R}\pi_{.*}\Omega^{\cdot}_{X_{.}}$. La filtrazione su $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ proviene dalla filtrazione di Hodge definita su ciascun complesso $\Omega^{\cdot}_{X_i}$.

Seguendo analoghi metodi di ricerca, Guillen, Puerta, Aznar, Gainza hanno studiato particolari costruzioni di iper-ricoprimenti propri e lisci $X_{.} \longrightarrow X$ di uno schema singolare $X$, detti iper-risoluzioni cubiche, caratterizzati da un vero controllo sulle dimensioni dei termini $X_i$ dell'iper-ricoprimento.

Sulla base dei suddetti risultati, questa tesi trae origine dal tentativo di riuscire a caratterizzare la struttura di Hodge mista in coomologia di una varietà singolare $X$ usando un approccio più diretto, che tenga conto solamente della struttura geometrica intrinseca di $X$, senza il bisogno di introdurre risoluzioni delle singolarità o iper-ricoprimenti.

Un primo passo in questa direzione, ci ha portato a considerare strutture in un certo senso «più ricche», ad esempio schemi aventi particolari tipi di singolarità, come varietà toriche e loro generalizzazioni: embedding toroidali e varietà semi-toroidali. In tale contesto abbiamo diversi risultati dovuti a Ishida, Oda, Kempf, Danilov, Cox.

In particolare, Ishida [2] ha introdotto un complesso, $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X$, la cui coomologia è connessa con i gruppi di coomologia del fascio costante $\mathbb{C}$ sullo spazio analitico singolare $X^{an}$ associato ad $X$. Tale complesso gioca un ruolo importante nella geometria delle varietà semi-toroidali, poiché, in questo caso, esso è strettamente connesso alle singolarità di tipo torico dello schema. Inoltre, uno dei principali risultati dovuti ad Ishida è il fatto che esiste un quasi-isomorfismo tra $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X$ ed il complesso introdotto da Du Bois complex $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$. Perciò è possibile descrivere una parte della struttura di Hodge mista di una varietà semi-torodiale $X$ semplicemente usando la sua intrinseca struttura geometrica torica, senza passare alla costruzione di iper-ricoprimenti.

Un differente approccio al problema, è quello di considerare, anziché le varietà toriche, un altro tipo di schemi algebrici, singolari su Spec $\mathbb{C}$, che sono muniti di una ulteriore utile struttura: gli *schemi logaritmici* o semplicemente *log schemi*. Brevemente, uno schema logaritmico si può vedere come uno schema nel senso classico del termine, munito di una ulteriore struttura che consiste in un fascio di monoidi commutativi $M_X$ sul sito étale (o Zariski) $X_{et}$ (o $X_{Zar}$) di $X$, insieme ad un omomorfismo di monoidi $\alpha: M_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$, soddisfacente certe particolari condizioni. Perciò, la geometria logaritmica può essere pensata come una estensione della teoria classica degli schemi algebrici. Esempi di schemi logaritmici sono varietà lisce $X$ con struttura logaritmica indotta da un divisore ad incroci normali $D$, o varietà toriche $X$, con log struttura indotta dal complementare $D$ del toro. Per tali varietà, il complesso di De Rham logaritmico $\Omega^{\cdot}_X(\log D)$, che risulta essere formato da $\mathcal{O}_X-$moduli localmente liberi, gioca un ruolo centrale nella costruzione della struttura di Hodge mista dei gruppi di coomologia $H^n(X - D, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$.

Gli esempi citati sono solo alcuni semplici casi di strutture logaritmiche: il linguaggio ed il formalismo completo della geometria logaritmica fu introdotto da J. M. Fontaine, L. Illusie, and K. Kato [3], che presentarono una formulazione genrale delle strutture logaritmiche, anche in caratteristica positiva. Successivamente la teoria degli schemi logaritmici fu sviluppata anche da altri, tra cui F. Kato, C. Nakayama [4], L. Illusie, O. Hyodo, A. Ogus.

In questo contesto logaritmico, uno schema singolare $X$ su Spec $\mathbb{C}$, se munito di una particolare log struttura, può essere rivisto come «liscio» in senso logaritmico, cioè log liscio nella categoria più grande degli schemi logaritmici o log schemi. L'aspetto più importante è che per un log schema $X$ è possibile definire un complesso di De Rham con poli logaritmici in un certo senso «formali» che sono determinati dal fascio di monoidi $M_X$ (complesso di De Rham logaritmico $\Omega^{\cdot}_X(\log M_X)$, denotato con $\omega^{\cdot}_X$). Per un log schema $X$ log liscio o, più in generale, idealmente log liscio sullo schema di base, il complesso di De Rham logaritmico è allora formato da $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi, perciò siamo in grado di descrivere tale complesso, anche se non abbiamo informazioni sul complesso di De Rham classico $\Omega^{\cdot}_X$ associato allo schema singolare sottogiacente.

Nella presente tesi abbiamo iniziato quindi a confrontare i due differenti punti di vista: la *geometria torica* da un lato, e la *geometria logaritmica* dall'altro. Un primo approccio all'analisi di questo confronto è dovuto a K. Kato: fissata una struttura logaritmica su uno schema $X$, Kato definisce una singolarità torica in un punto $x$ di $X$ in termini della regolarità logaritmica di $x$. In questo contesto, abbiamo mostrato che embedding toroidali e varietà semi-toroidali possono essere visti come log schemi con log strutture «buone»: cioè possiamo riguardare le varietà semi-toroidali come varietà logaritmiche, con particolari strutture logaritmiche che risultano idealmente log lisce sullo schema di base Spec $\mathbb{C}$. Allora, il complesso introdotto da Ishida $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X$ per una varietà toroidale o semi-toroidale può essere costruito usando la geometria logaritmica. Confrontando tale complesso col complesso $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ definito da Du Bois, uno dei principali risultati di questa tesi è stato quello di dimostrare l'esistenza del seguente triangolo distinto nella categoria derivata di Du Bois,

$$I_M\omega^{\cdot}_X \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_D \longrightarrow .$$

In tale triangolo il complesso $I_M\omega^{\cdot}_X$ calcola la coomologia a supporto compatto dell'aperto $X_{triv}$ dove la log struttura $M$ del log schema log liscio $X$ è banale ($D$ essendo il complementare in $X$ di $X_{triv}$). La costruzione di questo triangolo è dunque utile perché fornisce una descrizione di $H^{\cdot}_c(X^{an}_{triv}, \mathbb{C})$ in termini dell'iper-coomologia del complesso semplice $s[\tilde{\Omega}^{\cdot}_X \longrightarrow \tilde{\Omega}^{\cdot}_D]$.

Nella seconda parte della tesi, all'interno dello studio della coomologia di un log schema, analizziamo invece il legame che sussiste tra la sua coomologia di De Rham logaritmica e la coomologia di un particolare spazio, munito di una topologia trascendente, associato al log schema $X$. A tale riguardo, K. Kato e C. Nakayama [4] hanno introdotto un particolare spazio topologico $X^{an}_{log}$, associato ad un log schema log liscio $X$ ed hanno dimostrato che la coomologia di De Rham algebrica logaritmica di $X$, definita come l'iper-coomologia del complesso di De Rham logaritmico $\omega^{\cdot}_X$, risulta isomorfa alla coomologia del fascio costante $\mathbb{C}$ su $X^{an}_{log}$. Ci siamo proposti quindi di generalizzare tale teorema di confronto al caso di un generico log schema, non necessariamente log liscio su Spec $\mathbb{C}$.

Il primo problema che abbiamo incontrato è stato quello di riuscire a dare una buona definizione di coomologia di De Rham algebrica logaritmica per un log schema non log liscio su $\mathbb{C}$. In geometria classica, ad esempio, per uno schema non singolare $Y$ su $\mathbb{C}$, l'iper-coomologia del complesso di De Rham algebrico, che per definizione è la coomologia di De Rham di $Y$, risulta isomorfa alla coomologia di Betti $H^{\cdot}(Y^{an}, \mathbb{C})$; se invece lo schema $Y$ è singolare, Hartshorne, assumendo che $Y$ si immerga come sottoschema chiuso in uno schema liscio $X$, definisce la coomologia di De Rham algebrica di $Y$ come l'iper-coomologia del complesso $\Omega^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$, che è il completamento del complesso di De Rham $\Omega^{\cdot}_X$ lungo $Y$, e dimostra che tale coomologia è isomorfa alla coomologia di Betti di $Y^{an}$.

Nel contesto della geometria logaritmica, abbiamo quindi considerato un log schema qualunque $Y$ ed abbiamo supposto che esista una immersione chiusa esatta di log schemi $Y \hookrightarrow X$, con $X$ log schema log liscio su $\mathbb{C}$. Allora abbiamo definito la coomologia di De Rham logaritmica di $Y$ su $\mathbb{C}$ come l'iper-coomologia del complesso $\omega^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$, che è il completamento del complesso di De Rham logaritmico $\omega^{\cdot}_X$ lungo $Y$.

Traendo quindi ispirazione dai lavori di L. Illusie, K. Kato e C. Nakayama [4], [1], abbiamo dapprima introdotto un particolare spazio topologico anellato $((X\hat{|}Y)^{log}, \mathcal{O}^{log}_{(X\hat{|}Y)^{an}})$, associato allo spazio analitico formale logaritmico $(X\hat{|}Y)^{an}$ (il cui spazio topologico sottogiacente coincide con $Y^{an}_{log}$). Abbiamo costruito il complesso $\omega^{\cdot,log}_{(X\hat{|}Y)^{an}}$, che risulta essere una sorta di «analogo formale» del complesso $\omega^{\cdot,log}_{X^{an}}$, introdotto da Kato e Nakayama per uno schema log liscio $X$. Successivamente, abbiamo dimostrato una sorta di «versione formale» della mappa Residuo di Poincaré definita da Deligne nella teoria di Hodge II, nel caso particolare di uno schema liscio $X$ su $\mathbb{C}$, munito di una log struttura data da un divisore ad incroci normali $D$, e $Y \hookrightarrow X$ una immersione chiusa di log schemi, con $Y$ munito della log struttura indotta da quella di $X$. Una volta provato che tale Residuo formale è un isomorfismo, l'abbiamo utilizzato per dimostrare il seguente Lemma di Poincaré logaritmico formale: *dato un log schema fine e saturo Y su* $\mathbb{C}$, *la coomologia di Betti logaritmica di Y, definita come la coomologia del fascio costante* $\mathbb{C}$ *sullo spazio topologico* $Y^{an}_{log}$, *è isomorfa all'iper-coomologia del complesso analitico* $\omega^{\cdot,log}_{(X\hat{|}Y)^{an}}$.

Abbiamo quindi provato che il complesso $\omega^{\cdot}_{(X\hat{|}Y)^{an}}$ è quasi-isomorfo ad $\mathbb{R}\tau_*\omega^{\cdot,log}_{(X\hat{|}Y)^{an}} \cong \mathbb{R}\tau_*\mathbb{C}_{Y^{log}}$, dove $\tau\colon Y^{an}_{log} \longrightarrow Y^{an}$ è la mappa canonica di spazi topologici (continua, propria e suriettiva) definita da Kato-Nakayama. Inoltre abbiamo dimostrato che esiste un isomorfismo in coomologia $\mathbb{H}^{\cdot}(Y^{an}, \omega^{\cdot}_{(X\hat{|}Y)^{an}}) \cong \mathbb{H}^{\cdot}(Y, \omega^{\cdot}_{X\hat{|}Y})$ tra la coomologia di De Rham analitica logaritmica e quella algebrica.

Quindi abbiamo concluso con il seguente risultato: *la coomologia di Betti logaritmica di un log schema fine e saturo Y è isomorfa alla coomologia di De Rham logaritmica algebrica di Y*: $H^{\cdot}_{DR,log}(Y/\mathbb{C}) \cong H^{\cdot}(Y^{an}_{log}, \mathbb{C})$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] ILLUSIE L., KATO K., NAKAYAMA C., *Quasi-unipotent logarithmic Riemann-Hilbert correspondences*, preprint (2003).

[2] ISHIDA M. N., *Torus embeddings and dualizing complex*, Tohoku Math. J., **32** (1980), 111-146.

[3] KATO K., *Logarithmic Structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, Johns Hopkins University Press, Baltimore (1989), 191-224.

[4] KATO K., NAKAYAMA C., *Log Betti Cohomology, Log Étale Cohomology, and Log De Rham Cohomology of Log Schemes over* $\mathbb{C}$, Kodai Math. J., **22**, (1999), 161-186.

Dipartimento di Matematica, Università di Padova
e-mail: mfornas@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Padova) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof. Bruno Chiarellotto, Università di Padova