Bollettino
Unione Matematica Italiana
Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesca Faraci

Teoremi di molteplicita e di biforcazione per problemi non lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 529–532.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_529_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 529-532

Teoremi di molteplicità e di biforcazione per problemi non lineari

FRANCESCA FARACI

1. – Introduzione.

La presente tesi di dottorato raccoglie risultati di esistenza e molteplicità per soluzioni di diversi problemi non lineari: in particolare teoremi di molteplicità e di biforcazione in zero sono stati ottenuti per varie classi di equazioni differenziali ed equazioni integrali non lineari.

L'approccio adottato è di tipo variazionale, ovvero le soluzioni sono ottenute come punti critici di un opportuno funzionale associato al problema.

Lo strumento diffusamente impiegato, insieme a risultati classici della teoria dei punti critici come [3], è un recente principio variazionale per la ricerca di minimi locali di funzionali perturbati:

TEOREMA 1. ([4, Teorema 2.5]) – *Siano X uno spazio di Banach reale riflessivo, $\Phi, \Psi : X \to \mathbf{R}$ funzionali debolmente sequenzialmente semicontinui inferiormente, Gâteaux differenziabili. Si assuma inoltre Ψ (fortemente) continuo e coercivo. Per ogni $\rho > \inf_X \Psi$, si ponga*

$$\varphi(\rho) = \inf_{x \in \Psi^{-1}(]-\infty,\rho[)} \frac{\Phi(x) - \inf_{\overline{(\Psi^{-1}(]-\infty,\rho[))}_w} \Phi}{\rho - \Psi(x)},$$

dove $\overline{(\Psi^{-1}(]-\infty,\rho[))}_w$ è la chiusura nella topologia debole. Siano poi

$$\gamma = \liminf_{\rho \to +\infty} \varphi(\rho) \qquad e \qquad \delta = \liminf_{\rho \to (\inf_X \Psi)^+} \varphi(\rho).$$

Allora,

1. *per ogni $\rho > \inf_X \Psi$ e ogni $\mu > \varphi(\rho)$, la restrizione del funzionale $\Phi + \mu\Psi$ a $\Psi^{-1}(]-\infty,\rho[)$ ha un minimo globale;*
2. *se $\gamma < +\infty$, allora, per ogni $\mu > \gamma$, vale la seguente alternativa: o $\Phi + \mu\Psi$ ha un minimo globale, oppure esiste una successione $\{x_n\}$ di punti critici di $\Phi + \mu\Psi$ tali che $\lim_{n \to +\infty} \Psi(x_n) = +\infty$;*
3. *se $\delta < +\infty$, allora, per ogni $\mu > \delta$, vale la seguente alternativa: o esiste un minimo globale di Ψ che è un minimo locale di $\Phi + \mu\Psi$, oppure esiste una successione $\{x_n\}$ di punti critici a due a due distinti di $\Phi + \mu\Psi$, con $\lim_{n \to +\infty} \Psi(x_n) = \inf_X \Psi$, che converge debolmente a un minimo globale di Ψ.*

2. – Problemi studiati.

Il principio variazionale di Ricceri costituisce il filo conduttore del presente lavoro di tesi. Tale studio si articola in due filoni.
Il primo riguarda il problema di provare l'esistenza di più soluzioni per vari problemi non lineari.

In tale contesto si inquadra lo studio di un problema di Neumann in cui compare il p-Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta_p(u) + \lambda(x)|u|^{p-2}u = a(x)f(u) & \text{in } \Omega \\ \partial u/\partial \upsilon = 0 & \text{su } \partial\,\Omega \end{cases}$$

dove $\Delta_p(u) = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e υ è la normale unitaria esterna a $\partial\Omega$, $\lambda > 0$ e $a \geq 0$. Si assume l'esistenza di un opportuno punto di massimo locale, non assoluto per la non linearità F, dove $F(u) = \int_0^u f(t)dt$. Il nostro risultato, che dimostra l'esistenza di tre soluzioni è interessante per la novità delle ipotesi introdotte.

La medesima tecnica è stata utilizzata in un contesto differente che è quello dei sistemi Hamiltoniani. La nozione di sistema Hamiltoniano ha un ruolo fondamentale in fisica matematica. Basti ricordare le applicazioni alla meccanica classica, alla teoria dei campi (equazioni delle onde lineari e non, le equazioni di Maxwell), alla meccanica dei quanti, all'idrodinamica dei fluidi perfetti, alla teoria della relatività generale.

Ci siamo qui occupati di un sistema autonomo del secondo ordine del tipo

$$\begin{cases} \ddot{u} = A(t)u + b(t)\nabla G(u) & \text{in } [0,T\,] \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0 \end{cases}$$

dove $A(t)$ è una matrice $N \times N$ definita positiva, $b \geq 0$ è una funzione sommabile, G una funzione di classe $C^1(\boldsymbol{R}^N)$. Un risultato centrale nel panorama della letteratura esistente è un celebre lavoro di Brezis e Nirenberg [2] dove tra le altre ipotesi si assume un'opportuna condizione di periodicità sulla nonlinearità. Tale condizione, mantenuta in molti lavori successivi sull'argomento, si rivela inessenziale nella nostra trattazione.

Ben più variegato è il panorama della letteratura nel caso in cui si voglia indagare sull'esistenza di infinite soluzioni per il nostro sistema. Esistono molti lavori sul problema in cui si richiede che la nonlinearità sia sufficientemente regolare e che soddisfi ipotesi di simmetria. Se il potenziale è pari, allora la teoria di Ljusternik-Schnirelmann assicura l'esistenza di infinite soluzioni. Tale ipotesi viene attenuata in lavori più recenti in cui viene sostituita dalla più debole condizione che la nonlinearità sia una perturbazione di un funzionale pari.

Le ipotesi di simmetria restano comunque fortemente presenti quando si affronta il problema delle infinite soluzioni. Anche in questo campo i risultati che presentiamo sono del tutto originali: l'ipotesi di simmetria è assolutamente irrilevante. Ci limiteremo a supporre che la nonlinearità abbia un opportuno andamento oscillatorio.

Il secondo filone di ricerca a cui ci siamo dedicati è rappresentato da risultati di biforcazione per vari problemi nonlineari.

La teoria della biforcazione è una branca molto vasta dell'analisi matematica, che trova applicazioni a disparati campi della scienza come la teoria dell'elasticità, fluido dinamica, geofisica, astrofisica, meteorologia, chimica.

Ricordiamo che se X è uno spazio di Banach, $F : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ e $u = 0$ soluzione dell'equazione $F(\lambda, u) = 0$, $\lambda_0 \in \boldsymbol{R}$ si dice *punto di biforcazione* per l'equazione $F(\lambda, u) = 0$ se ogni intorno di $(\lambda_0, 0)$ in $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{X}$ contiene soluzioni non nulle dell' equazione $F = 0$.

Ci siamo diffusamente interessati a equazioni integrali di Hammerstein

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

dove k è una funzione simmetrica alla quale si dà il nome di nucleo e f è una funzione di Carathéodory. Le equazioni di Hammerstein fecero la loro comparsa agli inizi degli anni '30 come modello per lo studio di problemi semilineari con condizioni al contorno. In particolare il nucleo k fa le veci della funzione di Green di un operatore differenziale. Se il nucleo k è positivo, allora tale equazione si può studiare con i classici metodi degli operatori positivi. Il vantaggio di tali metodi consiste nel fatto che in molti casi essi forniscono informazioni non solo sull'esistenza delle soluzioni ma anche sulla locazione delle soluzioni, per esempio esplicitamente costruite tra sotto e sopra soluzioni dell'equazione. Un altro valido metodo nello studio delle equazioni di Hammerstein è variazionale: se il nucleo k è simmetrico è possibile associare all'equazione un funzionale i cui punti critici sono esattamente le soluzioni della stessa. Qui si assume che il nucleo sia simmetrico e inizialmente positivo. Per tali equazioni si è provato un risultato di biforcazione in zero risolvendo, nello spazio delle funzioni di potenza p-sommabile, per qualche $p > 2$, un'equazione equivalente alla data.

L'ipotesi di segno sul nucleo è stata successivamente rimossa. Le equazioni di Hammerstein sono state studiate in nuovo contesto che è quello dello spazio dell'energia, che si rivela l'ambiente più naturale dove collocare lo studio di tali equazioni.

Il principio variazionale si rivela strumento prezioso perchè assieme all'esistenza della soluzione fornisce informazioni sulla locazione della stessa. In qualche modo l'applicazione dello stesso compensa l'arbitrarietà di segno del nucleo. Originali applicazioni sono state presentate nel contesto degli operatori ellittici di ordine superiore al secondo.

Il principio variazionale trova ancora applicazioni a problemi nonlineari di altra natura. Abbiamo provato risultati di biforcazione in zero per due problemi di Dirichlet diversi nella forma, ma accomunati dalla presenza di termini «non compatti». Ciò vuol dire che lo spazio delle soluzioni è continuamente, ma non compattamente immerso nello spazio delle funzioni sommabili con opportuno esponente di sommabilità. La presenza di un peso in un caso, di un esponente critico nell'altro, impedisce così di provare la debole semicontinuità del funzionale dell'energia con risultati classici. I problemi studiati si presentano nella forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\mu}{|x|^p}|u|^{p-2}u + \lambda f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}-1} |u|^{p^*-2}u + \lambda f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Teoremi di biforcazione in zero sono stati ottenuti anche per un funzionale semicontinuo inferiormente, ma non coercivo. Tale studio è stato motivato dalla lettura di un recente lavoro di Arcoya, Boccardo e Orsina ([1]). Ci siamo posti il problema di studiare l'esistenza e la regolarità di punti di minimo locale per il funzionale

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x,v)|\nabla v|^2 - \lambda \int\limits_{\Omega} F(x,v)$$

dove il peso a è soggetto ad opportune condizioni. Tale funzionale, semicontinuo inferiormente non è coercivo, ed è differenziabile in un sottospazio proprio dello spazio in cui si lavora. Si dimostra l'esistenza di punti di minimo che appartengono alla spazio voluto, che sono punti critici del funzionale in esame.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARCOYA D., BOCCARDO L. e ORSINA L., *Existence of critical points for some noncoercive functionals*, Ann. I. H. Poincaré, **4** (2001) 437-457.

[2] BREZIS H. e NIRENBERG L., *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math., **44** (1991) 939-963.

[3] PUCCI P. e SERRIN J., *A mountain pass theorem*, J. Differential Equations, **60** (1985) 142-149.

[4] RICCERI B., *A general variational principle and some of its applications*, J. Comput. Appl. Math., **113** (2000) 401-410.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
e-mail: ffaraci@dmi.unict.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Catania) - Ciclo XV
Direttore della ricerca: Prof. B. Ricceri, Università di Catania