Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Roberta Di Gennaro

Famiglie di rette dello spazio proiettivo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 525–528.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_525_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 525-528

Famiglie di rette dello spazio proiettivo

ROBERTA DI GENNARO

Le rette di uno spazio proiettivo $\boldsymbol{P}_{n,K}$ (costruito su un corpo K) giocano, tra i sottospazi dello spazio $\boldsymbol{P}_{n,K}$, un ruolo cruciale. Le considerazioni che seguono cercano di dare corpo a tale affermazione.

Sia $\mathcal{L}$ la famiglia delle rette di $\boldsymbol{P}_{n,K}$, essa gode delle due seguenti rilevanti proprietà.

I Per due punti passa una sola retta.

II Due trasversali a due rette incidenti sono tra loro incidenti.

La proprietà I ha ispirato la nozione di **Spazio Lineare** ed attorno a tale concetto si è sviluppata una vera e propria teoria.

La proprietà II, nota come **assioma di Veblen e Young**, caratterizza $\boldsymbol{P}_{n,K}$ tra gli spazi lineari.

Numerosi sono i lavori in cui si studiano famiglie di rette di uno spazio proiettivo $\boldsymbol{P}_{n,K}$ e ciò ha varie motivazioni.

Una delle motivazioni è che spesso tali rette sono le rette di una varietà algebrica notevole $\mathcal{V}$, e quindi una loro caratterizzazione finisce con l'essere una caratterizzazione per $\mathcal{V}$.

Attorno a questa linea di pensiero si è sviluppata una vasta letteratura e numerose sono al riguardo le caratterizzazioni di varietà notevoli, quali per esempio la varietà di Grassmann e quella di C. Segre, ottenute attraverso l'uso delle proprietà delle rette che le ricoprono.

Ricordiamo che una *varietà algebrica* di $\boldsymbol{P}_{n,K}$ è il luogo dei punti che verificano un sistema di equazioni algebriche omogenee non identiche.

Un *ovoide* di $\boldsymbol{P}_{3,q}$ è una calotta con q^2+1 punti.

Uno *spazio lineare* è una coppia $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ con $\mathcal{S}$ insieme non vuoto i cui elementi si diranno *punti* e $\mathcal{L}$ un insieme non vuoto di suoi sottoinsiemi propri chiamati *rette* tali che:

(l_1) Per due punti passa una sola retta;
(l_2) Ogni retta ha almeno due punti;

Dati due spazi lineari $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ e $(\mathcal{S}_1,\mathcal{L}_1)$ un *isomorfismo* tra essi è una biezione di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}_1$ che mandi rette in rette con la sua inversa. In tal caso $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ e $(\mathcal{S}_1,\mathcal{L}_1)$ si dicono *isomorfi*.

Uno spazio lineare $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ si dice invece *immerso* in un altro spazio lineare $(\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1)$ se esiste una applicazione iniettiva di $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ in $(\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1)$, che manda rette di $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ in parti di rette di $(\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1)$.

Uno spazio lineare si dirà *finito* se $\mathcal{S}$, e quindi $\mathcal{L}$, hanno un numero finito di elementi. Gli spazi lineari considerati nella tesi sono tutti finiti.

Dato uno spazio lineare $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$, per ogni punto P di $\mathcal{S}$, il *grado* di P è il numero $[P]$ di rette per P; per ogni retta l, la *lunghezza* di l è la sua cardinalità.

L'intero n definito da $n + 1 = \max\{[P] : P \in \mathcal{S}\}$ è l'*ordine* dello spazio lineare.

Uno spazio lineare si dice *irriducibile* se ogni sua retta ha almeno tre punti, *riducibile* altrimenti.

Un sottoinsieme X di $\mathcal{S}$ si dirà di *classe* $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ rispetto alle rette se ogni retta dello spazio lineare $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ lo interseca in $a_1, a_2, \dots, a_n$ punti. Un sottoinsieme X sarà invece di *tipo* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ rispetto alle rette, se è di classe $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esiste una retta di $\mathcal{L}$ che interseca X in a_i punti.

1. – Alcune caratterizzazioni di famiglie di rette di uno spazio proiettivo.

Nella tesi si presentano alcuni risultati riguardanti caratterizzazioni di famiglie di rette di uno spazio proiettivo ed in particolare si dà la dimostrazione di un teorema di recente pubblicazione di cui sono Coautore dove si caratterizza la famiglia delle rette esterne ad una quadrica iperbolica di $\boldsymbol{P}_{3,q}$.

In un lavoro del 2002 N. Durante e D. Olanda unificando e migliorando due lavori di G. Tallini e della M. J. de Resmini ottennero un risultato di caratterizzazione della famiglia di rette secanti un ovoide di $\boldsymbol{P}_{3,q}$ e da questo per dualità il seguente risultato di caratterizzazione della famiglia di rette esterne un ovoide di $\boldsymbol{P}_{3,q}$.

TEOREMA – *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di rette di $\boldsymbol{P}_{3,q}$ $(q > 2)$ soddisfacente le seguenti proprietà:*

I *In ogni piano di $\boldsymbol{P}_{3,q}$ ci sono $\frac{q^2-q}{2}$ o q^2 rette di $\mathcal{F}$;*

II *Per ogni punto di $\boldsymbol{P}_{3,q}$ passano $\frac{q^2+q}{2}$ rette di $\mathcal{F}$ o nessuna;*

Allora $\mathcal{F}$ é la famiglia delle rette esterne ad un ovoide di $\boldsymbol{P}_{3,q}$.

A partire da questo teorema si è cercato un risultato analogo che caratterizzasse la famiglia delle rette esterne a una quadrica iperbolica di $\boldsymbol{P}_{3,q}$. Per far ciò però si è dovuto dividere il caso pari da quello dispari e si è giunti ai seguenti risultati.

TEOREMA – *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di rette di $\boldsymbol{P}_{3,q}$, q dispari, che gode delle proprietà:*

I *In ogni piano di $\boldsymbol{P}_{3,q}$ ci sono $\frac{q^2-q}{2}$ rette di $\mathcal{F}$ o nessuna.*

II *Per ogni punto di $\boldsymbol{P}_{3,q}$ ci sono $\frac{q^2-q}{2}$ rette di $\mathcal{F}$ o nessuna.*

III *In ogni fascio piano di rette ci sono o $\frac{q-1}{2}$ o $\frac{q+1}{2}$ rette di $\mathcal{F}$ o nessuna.*

Allora $\mathcal{F}$ è o la famiglia delle rette esterne ad una quadrica iperbolica di $\boldsymbol{P}_{3,\boldsymbol{q}}$ o una ipotetica sottofamiglia della famiglia delle rette esterne a una fissata retta o a due rette sghembe fissate.

TEOREMA – *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di rette di $\boldsymbol{P}_{3,\boldsymbol{q}}$, q pari, soddisfacente la seguente proprietà.*

I *In ogni fascio di rette ci sono $\frac{q}{2}$ rette di $\mathcal{F}$ o nessuna.*

Allora $\mathcal{F}$ è o la famiglia delle rette esterne ad una quadrica iperbolica di $\boldsymbol{P}_{3,\boldsymbol{q}}$ o una ipotetica sottofamiglia della famiglia delle rette sghembe con una retta fissata o con due rette fisse sghembe tra loro.

2. – Spazi planari:immergibilità e insiemi quadratici.

Quando nello spazio proiettivo $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{K}}$ si considera oltre alla famiglia delle sue rette $\mathcal{L}$ anche quella dei suoi piani $\mathcal{P}$ si puó osservare che per la terna $(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{K}}, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ valgono le seguenti due proprietà:

I Due punti distinti appartengono ad una sola retta.

II Tre punti non allineati appartengono ad un unico piano.

Queste due proprietà sono la base per la nozione di spazio planare. Tale nozione interpreta in astratto la struttura geometrica che si ottiene quando si priva uno spazio proiettivo di un suo sottoinsieme (eventualmente vuoto).

Uno spazio planare finito $(\mathcal{S}, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ è detto *regolare* rispetto alle rette se tutte le sue rette hanno la stessa cardinalità $k + 1$.

Fissato un punto P di $(\mathcal{S}, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ si chiama *quoziente* in P dello spazio planare lo spazio lineare $(\mathcal{L}_P, \mathcal{P}_P)$ i cui punti sono tutte le rette per P e le cui rette sono i fasci di rette con centro in P.

Uno spazio planare *localmente proiettivo tridimensionale* è uno spazio planare $(\mathcal{S}, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ tale per ogni sua coppia di piani distinti essi si incontrano in una retta oppure non hanno punti in comune.

Ricordiamo che per ogni sottoinsieme $\boldsymbol{H}$ di uno spazio planare localmente proiettivo tridimensionale $\mathcal{S}$ e per ogni suo punto P indicheremo con $\boldsymbol{H}_P$ l'unione di tutte le rette contenute in $\boldsymbol{H}$ o tangenti in P ad $\boldsymbol{H}$.

Un *insieme quadratico* di uno spazio planare $(\mathcal{S}, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ localmente proiettivo tridimensionale è un sottoinsieme $\boldsymbol{H}$ di $\mathcal{S}$ incontrato da tutte le rette non contenute in esso in 0, 1 o 2 punti e tale che per ogni $P \in H$ l'insieme $\boldsymbol{H}_P$ è un piano o tutto $\mathcal{S}$.

Alcuni tra i teoremi che danno una risposta a questo problema utilizzano come condizione di immergibilità la circostanza che nello spazio planare ci sia qualche sottoinsieme che goda di particolari proprietà. Un problema molto studiato è stato quello di determinare condizioni sufficienti a garantire che uno spazio planare $(\mathcal{S},\mathcal{L},\mathcal{P})$ sia immergibile in uno spazio proiettivo $\boldsymbol{P_{n,K}}$, cioè sia isomorfo allo spazio planare che si ottiene privando $\boldsymbol{P_{n,K}}$ di un suo sottoinsieme.

Punto di partenza per la nostra ricerca è stato un teorema di immergibilità dovuto a G. Tallini che utilizza come condizione di immergibilità la circostanza che nello spazio planare ci sia qualche sottoinsieme che goda di particolari proprietà. Riportiamo qui di seguito tale risultato.

TEOREMA – *Sia $(\mathcal{S},\mathcal{L},\mathcal{P})$ uno spazio planare finito non-degenere con le rette tutte della stessa cardinalità $n+1$ e tale che ogni piano abbia k punti, e sia Ω una calotta di $(\mathcal{S},\mathcal{L},\mathcal{P})$ con la proprietà che per ogni punto P di Ω, l'unione delle rette tangenti in P è un sottospazio τ_P che incontra ogni piano per P e non contenuto in τ_P in una retta. Allora $(\mathcal{S},\mathcal{L},\mathcal{P})$ è lo spazio proiettivo $\boldsymbol{P_{3,n}}$ e Ω uno suo ovoide.*

Tale risultato ha ispirato un teorema di cui sono Coautore riportato di seguito.

TEOREMA – *Sia $(\mathcal{S},\mathcal{L},\mathcal{P})$ uno spazio planare localmente proiettivo tridimensionale regolare di ordine n e sia $\mathbf{H}$ un insieme quadratico non degenere di $\mathcal{S}$. Allora i seguenti casi sono possibili:*

(a) *$(\mathcal{S},\mathcal{L},\mathcal{P})$ è $\boldsymbol{P_{3,q}}$ e $\boldsymbol{H}$ un suo ovoide o una sua quadrica iperbolica.*

(b) *$(\mathcal{S},\mathcal{L},\mathcal{P})$ è $\boldsymbol{A_{3,q}}$ e $\boldsymbol{H}$ l'unione di due suoi piani disgiunti oppure un cilindro di base un ovale.*

BIBLIOGRAFIA

[1] DI GENNARO R., *Durante N., Quadratic sets of a 3-dimensional locally projective regular planar space*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **10** (2003), 1-8.

[2] DI GENNARO R., DURANTE N., OLANDA D., *A characterization of the family of lines external to a hyperbolic quadric of $P_{3,q}$*, Journal of Geometry, **80** (2004), 65-74.

[3] DURANTE N., OLANDA D., *A characterization of the family of secant or lines to an ovoid of $P_{3,q}$*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin (2003),

[4] TALLINI G., *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. e Appl, **16** (1957), 328-351.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»,
Università degli Studi di Napoli «Federico II»
e-mail: rdigenna@unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II») - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Domenico Olanda, Università degli Studi di Napoli «Federico II»