Salvatore Cuomo

Un software numerico basato su un metodo di collocazione per l'inversione della Trasformata di Laplace nel caso reale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 513–516.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_513_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 513-516

Un software numerico basato su un metodo di collocazione per l'inversione della Trasformata di Laplace nel caso reale

SALVATORE CUOMO

1. – Introduzione.

La presente nota riassume il lavoro di tesi di dottorato di ricerca in Matematica Applicata e Informatica rivolto allo studio, all'analisi e alla progettazione di un software per l'inversione numerica della Trasformata di Laplace nel caso reale. Il problema di inversione reale si può così formulare:

assegnata l'equazione integrale:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad Re(s) > \sigma_0 \tag{1}$$

si vuole determinare la funzione incognita $f(t)$ del problema (1) *essendo nota solo sull'asse reale la trasformata di Laplace $F(s)$, di ascissa di convergenza σ_0*

Esistono circa 1500 lavori pubblicati dal 1795 al 2004 nei quali è possibile distinguere più di 100 metodi numerici diversi [4]. Da una ricerca condotta sulle pricipali fonti di distribuzione del software matematico (Netlib, American Transaction on Mathematical Software, Nag, Mathematica, etc.) si scopre che, per tutti gli elementi di software individuati, il dato del problema, la Trasformata di Laplace, è una funzione nota su tutto il piano complesso, ovvero essi risolvono quello che in letteratura è noto come *problema di inversione complessa*. Per il problema di inversione reale si osserva:

- la presenza di metodi numerici ricavati come caso particolare degli schemi numerici per il problema complesso;
- la costruzione di metodi numerici «ad hoc» per risolvere problemi derivanti da specifiche applicazioni.

La motivazione di ciò discende dal fatto che il problema di inversione nel caso reale e' un problema *inverso mal posto* nel senso di Hadamard. Il problema discreto associato è fortemente *mal-condizionato* e quindi dal punto di vista numerico computazionale è necessario affrontare il controllo dell'amplificazione dell'errore sulla soluzione calcolata, dovendo tenere presente che una seppur piccola perturbazione nei dati può produrre risultati non significativi.

Il lavoro di tesi è dunque rivolto all'individuazione delle principali fonti di errore nel processo di risoluzione computazionale del problema di inversione reale ed allo sviluppo di stime calcolabili alla base di un criterio di arresto accurato, robusto ed efficiente.

2. – Il Metodo Numerico.

Il metodo numerico proposto [2], indicato con C-Metodo, su cui si basa il software sviluppato calcola una approssimazione $f_N(t)$ della funzione inversa di Laplace $f(t)$ secondo i passi seguenti:

passo 1: *fissati i numeri $\sigma > \sigma_0$ e $b > 0$ si valuta negli zeri del polinomio di Chebyschev T_N di prima specie di grado N:*

$$w_k = cos\left(\frac{2k+1}{N}\frac{\pi}{2}\right), \quad k = 0, \ldots, N-1$$

la funzione $\Phi(w) = \frac{2b}{1-w} F\left(\frac{2b}{1-w}\sigma - b\right)$;

passo 2: *si calcolano i coefficienti del polinomio $l_{N-1} \in \Pi_N$ interpolante le coppie $(w_k, \Phi(w_k))$:*

$$l_{N-1}(w) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w^k.$$

passo 3: *si calcola una approssimazione $f_N(t)$:*

$$f_N(t) = e^{\sigma t} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-bt} L_k(2bt) \qquad (1_b)$$

della funzione inversa di Laplace $f(t)$.

Algoritmo 1: C-metodo

Il metodo numerico viene analizzato in termini di condizionamento, stabilità ed efficienza al fine di individuare e stimare gli errori di **troncamento**, di **discretizzazione** e quelli di **round-off** presenti sulla soluzione calcolata.

Da una prima analisi si osserva che il fattore $e^{\sigma t}$ in (1_b) determina una amplificazione dell'errore sulla soluzione calcolata dal C-metodo, per cui nella stima dell'errore viene introdotta una misura indipendente da tale fattore [1]. In particolare, indicati con $\tilde{c}_k$ i coefficienti c_k ottenuti risolvendo il passo 2 del C-Metodo in un sistema aritmetico a precisione finita e posto:

$$\tilde{f}_N(t) = e^{\sigma t} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k e^{-bt} L_k(2bt)$$

si definiscono la **pseudo accuratezza** relativa all'errore di troncamento-discretizzazione ed all'errore di condizionamento rispettivamente:

$$\varepsilon_{td} = \frac{f(t) - f_N(t)}{e^{\sigma t}}, \qquad \varepsilon_{cond} = \frac{f(t) - \tilde{f}_N(t)}{e^{\sigma t}}$$

Viene dimostrato il seguente risultato.

TEOREMA 1. – *Assegnati t, σ, e b, per la pseudo accuratezza relativa all'errore di troncamento-discretizzazione vale:*

$$|\varepsilon_{td}(t, \sigma, b, N)| \leq \left(K^* \frac{1}{R^N} \right) \tag{2}$$

dove $K^* = |\Phi(0)|$ *ed* $R = R(\sigma, b)$ *è una costante che dipende dai parametri del C-Metodo.*

Per quanto concerne ε_{cond} è necessario stimare l'errore sui coefficienti $\tilde{c_k}$ componente per componente. L'idea utilizzata è quella di dedurre delle **stime computazionali** [3], ovvero trovare delle relazioni che consentano di stimare l'accumulo dell'errore nell'algortimo per la risoluzione numerica del passo 2 del C-Metodo. A tale fine si dimostra:

TEOREMA 2. – *Sia* $\Im$ *un sistema aritmetico a precisione finita di massima accuratezza u. Siano fissati σ, t e b allora:*

$$|\varepsilon_{cond}(t, \sigma, b, N)| \leq N \ u \ |\Phi(0)| \max_{k=0,\ldots N-1} |M_k| \tag{3}$$

essendo $|M_k|$ *ottenuti da stime computazionali.*

A partire da questa analisi è possibile dedurre *stime calcolabili* dell'errore alla base del criterio di arresto dell'elemento di software.

3. – Le stime calcolabili.

I risultati descritti mostrano che la pseudo accuratezza relativa all'errore di troncamento-discretizzazione decresce al crescere del numero N di termini della serie mentre quella relativa all' errore di condizionamento cresce con N. Questo significa che l'accuratezza sulla soluzione calcolata dipende da un opportuno bilanciamento tra gli errori di troncamento-discretizzazione e quello di condizionamento. Al fine di calcolare un valore ottimale di N si introduce la **stima calcolabile** dell'errore di troncamento-discretizzazione e dell'errore di condizionamento attraverso le funzioni:

$$E_{td}(\sigma, b, N) := K^* \frac{1}{R^N}, \quad E_{cond}(\sigma, b, N) := N \ u \ |\Psi(0)| \max_{k=0,\ldots N-1} |M_k|$$

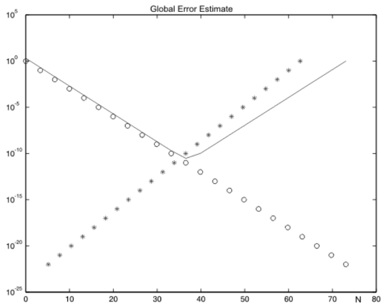

Fig. 1. – Andamento della funzione GEE(N), per la Trasformata di Laplace $F_1(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$, $K = 1$, $R = 1.72$.

ed infine la **stima globale dell'errore**:

$$GEE(\sigma, b, N) := K^* \frac{1}{R^N} + N\ u\ |\Psi(0)| \max_{k=0,\dots N-1} |M_k| = \qquad (4)$$
$$= E_{td}(\sigma, b, N) + E_{cond}(\sigma, b, N).$$

La figura (1) mostra l'andamento della funzione GEE, per ogni fissato N. Si dimostra che la funzione $GEE(N)$ è convessa e che esiste un valore ottimale, N^*, in corrispondenza del quale si ottiene la massima accuratezza possibile sulla soluzione calcolata dal C-metodo. Dall'analisi dell'errore si ricava, infine, che:

$$\frac{|f(t) - \tilde{f}_N(t)|}{e^{\sigma t}} \leq GEE(N) \qquad (5)$$

ovvero è possibile controllare l'errore nel processo di risoluzione mediante la funzione $GEE(N)$, come mostrato da numerosi esperimenti numerici.

BIBLIOGRAFIA

[1] CUOMO S., D'AMORE L. e MURLI A., *A Computational Algorithm of the Rjabov's Method for Real Inversion of a Laplace Transform*, Enumath Proceedings Springer-Verlag, **1** (2003).

[2] GIUNTA G., MURI A. e SMITH G., *Error Analysis of Rjabov Algorithm for Inverting a Laplace Transform*, Ricerche di Matematica, 4 (1995), 207-219.

[3] HIGHAM N., *Error analysis of the Björk-Pereira algorthms for solving Vandemonde systems*, Numerische Mathematick, **50** (1987), 613-632.

[4] VALKO P. e ABATE J., *Numerical Laplace inversion in rheological characterization*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., **116** (2004), 395-406.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni«R. Caccioppoli»,
Università degli
Studi di Napoli«Federico II»
e-mail: salvatore.cuomo@dma.unina.it
Dottorato in Matematica Applicata e Informatica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XIV