Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesca Crispo

Sulle equazioni di Navier-Stokes: stabilità puntuale nello spazio e nel tempo inR^n e nel semispazio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 501–503.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_501_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 501-503

Sulle equazioni di Navier-Stokes: stabilità puntuale nello spazio e nel tempo in $\Re^n$ e nel semispazio

FRANCESCA CRISPO

Nella tesi si considerano alcune questioni analitiche relative alla teoria della stabilità (stabilità puntuale) di un fluido viscoso incomprimibile e omogeneo la cui regione di moto Ω è $\Re^n$ o il semispazio $\Re^n_+$, $n \geq 3$, e il cui moto è retto dalle equazioni di Navier-Stokes.

Nella seconda metà del secolo scorso alcuni autori hanno dato contributi alla teoria della stabilità delle soluzioni del sistema di Navier-Stokes. Tale studio concerne prevalentemente la stabilità delle soluzioni rispetto alla metrica indotta dalla norma di $L^2(\Omega)$, la cosiddetta *stabilità in energia*. Questo tipo di stabilità, partendo da una perturbazione al moto avente *energia* finita, misura la sua evoluzione rispetto al tempo, ma non fornisce alcuna informazione relativa alla *diffusione spaziale* della perturbazione stessa, informazione che assume un particolare significato per la geometria non limitata della regione di moto. Anche se si rinunciasse all'analisi globale rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$ e si esaminasse l'andamento asintotico della perturbazione rispetto alla metrica indotta dalla norma di $L^\infty(\Omega)$, si otterrebbe ancora uno studio che misura l'evoluzione della perturbazione rispetto alla sola variabile temporale.

Nella tesi si segue un approccio differente: si studia l'andamento della perturbazione rispetto alle variabili (x, t) (spazio e tempo), considerando perturbazioni non necessariamente a energia finita.

Come primo passo nello studio della stabilità, consideriamo il problema della stabilità della quiete, una cui perturbazione è retta dal seguente sistema di Navier-Stokes:

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla \pi, \quad \nabla \cdot u = 0, \text{ in } \Re^n_+ \times (0, T), \\
&u(x', t) = 0, \text{ in } \Re^{n-1} \times (0, T), \quad \lim_{|x| \to \infty} u(x, t) = 0, \\
&u(x, 0) = u_\circ(x), \text{ in } \Re^n_+,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dove $u \cdot \nabla u_i = u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, $i = 1, \ldots, n$, per ogni $t > 0$ $u(x', t)$ è la traccia di $u(x, t)$ su $\Re^{n-1}$, $u_\circ(x)$ è il dato iniziale.

Per $\mu > 0$, sia

$$
\mathcal{M}^\mu_{|x|}(\Omega) = \left\{ h(x) \in C(\overline{\Omega}), h(x) = 0 \text{ su } \partial\Omega, \nabla \cdot h(x) = 0, \text{con } |h(x)| \leq \frac{H_0}{(1 + |x|)^\mu}, \forall x \in \Omega \right\}.
$$

Il risultato principale è il seguente teorema contenuto in [1].

TEOREMA 1. – *Per ogni* $u_\circ(x) \in \mathcal{M}^{\mu}_{|x|}(\Re^n_+)$, $\mu \in (\frac{1}{2}, n)$, *esiste un'unica soluzione* (u, π) *del sistema* (1) *tale che, per qualche* $T > 0$, *per ogni* $\eta \in (0, T)$ *e* $\beta \in (0, 1)$,

$$u \in C(0, T; C(\overline{\Re^n_+})), \quad D^2u, u_t, \nabla\pi \in C^{0,\beta}(\eta, T; C^{0,\beta}(\overline{\Re^n_+}));$$

$\forall x_\circ \in \Re^n_+, \ \lim\limits_{(x,t)\to(x_\circ,0)} u(x,t) = u_\circ(x_\circ)$. *Inoltre, esistono due costanti* b *e* B, *independenti da* $u_\circ$, *tali che:*

per $T^{\frac{1}{2}} < (4bBU_0)^{-1}$,

$$|u(x,t)| \le \frac{1-3bt^{\frac{1}{2}}BU_0}{1-4bt^{\frac{1}{2}}BU_0}\frac{BU_0}{(1+|x|)^{\mu}}, \quad \forall (x,t) \in \Re^n_+ \times [0,T),$$

$$t^{\frac{1}{2}}|\nabla u(x,t)| \le \frac{1-3bt^{\frac{1}{2}}BU_0}{1-4bt^{\frac{1}{2}}BU_0}\frac{BU_0}{(1+|x|)^{\mu}}, \quad \forall (x,t) \in \Re^n_+ \times [0,T);$$

per $a \in (0, 1)$,

$$|u(\overline{x},\overline{t}) - u(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{t}})| \le \frac{1-3bt_1^{\frac{1}{2}}BU_0}{1-4bt_1^{\frac{1}{2}}BU_0}BU_0 t_0^{-\frac{a}{2}}[|\overline{x}-\overline{\overline{x}}|^2 + |\overline{t}-\overline{\overline{t}}|]^{\frac{a}{2}},$$

$$t_0^{\frac{1}{2}}|\nabla u(\overline{x},\overline{t}) - \nabla u(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{t}})| \le \frac{1-3bt_1^{\frac{1}{2}}BU_0}{1-4bt_1^{\frac{1}{2}}BU_0}BU_0 t_0^{-\frac{a}{2}}[|\overline{x}-\overline{\overline{x}}|^2 + |\overline{t}-\overline{\overline{t}}|]^{\frac{a}{2}},$$

per ogni $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in \Re^n_+$, *per ogni* $\overline{t}, \overline{\overline{t}} \in (\eta, T)$, *con* $t_0 = \min\{\overline{t}, \overline{\overline{t}}\}$ *e* $t_1 = \max\{\overline{t}, \overline{\overline{t}}\}$;
se $\mu \in [1, n)$ e $U_0 < (4bB)^{-1}$, *allora* $T = \infty$ *e, per ogni* $\upsilon \in [0, \mu]$,

$$|u(x,t)| \le \frac{1-3bBU_0}{1-4bBU_0}\frac{BU_0}{(1+|x|)^{\mu-\upsilon}}\frac{1}{(1+t)^{\frac{\upsilon}{2}}}, \forall (x,t) \in \Re^n_+ \times [0,\infty),$$

$$t^{\frac{1}{2}}|\nabla u(x,t)| \le \frac{1-3bBU_0}{1-4bBU_0}\frac{BU_0}{(1+|x|)^{\mu-\upsilon}}\frac{1}{(1+t)^{\frac{\upsilon}{2}}}, \forall (x,t) \in \Re^n_+ \times [0,\infty);$$

per $a \in (0, 1)$,

$$|u(\overline{x},\overline{t}) - u(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{t}})| \le \frac{1-3bBU_0}{1-4bBU_0}BU_0 t_0^{-\frac{a}{2}}[|\overline{x}-\overline{\overline{x}}|^2 + |\overline{t}-\overline{\overline{t}}|]^{\frac{a}{2}},$$

$$t_0^{\frac{1}{2}}|\nabla u(\overline{x},\overline{t}) - \nabla u(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{t}})| \le \frac{1-3bBU_0}{1-4bBU_0}BU_0 t_0^{-\frac{a}{2}}[|\overline{x}-\overline{\overline{x}}|^2 + |\overline{t}-\overline{\overline{t}}|]^{\frac{a}{2}},$$

per ogni $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in \Re^n_+$, *per ogni* $\overline{t}, \overline{\overline{t}} \in (\eta, T)$, *con* $t_0 = \min\{\overline{t}, \overline{\overline{t}}\}$ *e* $t_1 = \max\{\overline{t}, \overline{\overline{t}}\}$;

$$|u(\overline{x},t) - u(\overline{\overline{x}},t)| \le \frac{1-3bBU_0}{1-4bBU_0}BU_0 t^{-\frac{a}{2}}\frac{|\overline{x}-\overline{\overline{x}}|^a}{R(|\overline{x}|,|\overline{\overline{x}}|)^{\mu-\upsilon}}\frac{1}{(1+t)^{\frac{\upsilon}{2}}},$$

$$t^{\frac{1}{2}}|\nabla u(\overline{x},t) - \nabla u(\overline{\overline{x}},t)| \le \frac{1-3bBU_0}{1-4bBU_0}BU_0 t^{-\frac{a}{2}}\frac{|\overline{x}-\overline{\overline{x}}|^a}{R(|\overline{x}|,|\overline{\overline{x}}|)^{\mu-\upsilon}}\frac{1}{(1+t)^{\frac{\upsilon}{2}}},$$

per ogni $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in \Re^n_+$, *per ogni* $t > 0$, *con* $R(|\overline{x}|, |\overline{\overline{x}}|) = \min\{(1+|\overline{x}|), (1+|\overline{\overline{x}}|)\}$.

Risultati concernenti l'andamento asintotico nello spazio-tempo, del tipo di quelli indicati nel teorema per il campo cinetico $u(x,t)$, si ottengono anche per il relativo campo di pressione $\pi(x,t)$. Per brevità omettiamo il risultato e rimandiamo al terzo capitolo della tesi o al lavoro [1].

Un primo contributo alla stabilità puntuale, nel senso del precedente teorema, è dovuto a Knightly per il problema di Cauchy delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes, relativamente alla perturbazione alla quiete (cf. [2, 3]); a quest'analisi è dedicato il secondo capitolo della tesi.

La stabilità nel senso del teorema 1 per il problema ai valori iniziali e al contorno è stata, invece, a lungo una questione aperta, già nel caso del sistema lineare. I risultati del teorema 1, relativi al problema ai valori iniziali e al contorno per il sistema di Navier-Stokes nel semispazio, sono pertanto nuovi; essi costituiscono il terzo capitolo della tesi.

I risultati sono ottenuti utilizzando il tensore di Green per il sistema di Stokes nel semispazio, tensore costruito da Solonnikov in [4, 5]. In [4, 5] sono anche dedotte alcune proprietà puntuali del tensore. Nella tesi tali proprietà sono riprese e, con l'aggiunta di alcune altre, conducono alla costruzione di una soluzione con il metodo delle approssimazioni successive. Il lavoro consiste nel dedurre, per gli elementi della successione, stime uniformi che, per il carattere nonlineare del sistema, non sono del tutto immediate.

BIBLIOGRAFIA

[1] CRISPO F. e MAREMONTI P., *On the (x,t) asymptotic properties of solutions of the Navier-Stokes equations in the half-space*, Zapiski Nauchnyh Seminar POMI, **318**, (2004), 147-202.

[2] KNIGHTLY G.H., *On a class of global solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **21**, (1966), 211-245.

[3] KNIGHTLY G.H., *A Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in $\Re^n$*, SIAM J. Math. Anal., **3**, (1972), 506-511.

[4] SOLONNIKOV V.A., *Estimates for solutions of the nonstationary Stokes problem in anisotropic Sobolev spaces and estimates for the resolvent of the Stokes operator*, Uspekhi Mat. Nauk, **58**, (2003), 123-156.

[5] SOLONNIKOV V.A., *On nonstationary Stokes problem and Navier-Stokes problem in half-space with initial data nondecreasing at infinity*, J. Math. Sciences, **114**, (2003), 1726-1740.

Dipartimento di Matematica, Seconda Università degli Studi di Napoli
e-mail: francesca.crispo@unina2.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli «Federico II») - Ciclo XVI
Direttore di ricerca: Prof. Paolo Maremonti, Seconda Università degli Studi di Napoli