Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elena Cordero

Analisi tempo-frequenza per operatori di localizzazione e rappresentazioni con ondine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.3-1, p. 493–496.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_493_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Dicembre 2005/1, 493-496

Analisi tempo-frequenza per operatori di localizzazione e rappresentazioni con ondine

ELENA CORDERO

La ricerca oggetto di questa tesi riguarda essenzialmente due temi: da una parte si studiano gli operatori di localizzazione tramite tecniche tipiche dell'analisi tempo-frequenza, dall'altra si caratterizzano, tramite basi di ondine, spazi di Sobolev anisotropi di funzioni definite sull'ipercubo $(0,1)^d$.

I due argomenti precedentemente introdotti hanno una radice comune: il bisogno di descrivere le caratteristiche di una certa funzione, ovvero il *segnale*, secondo la terminologia della matematica applicata. Nello studio di un segnale, analisi tempo-frequenza e mediante ondine possono considerarsi due risposte ad esigenze diverse. Nel primo caso, si vuole mettere in luce l'evoluzione nel tempo delle frequenze di un segnale; nel secondo, invece, le sue diverse risoluzioni. L'essenza dell'analisi tempo-frequenza è costituita da *onde* (seni e coseni), moltiplicate per un'opportuna funzione *finestra*, che viene fatta scorrere lungo l'asse temporale oggetto di studio. Nel caso delle ondine, invece, la funzione finestra stessa, ovvero l'*ondina*, è per sua natura oscillante. Non viene quindi più moltiplicata per seni e coseni, ma traslata e dilatata, generando altre ondine che sono alla base della suddetta analisi.

1. – Operatori di Localizzazione.

Gli operatori di localizzazione hanno un notevole interesse in diversi ambienti di ricerca, tra cui la meccanica quantistica, l'analisi del segnale, la risoluzione di equazioni alle derivate parziali mediante operatori pseudodifferenziali. Essi sono anche noti in letteratura come operatori anti-Wick (o, semplicemente, Wick), di Toeplitz o moltiplicatori di Gabor.

In questa tesi si è affrontato lo studio delle proprietà di limitatezza e regolarità dei suddetti operatori. Le tecniche utilizzate derivano sia dall'approccio classico (operatori anti-Wick), sia dall'analisi tempo-frequenza. Tuttavia, i risultati conseguiti mostrano che è proprio quest'ultimo approccio a rivelarsi il più appropriato. Le condizioni sufficienti ottenute costituiscono un miglioramento dei risultati noti in letteratura, mentre le condizioni necessarie sono il frutto di idee originali, ottenute grazie all'analisi tempo-frequenza.

La rappresentazione tempo-frequenza che svolge il duplice ruolo di elemento costituente di tali operatori e di strumento per conseguire i risultati oggetto di studio, è la Short Time Fourier Transform. Più precisamente, siano f una funzione sommabile su $\mathbb{R}^d$ (il segnale) e g una funzione finestra sommabile su $\mathbb{R}^d$ e non identicamente nulla; la *Short Time Fourier Transform* del segnale f rispetto alla finestra g, è la funzione sommabile su $\mathbb{R}^{2d}$ definita da:

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\,\overline{g(t-x)}\,e^{-2\pi i\omega t}\,dt = \langle f, M_\omega T_x g\rangle, \quad \in \mathbb{R}^{2d},$$

dove $T_x f(t) = f(t-x)$ e $M_\omega f(t) = e^{2\pi i\omega t} f(t)$, e l'ultima uguaglianza esprime il prodotto scalare in L^2 del segnale f e degli *stati coerenti* di g; tuttavia, le parentesi, presenti nell'ultima uguaglianza, possono anche interpretarsi come una dualità, che estende il prodotto in L^2.

Sia ora a un'opportuna funzione su $\mathbb{R}^{2d}$ (il simbolo dell'operatore), φ_1 e φ_2 due finestre non nulle su $\mathbb{R}^d$. Un *operatore di localizzazione* $A_a^{\varphi_1,\varphi_2}$ è definito come

$$A_a^{\varphi_1,\varphi_2} f(t) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x,\omega) V_{\varphi_1} f(x,\omega) M_\omega T_x \varphi_2(t)\,dx d\omega,$$

dove il significato dell'integrale precedente dipende dagli spazi di appartenenza del simbolo a, delle finestre φ_1, φ_2, e del segnale f.

Gli operatori di localizzazione si inseriscono nel contesto della teoria degli operatori pseudodifferenziali. In particolare, una tecnica per provare alcuni dei risultati ottenuti è costituita dalla loro relazione con gli operatori di Weyl. Infatti, è proprio sfruttando tale legame che si sono ottenute le condizioni sufficienti per la limitatezza e l'appartenenza alle classi di Schatten von-Neumann S_p degli operatori $A_a^{\varphi_1,\varphi_2}$, in dipendenza dalle proprietà del simbolo a e delle finestre φ_1 e φ_2. Si considerano simboli e finestre appartenenti a diversi spazi di funzioni o di distribuzioni temperate, quali gli spazi L^p, gli spazi di Sobolev W^p_{-s}, $s > 0$, le distribuzioni temperate a supporto compatto $\mathcal{E}'$, gli spazi di modulazione $M^{p,q}_m$, dove m è una funzione peso opportuna e $1 \le p, q \le \infty$. Gli spazi di modulazione, introdotti da Feichtinger negli anni '80, risultano essere l'ambiente ottimale per risolvere tale problema, come si deduce dalle condizioni necessarie espresse nel seguito. Le condizioni sufficienti di regolarità possono essere riassunte nella tabella seguente:

Risultati	**Simbolo a**	**Finestre** φ_1	φ_1	**Operatore** $\mathbf{A}_\mathbf{a}^{\varphi_1,\varphi_2}$
(i)	$L^p(\mathbb{R}^{2d})$	$L^2(\mathbb{R}^d)$	$L^2(\mathbb{R}^d)$	S_p
(ii)	$W^p_{-s}(\mathbb{R}^{2d}), s>0$	$M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	$M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	S_p
(iii)	$M^\infty_{1/\tau_s}(\mathbb{R}^{2d})$	$M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	$M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	$B(M^{p,q}(\mathbb{R}^d))$
(iv)	$H^{-s}(\mathbb{R}^{2d})$	$M^2_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	$M^2_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	S_2
(v)	$M^{p,\infty}_{1/\tau_s}(\mathbb{R}^{2d})$	$M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	$M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d)$	S_p
(vi)	$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2d})$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	S_1

Il risultato *(i)* è noto in bibliografia, tuttavia viene ridimostrato in questo lavoro con tecniche diverse da quelle note, sia mediante analisi tempo frequenza, sia nel contesto classico degli operatori anti-Wick; i risultati *(ii)-(vi)* sono parte della tesi (Capitolo 2).

Per quanto riguarda le condizioni necessarie di limitatezza, mentre sembra impossibile trovare una caratterizzazione per la continuità di , se φ_1, φ_2 sono finestre fissate, tuttavia la condizione $a \in M^\infty$ è ottimale nel senso del risultato seguente.

Se $A_a^{\varphi_1,\varphi_2}$ è limitato su $L^2(\mathbb{R}^d)$, uniformemente rispetto a tutte le finestre $\varphi_1, \varphi_2 \in M^1$, cioé, se esiste una costante $C > 0$, dipendente solo dal simbolo a, tale che, per tutte le $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, sia verificata

$$\|A_a^{\varphi_1,\varphi_2}\|_{L^2 \to L^2} \leq C\|\varphi_1\|_{M^1}\,\|\varphi_2\|_{M^1}\,,$$

allora $a \in M^\infty$. (Una versione più generale, con spazi di modulazione pesati, è contenuta nel Capitolo 2.) Similmente, si è ottenuta una *condizione necessaria per gli operatori di Hilbert-Schmidt: se vale*

$$\|A_a^{\varphi_1,\varphi_2}\|_{S_2} \leq C\|\varphi_1\|_{M^1}\,\|\varphi_2\|_{M^1}\,, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S},$$

allora $a \in M^{2,\infty}$.

Un altro tema (affrontato nel Capitolo 4) riguarda la composizione di due operatori di localizzazione. Il risultato derivante dal prodotto di due operatori di localizzazione $A_a^{\varphi_1,\varphi_2}$ e $A_b^{\varphi_3,\varphi_4}$, è stato espresso mediante la seguente formula asintotica:

$$A_a^{\varphi_1,\varphi_2} A_b^{\varphi_3,\varphi_4} = \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} A_{a\partial^\alpha b}^{\Phi_\alpha,\varphi_2} + L_r;$$

ovvero, la composizione $A_a^{\varphi_1,\varphi_2} A_b^{\varphi_3,\varphi_4}$ si esprime come una somma di operatori di localizzazione con simboli e finestre opportuni, modulo un resto esprimibile come un operatore di Weyl L_r. In seguito, si sono studiate le proprietà di regolarità dei suddetti operatori rispetto agli spazi di appartenenza dei simboli e delle finestre.

Per maggiori dettagli e riferimenti bibliografici si rimanda ai lavori [1, 2, 4, 5].

2. – Rappresentazioni con Ondine.

Il secondo argomento di questa ricerca riguarda l'uso di basi di ondine per rappresentare funzioni appartenenti a spazi funzionali anisotropi.

Per raggiungere tale scopo, si è dapprima proceduto alla costruzione di basi di ondine biortogonali per l'intervallo unitario, considerando come fattore di dilatazione un intero $M \geq 2$. Successivamente, mediante prodotti tensoriali di basi di ondine sull'intervallo, ottenute con fattori di dilatazione differenti a seconda della direzione considerata, si sono costruite basi d-dimensionali. Tali basi costituiscono una decomposizione multilivello per $L^2((0,1)^d)$ e permettono la caratterizzazione di spazi di Sobolev anisotropi. In dettagio, si inizia tale studio con la costruzione di un'analisi multirisolutiva (AMR) per l'intervallo unitario, a partire da basi di ondine biortogonali sulla retta reale, con fattore di dilatazione rappresentato da un intero $M \geq 2$. In particolare, utilizzando basi di funzioni splines sulla retta reale, si costruisce esplicitamente una tale AMR generata da basi biortogonali a supporto compatto (ondine M-splines).

Un'applicazione del suddetto risultato è la caratterizzazione di spazi anisotropi. Infatti, mediante l'uso di prodotti tensoriali, si ottiene un'AMR per l'ipercubo $(0,1)^d$. Successivamente, si dimostrano disuguaglianze anisotrope tipo Jackson e Bernstein che permettono, con una tecnica ormai consolidata, di ottenere la caratterizzazione di spazi di Sobolev anisotropi. In dettaglio, il risultato principale può essere formulato, in dimensione $d = 2$, nel modo seguente.

Sia $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ un'opportuna anisotropia fissata e sia $M = diag\,(m_1, m_2)$ una matrice di dilatazione compatibile con $\boldsymbol{a}$. Siano $\{\varphi_\gamma, \psi_{\ell;j,\gamma}\}_{\ell,j,\gamma}$, $\{\tilde{\varphi}_\gamma, \tilde{\psi}_{\ell;j,\gamma}\}_{\ell,j,\gamma}$ una coppia di M-basi di ondine biortogonali ammissibili (ottenute mediante prodotti tensoriali di ondine uni-dimensionali). Fissato $a_0 > 0$, sia $l := \max\{a_0a_1, a_0a_2\}$; se si suppone $\varphi, \in H^l((0,1)^2)$ (lo spazio di Sobolev isotropo), allora, per ogni indice $0 < a < a_0$, una funzione $f \in L^2((0,1)^2)$ appartiene a $H^{a\boldsymbol{a}}((0,1)^2))$ (lo spazio di Sobolev anisotropo) se e solo se

$$\left(\sum_{\gamma\in\breve{\mathcal{K}}_0} |\langle f, \varphi_\gamma\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=0}^{\infty}\left[|\det M|^{\frac{aj}{2}}\left(\sum_{\ell=1}^{m_1m_2-1}\sum_{\gamma\in\hat{\mathcal{K}}_{jl}} |\langle f, \psi_{\ell;j,\gamma}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty;$$

la norma $\|f\|_{H^{a\boldsymbol{a}}((0,1)^2)}$ è equivalente all'espressione precedente. In questo caso, si ha

$$f = \sum_{\gamma\in\breve{\mathcal{K}}_0} \langle f, \varphi_\gamma\rangle\ \tilde{\varphi}_\gamma\ + \sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{\ell=1}^{m_1m_2-1}\sum_{\gamma\in\hat{\mathcal{K}}_{jl}} \langle f, \psi_{\ell;j,\gamma}\rangle \tilde{\psi}_{\ell;j,\gamma}\right].$$

Per maggiori dettagli, si rimanda al Capitolo 6 della tesi ed al lavoro [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] BOGGIATTO P. e CORDERO E., *Anti-Wick quantization with symbols in L^p spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (9) (2002), 2679-2685.

[2] BOGGIATTO P., CORDERO E. e GRÖCHENIG K., *Generalized Anti-Wick operators with symbols in distributional Sobolev spaces*, Integral Equations and Operator Theory., **48** (4) (2004), 427-442.

[3] CORDERO E., *M-channel MRA and application to anisotropic Sobolev spaces*, to appear in The International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing.

[4] CORDERO E. e GRÖCHENIG K., *Time-frequency analysis of Localization operators*, J. Funct. Anal., **205** (1) (2003), 107-131.

[5] CORDERO E. e RODINO L., *Wick calculus: a time-frequency approach*, to appear in Osaka Journal of Mathematics.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: cordero@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo XV
Direttore di ricerca: Prof.ssa Anita Tabacco, Politecnico di Torino