
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ALESSANDRO CONFLITTI

Enumerazione in sistemi di Coxeter tramite riflessioni associate

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 489–491.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_489_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_489_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Enumerazione in sistemi di Coxeter tramite riflessioni associate

ALESSANDRO CONFLITTI

Dato un generico sistema di Coxeter finito (W, S) , uno dei più celebri ed importanti problemi enumerativi e combinatorici è studiare il suo *polinomio di Poincaré* $W(X)$, ed il suo *polinomio Euleriano* $A(X)$, prestando particolare cura ed attenzione al caso $W = S_n$, il gruppo simmetrico delle permutazioni di n oggetti.

Nel primo capitolo della Tesi viene data una trattazione completa ed esauriente della teoria generale dei sistemi di Coxeter, includendo le dimostrazioni di tutti i risultati utilizzati, e nei successivi vengono esposti i risultati originali della ricerca.

Nel secondo capitolo viene generalizzato il concetto di polinomio Euleriano $A_n(X)$ per il gruppo simmetrico S_n , per ogni $n \geq 2$. Osservando che $A_n(X)$ è strettamente associato all'insieme generatore di S_n , come gruppo, che è un sottoinsieme molto speciale dell'insieme delle trasposizioni $T_n = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ di S_n , si considera ogni generico sottoinsieme $\mathcal{T}$ di T_n , e per ognuno viene definito un polinomio $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$, che è un analogo di $A_n(X)$, nel seguente modo:

$$\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X) = \sum_{\sigma \in S_n} X^{l_{\mathcal{T}}(\sigma)} = \sum_{j=0}^{\#\mathcal{T}} \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{(n)}(j) X^j,$$

dove $l_{\mathcal{T}}(\sigma) = \#\{\tau \in \mathcal{T} : \text{inv}(\sigma\tau) < \text{inv}(\sigma)\}$ è il numero di *inversioni* di σ contenuto in $\mathcal{T}$ e $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{(n)}(j) = \#\{\sigma \in S_n : l_{\mathcal{T}}(\sigma) = j\}$.

Ad esempio, con queste notazioni il polinomio di MacMahon (i.e. il polinomio di Poincaré di S_n) diviene $\Phi_{T_n}^{(n)}(X)$, pertanto viene ottenuta una costruzione unificata per le funzioni generatrici di molte nuove statistiche sul gruppo simmetrico S_n .

Dati $n \geq 2$ e $\mathcal{T} \subset T_n$, è possibile associare un ordine parziale $\preceq_{\mathcal{T}}$ (i.e. indicizzato dal sottoinsieme $\mathcal{T}$) sull'insieme $[n] = \{t \in \mathbb{N} : 1 \leq t \leq n\} = \{1, \dots, n\}$, cosicché il termine noto del polinomio corrispondente $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$ enumera le estensioni lineari parziali dell'insieme parzialmente ordinato $([n], \preceq_{\mathcal{T}})$. Più generalmente, se σ è una permutazione tale che $l_{\mathcal{T}}(\sigma) = j$, cioè σ è contata dal j -esimo coefficiente di $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$, allora j è una misura di «quanto lontana» è σ dall'essere un'estensione lineare di $([n], \preceq_{\mathcal{T}})$. Inoltre ogni relazione d'ordine parziale $\preceq$ su $[n]$ può essere ottenuta come $\preceq_{\mathcal{T}}$ per qualche $\mathcal{T} \subset T_n$.

Viene mostrato che per ogni $n \geq 2$ ed ogni $\mathcal{T} \subset T_n$, $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$ è sempre simmetrico, i.e. $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X) = X^{\#\mathcal{T}} \Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(\frac{1}{X})$, e con coefficienti non nulli $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{(n)}(j)$ per ogni $j = 0, \dots, \#\mathcal{T}$. Si definisce $\mathcal{T}_M = \{(n+1-j, n+1-i) : (i, j) \in \mathcal{T}\}$, l'insieme *speculare* di $\mathcal{T}$, e si dimostra che $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X) = \Phi_{\mathcal{T}_M}^{(n)}(X)$; si definiscono l'ordine $\text{ord}(\mathcal{T})$ e la forma normale $\mathcal{T}_N$ di $\mathcal{T}$, che non dipendono necessariamente da n ma solo dalla struttura intrinseca

di $\mathcal{T}$, e si dimostra che la conoscenza di $\Phi_{\mathcal{T}_N}^{(\text{ord}(\mathcal{T}))}(X)$ conduce direttamente alla conoscenza di $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$.

I risultati principali di questa parte sono risultati di equidistribuzione, ovvero si investigano condizioni per le quali sottoinsiemi distinti $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ hanno lo stesso polinomio associato $\Phi_{\mathcal{T}_1}^{(n)}(X) = \Phi_{\mathcal{T}_2}^{(n)}(X)$. Ad esempio, un paio di risultati ausiliari che possono essere enunciati facilmente sono i seguenti: per ogni $n \geq 2$ ed ogni $\mathcal{T} \subset T_n$,

$$\Phi_{\mathcal{T}_+}^{(n+1)}(X) = \Phi_{\mathcal{T}_-}^{(n+1)}(X) = \Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X) \cdot \sum_{j=0}^n X^j,$$

dove $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \uplus \{(j, n+1) : 1 \leq j \leq n\} \subset T_{n+1}$ e $\mathcal{T}_- = \{(i+1, j+1) : (i, j) \in \mathcal{T}\} \uplus \{(1, j) : j \in [2, n+1]\} \subset T_{n+1}$, che implica immediatamente la ben nota formula per il polinomio di MacMahon; e per ogni $1 \leq r < n$ ed ogni $1 \leq a \leq n-r$

$$\Phi_{T_n \setminus \{(a, a+r)\}}^{(n)}(X) = \Phi_{T_{r+1} \setminus \{(1, r+1)\}}^{(r+1)}(X) \cdot \prod_{k=r+1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k X^j \right).$$

In particolare, la parte più tecnica e complicata di questa sezione si concentra nello studiare sotto quali condizioni su $\mathcal{T} \subset T_n$ e $(a, b), (a', b') \in \mathcal{T}$ si ha $\Phi_{\mathcal{T} \setminus \{(a, b)\}}^{(n)}(X) = \Phi_{\mathcal{T} \setminus \{(a', b')\}}^{(n)}(X)$.

Inoltre vengono definite alcune interessanti classi di sottoinsiemi $\mathcal{T} \subset T_n$ per le quali i polinomi $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$ vengono calcolati esplicitamente, si studiano problemi riguardanti l'unimodalità e la log-concavità di $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$, ed infine viene sviluppato un programma per computer che prende come dati iniziali n e $\mathcal{T} \subset T_n$ e calcola $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$.

Successivamente, nel terzo capitolo si studia lo stesso problema per ogni sistema di Coxeter finito (W, S) : infatti si può definire un analogo del polinomio $\Phi_{\mathcal{T}}^{(n)}(X)$ sostituendo la funzione inv con la funzione lunghezza , e l'insieme T_n con l'insieme delle riflessioni $T = \{usu^{-1} : s \in S, u \in W\}$ di W , cioè considerare ogni generico sottoinsieme $\mathcal{T}$ di T e per ognuno definire un polinomio

$$\Phi_{\mathcal{T}}^W(X) = \sum_{u \in W} X^{l_{\mathcal{T}}(u)} = \sum_{j=0}^{\#\mathcal{T}} \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^W(j) X^j,$$

dove $I_{\mathcal{T}}(u) = \{z \in \mathcal{T} : l(uz) < l(u)\} = \mathcal{T} \cap I(u)$ e $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^W(j) = \#\{u \in W : l_{\mathcal{T}}(u) = j\}$.

Va osservato che la condizione di finitezza su W è indispensabile, perché, per esempio, nel caso di un sistema di Coxeter infinito (W, S) con rango finito, la distribuzione Euleriana $\Phi_S^W(X) = \sum_{u \in W} X^{\text{des}(u)}$ non ha alcun senso nemmeno come serie formale di potenze in X , in quanto esiste solo un insieme finito $\{0, \dots\}$ di valori di $\text{des}(u)$ e quindi infiniti elementi u di W hanno lo stesso valore $\text{des}(u)$.

Come per il caso $W = S_n$, si dimostra che per ogni (W, S) finito e per ogni $\mathcal{T} \subset T$, $\Phi_{\mathcal{T}}^W(X)$ è simmetrico, i.e. $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^W(j) = \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^W(\#\mathcal{T} - j)$ per tutti gli $j = 0, \dots, \#\mathcal{T}$, e con coefficienti strettamente positivi $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^W(j)$ per tutti gli $j = 0, \dots, \#\mathcal{T}$; si definisce l'insieme *speculare* di $\mathcal{T}$ come $\mathcal{T}_M = \{w_0 z w_0 : z \in \mathcal{T}\}$, dove w_0 è il massimo elemento per l'ordine di Bruhat di (W, S) , e si dimostra che $\Phi_{\mathcal{T}}^W(X) = \Phi_{\mathcal{T}_M}^W(X)$. Viene definito il

sistema di spezzamento di $\mathcal{T}$ che non dipende necessariamente dall'intero sistema di Coxeter (W, S) , e si dimostra che questo conduce ad una fattorizzazione di $\Phi_{\mathcal{T}}^W(X)$. Inoltre si ottiene una semplice regola ricorsiva per calcolare $\Phi_{\mathcal{T}}^W(X)$ per tutti i sistemi di Coxeter finiti (W, S) ed ogni $\mathcal{T} \subset T$, e si dimostra che $\Phi_{\mathcal{T}}^W(X)$ si spezza nei fattori corrispondenti alle componenti irriducibili di (W, S) .

Nella sezione principale, studiando successioni di specifici sottografi di Bruhat e sottografi di Coxeter-Dynkin collegati da isomorfismi aventi particolari proprietà, si investigano problemi di equidistribuzione; in particolare si studiano alcune generali condizioni algebriche su $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ per garantire

$$(1) \quad \begin{cases} \Phi_{\mathcal{T}_1}^W(X) = \Phi_{\mathcal{T}_2}^W(X), \\ \Phi_{\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1}^W(X) = \Phi_{\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_2}^W(X). \end{cases}$$

Inoltre si congettura che queste condizioni algebriche caratterizzano in realtà gli insiemi $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subset T$ per i quali vale la condizione enumerativa (1).

Infine si mostra che alcuni risultati dimostrati nella prima parte per S_n possono essere facilmente estesi e generalizzati ad ogni gruppo di Weyl classico, e si sviluppa un programma per computer per calcolare $\Phi_{\mathcal{T}}^W(X)$ quando W è B_n o D_n .

Si osserva inoltre che una versione meno elaborata e sofisticata di questo approccio combinatorico si è rivelata molto efficiente per studiare molti argomenti algebrici e combinatorici riguardanti un generico sistema di Coxeter finito, come certe sue rappresentazioni, cfr. [1, 2], relazioni d'ordine, cfr. [3, 4, 5], classi di discesa, sottogruppi parabolici e quozienti generalizzati, cfr. [6, 7].

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. ADIN, F. BRENTI e Y. ROICHMAN, *A Unified Construction of Coxeter Group Representations (I)*, preprint (2003) 1-50.
- [2] R. ADIN, F. BRENTI e Y. ROICHMAN, *A Unified Construction of Coxeter Group Representations (II)*, preprint (2004) 1-27.
- [3] C. D. BENNETT e R. J. BLOK, *Partial orders generalizing the weak order on Coxeter groups*, J. Combin Theory Ser. A, **102** (2003) 331-346.
- [4] C. D. BENNETT, L. EVANI e D. GRABINER, *A Simple Definitions for the Universal Grassmannian Order*, J. Combin Theory Ser. A, **102** (2003) 347-366.
- [5] A. BJÖRNER, *Orderings of Coxeter Groups*, Contemp. Math., **34** (1984) 175-195.
- [6] A. BJÖRNER e M. L. WACHS, *Generalized Quotients in Coxeter Groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988) 1-37.
- [7] A. BJÖRNER e M. L. WACHS, *Permutation Statistics and Linear Extensions of Posets*, J. Combin. Theory Ser. A, **58** (1991) 85-114.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»,
e-mail: conflitt@mat.uniroma2.it

Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università degli Studi di Roma
«Tor Vergata») - Ciclo XVI

Direttore di ricerca: Prof. Francesco Brenti, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»

