
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

VIVINA L. BARUTELLO

Alcuni aspetti del problema degli n -corpi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 449–452.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_449_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Alcuni aspetti del problema degli n -corpi

VIVINA L. BARUTELLO

Nel corso del dottorato di ricerca ho studiato alcuni aspetti del problema degli n -corpi e ho sviluppato delle tecniche che hanno portato risultati originali in questo settore. Il problema classico degli n -corpi consiste nello studio del moto di n punti materiali di masse positive nello spazio euclideo d -dimensionale, interagenti a due a due con una forza attrattiva di intensità inversamente proporzionale alla loro distanza. Fissato un periodo positivo T , cerchiamo nuove soluzioni T -periodiche a questo problema utilizzando un approccio variazionale, che consiste nel ricercare soluzioni del problema classico come punti critici senza collisioni di un opportuno *funzionale d'azione lagrangiana*, \mathcal{A} . Infatti, l'esistenza di un insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{nd}$ di punti singolari per la parte potenziale, U , della lagrangiana, tale che $U \in C^1(\mathbb{R}^{nd} \setminus \mathcal{A})$ e $\lim U(x) = +\infty$ se $x \rightarrow \mathcal{A}$, composto da tutte le possibili configurazioni di collisione, implica che il funzionale d'azione sia di classe C^1 su $\mathbb{R}^{nd} \setminus \mathcal{A}$ e che i punti critici senza collisioni di \mathcal{A} siano soluzioni C^2 e T -periodiche per il problema classico. Da queste considerazioni preliminari, possiamo facilmente dedurre che l'approccio variazionale implica la necessità di affrontare due problemi: l'esistenza di punti critici per il funzionale d'azione lagrangiana e lo studio del loro insieme di collisioni.

La mancanza di coercività nel funzionale d'azione associato al problema, comporta la necessità di lavorare in opportuni sottoinsiemi dello spazio dei lacci imponendo dei vincoli di simmetria dettati dall'azione di un gruppo finito G sullo spazio, sul tempo e sull'insieme degli indici ([3]). In particolare ho considerato quel sottoinsieme di traiettorie in cui i corpi, di massa uguale, sono vincolati a muoversi sulla stessa curva scambiandosi di posizione dopo un tempo fissato (*coreografie semplici*, [1]). Il risultato ottenuto dimostra che, imponendo il vincolo di coreografia semplice, il minimo assoluto del funzionale d'azione con potenziale a -omogeneo (di grado $-a$, $a > 0$) è assunto sulle rotazioni rigide e uniformi di periodo minimo 2π di un n -agone regolare di raggio dipendente dal numero di corpi e dall'omogeneità della funzione potenziale. Inoltre, procedendo con l'analisi dello stesso problema in un sistema rotante, con velocità angolare costante, si dimostra che i minimi globali non sono necessariamente delle rotazioni rigide e uniformi di una configurazione fissata. Infatti quando si prendono in considerazione intensità della velocità angolare prossime ad un intero k che non sia nè coprimo nè multiplo del numero di corpi, allora i minimi dell'azione lagrangiana sono assunti su dei lacci di periodo 2π con indice di avvolgimento k attorno all'asse di rotazione.

L'esistenza di una vasta gamma di minimi locali, determinati numericamente, per valori dell'intensità della velocità angolare vicini ad un semi-intero, ci ha motivato nella ricerca di punti critici che non fossero minimi per il funzionale d'azione sull'insieme delle coreografie semplici. Proponiamo pertanto una dimostrazione costruttiva per il Teorema di Passo Montano di Ambrosetti e Rabinowitz, basata su un algoritmo di bisezione che può essere implementato numericamente. Malgrado la sua semplicità, il nostro algoritmo migliora quello tipicamente utilizzato, proposto da Choi e McKenna in [2], in quanto permette di approssimare un cammino localmente ottimale congiungente due componenti connesse distinte di un sottolivello con un il calcolo di un numero esiguo di linee di flusso. La particolare idoneità del nostro algoritmo a problemi con un numero elevato di variabili, approssimazione di problemi infinito dimensionali, ci fa pensare ad una sua possibile applicazione in svariati ambiti dell'analisi nonlineare. In particolare, questa teoria ci ha permesso di determinare una nuova soluzione per il problema dei 3-corpi, con il vincolo di coreografia semplice in un riferimento rotante con velocità angolare di intensità pari a 1.5.

Al fine di poter trovare dei punti critici per il funzionale d'azione sullo spazio delle *coreografie doppie*, abbiamo elaborato una versione dell'algoritmo di bisezione che garantisce l'esistenza di almeno un punto critico in presenza di un sottolivello con gruppo fondamentale non banale. In questo caso, infatti, la mancanza di coercività del funzionale d'azione non ci permette di garantire l'esistenza di punti di minimo; per ovviare alla mancanza della condizione di compattezza di Palais-Smale creiamo dei sottolivelli non semplicemente connessi imponendo una *Strong Force* sull'omogeneità del funzionale ($a \geq 2$). In quest'ambito ci proponiamo di applicare il modo sistematico i metodi di dimostrazione computer assisted per dimostrare che le orbite trovate numericamente sono effettivamente soluzione del problema studiato.

Uno dei problemi principali nell'approccio variazionale consiste nell'impossibilità di escludere a priori l'esistenza di istanti di collisione per i punti critici dell'azione lagrangiana, per questo motivo ci siamo occupati dello studio delle orbite di collisione trovate minimizzando il funzionale d'azione. La ricerca attuale ha affrontato questo problema per funzionali d'azione con potenziali a -omogenei, con $a \in (0, 2)$. Un primo metodo consiste nel fare delle stime di livello del funzionale d'azione, dimostrando che la traiettoria di collisione non è in realtà minimale in opportuni spazi di lacci simmetrici; l'alternativa a questo metodo «globale», consiste nel trovare variazioni locali in un intorno di una collisione che fanno decrescere il funzionale d'azione. In quest'ambito un contributo fondamentale è stato dato da due idee; la prima consiste nel mostrare l'esistenza di un disco o di una sfera sul quale la media delle variazioni locali è negativa (*Principio di Marchal*), garantendo l'esistenza di almeno una variazione sulla traiettoria di uno dei corpi che fa decrescere sia il funzionale d'azione che il numero di corpi coinvolti nella collisione. La seconda idea, nota come tecnica del *blow-up* mermette

di sostituire un moto di collisione generico con un moto omografico. Entrambe queste teorie possono essere applicate in un contesto G -equivariante, ammesso che il gruppo G verifichi la *rotating circle property* ([3]), una proprietà che garantisce l'esistenza di un cerchio G -equivariante su cui possono essere spostati tutti i corpi coinvolti nella collisione tranne uno. Si può pertanto concludere che, quando il potenziale è α -omogeneo e lavoriamo in un contesto G -equivariante, allora i minimi sono senza collisioni ammesso che il gruppo soddisfi questa proprietà.

Si osservi che questo secondo approccio è puramente locale e non necessita di stime dell'azione sulle orbite di collisione poichè fornisce variazioni in un intorno di una soluzione di eiezione-collisione. Inoltre abbiamo dimostrato che può essere esteso ad una classe più ampia di potenziali, assumendo solo alcune opportune ipotesi di regolarità locali.

Le tecniche delle *stime medie* e del *blow-up* dipendono pesantemente dal moto dei corpi in un intorno dell'istante di collisione; proponiamo quindi un metodo alternativo a quello classico ([4, 5]) per stimare il comportamento dei corpi vicino ad una collisione, interpretando il funzionale d'azione, in un intorno di una collisione di k corpi ($n \geq k$), come una perturbazione del funzionale associato al problema dei k -corpi. Dopo un opportuno riscaldamento temporale e un cambiamento di variabili, deduciamo, nel caso di potenziali α -omogenei, le stime asintotiche classiche direttamente dalle equazioni di Eulero-Lagrange associate al nuovo funzionale e la estendiamo al caso di potenziali con crescita logaritmica. Questo risultato ci permette di dimostrare le stime nel caso logaritmico e di dedurre, senza l'utilizzo della tecnica del blow-up, l'assenza di collisioni nei minimi del funzionale d'azione su un opportuno insieme di lacci simmetrici. Ci proponiamo di estendere questo risultato al caso in cui il potenziale d'interazione contenga un termine α -omogeneo perturbato da un termine divergente a $+\infty$ sull'insieme delle configurazioni di collisione \mathcal{A} .

Nell'ultimo capitolo della tesi è stato studiato il problema piano G -equivariante dei 3-corpi e abbiamo dimostrato che, nel caso di potenziali α -omogenei, le orbite minimali per il funzionale d'azione associate a questo problema non hanno collisioni. In particolare abbiamo mostrato l'esistenza di una variazione locale G -equivariante che fa decrescere il funzionale d'azione, ogni qualvolta il gruppo G non soddisfi la *rotating circle property*.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CHENCINER A. and MONTGOMERY R., *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*, Ann. of Math. **152** 3 (1999), 881-901.
- [2] CHOI Y.S. and MCKENNA P.J., *A mountain pass method for the numerical solution of semilinear elliptic problems*, Nonlin. Anal. **20** 4 (1993), 417-37.
- [3] FERRARIO D. and TERRACINI S., *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem*, Invent. Math. **155** 2 (2004), 305-362.

- [4] SPERLING H.J., *On the real singularities of the N -body problem*, J. Reine Angew. Math. **245** (1970), 15-40.
- [5] WINTNER A., *The analytical foundation of celestial mechanics*, Princeton Math. Ser. **5**, New York Princeton University Press 1941.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
e-mail: vivina.barutello@unimib.it
Dottorato in Matematica Pura e Applicata
(sede amministrativa: Università di Milano-Bicocca) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: prof. Susanna Terracini