BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SILVANO BAGGIO

K-teoria equivariante delle varietà toriche non singolari

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.3-1, p. 445–447.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_3-1_445_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

K-teoria equivariante delle varietà toriche non singolari

SILVANO BAGGIO

Le varietà toriche sono varietà algebriche normali, su un campo k , che contengono come aperto denso il toro algebrico $T \cong G_k^n$, e ammettono un'azione di T che estende l'azione su se stesso per moltiplicazione. Esse costituiscono una classe molto studiata in geometria algebrica, perché, pur essendo abbastanza vasta da contenere esempi non banali, il suo studio è facilitato dal poter essere spesso ridotto a problemi di combinatoria. Infatti ogni varietà torica può essere costruita a partire da un dato combinatorico, un «ventaglio» Δ di coni convessi in $\mathbf{R}^n$ (se n è la dimensione della varietà), che nel caso non singolare corrisponde a un complesso simpliciale S_Δ che ammette una realizzazione geometrica in $\mathbf{R}^n$ (i vertici di S_Δ corrispondono ai coni di dimensione 1 di Δ , e i simplessi ai coni non nulli $\sigma \in \Delta \setminus \{0\}$).

Questa tesi prende in considerazione i gruppi di K-teoria equivariante delle varietà toriche non singolari, e li mette in relazione con alcune proprietà combinatoriche dei ventagli di coni ad esse associati.

1. – Degenerazione della successione spettrale di Merkur'ev.

Il nostro punto di partenza è un risultato dovuto a Merkur'ev ([2]), che consente di approssimare la K-teoria equivariante mediante quella ordinaria. Si tratta di una successione spettrale che converge a $K_*(X)$, per una varietà torica non singolare X :

$$(1) \quad E_{pq}^2 = \text{Tor}_p^{RT}(K_q^T(X), \mathbf{Z}) \Rightarrow K_{p+q}(X).$$

Il primo problema di cui ci occupa (Capitolo 2) è la caratterizzazione delle varietà toriche lisce per cui la successione spettrale di Merkur'ev degenera, cioè per cui si abbia: $E_{pq}^2 = 0$ per ogni $p > 0$. Per esse la K-teoria ordinaria si esprime immediatamente in termini di quella equivariante: $K_q(X) = K_q^T(X) \otimes_{RT} \mathbf{Z}$. Per esempio, le varietà toriche complete, che corrispondono a ventagli il cui supporto ricopre $\mathbf{R}^n$, sono di questo tipo.

Questo problema è significativo in vista della descrizione che Vezzosi e Vistoli hanno ottenuto recentemente (in [4]) per la K-teoria equivariante delle varietà toriche lisce. Da un lato essa si può vedere come un sottoanello del prodotto

$\prod_{\sigma \in \Delta_{\max}} K_*(k) \otimes RT_\sigma$ (ove RT_σ è l'algebra delle rappresentazioni del sotto-toro di T che stabilizza l'orbita associata al cono σ). Da questa, si ricava (in [4]) una presentazione

della K-teoria equivariante per generatori e relazioni, analoga a quella dell'algebra di Stanley-Reisner sul complesso simpliciale S_Δ associato al ventaglio. Entrambe le descrizioni sono state di grande utilità per ottenere i risultati qui raccolti.

Un primo risultato originale è il seguente

TEOREMA 1. – *La successione di Merkur'ev degenera se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:*

H1. $\tilde{H}_i(lk\sigma, \mathbf{Z}) = 0$ per ogni $i < \dim(lk\sigma)$, dove $\tilde{H}$ è l'omologia simpliciale ridotta, e lk è il link di σ , cioè l'insieme delle facce, disgiunte da σ , di simplessi S_Δ che contengono σ ;

H2. $\tilde{H}_i(S_\Delta, \mathbf{Z}) = 0$ per ogni $i < \dim(S_\Delta)$

Questo teorema è correlato a un noto teorema di algebra combinatorica (dovuto a Reisner, [3]): l'annullarsi dell'omologia ridotta, globale e di ogni link, di un complesso simpliciale è equivalente al fatto che il suo anello di Stanley-Reisner sia di Cohen-Macaulay.

2. – Invarianza per suddivisione del ventaglio.

Si può osservare che in effetti le condizioni H1 e H2 riguardano solo il supporto di Δ , e sono quindi vere o false indipendentemente da come esso sia suddiviso (varietà toriche non isomorfe possono avere ventagli con lo stesso supporto). Nel capitolo 3 ci si chiede allora se sia possibile trovare una descrizione dei termini E_{pq}^2 legata solo alla topologia del supporto di Δ . La risposta è negativa, per tutte le varietà toriche il cui ventaglio non verifichi la condizione locale H1. Questo segue immediatamente dal

TEOREMA 2. – *Siano $X = X(\Delta)$ la varietà torica liscia associata al ventaglio Δ in $N_{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}^n$, $\sigma \in \Delta_d$ un cono di dimensione $d \geq 2$, $\Delta' = \{\sigma\} \cdot \Delta$, $X' = X(\Delta')$. Allora:*

(i) *se $\tilde{H}_j(lk\sigma, \mathbf{Z}) \neq 0$ per qualche $j < d - 1$, allora*

$$\text{Tor}_i^{\mathbf{R}T}(K_q^T(X), \mathbf{Z}) \not\cong \text{Tor}_i^{\mathbf{R}T}(K_q^T(X'), \mathbf{Z}) \exists i > 0 \forall q \geq 0;$$

(ii) *viceversa, se $\text{Tor}_i^{\mathbf{R}T}(K_q^T(X), \mathbf{Z}) \cong \text{Tor}_i^{\mathbf{R}T}(K_q^T(X'), \mathbf{Z}) \forall i, q \geq 0$, allora per qualche $\tau \prec \sigma$ risulta $\tilde{H}_j(lk\tau, \mathbf{Z}) \neq 0 \exists j < \dim(\tau) - 1$.*

Qui $\{\sigma\} \cdot \Delta$ denota la «suddivisione a stella» del ventaglio Δ ottenuta sostituendo il cono σ con la sua minima suddivisione che contenga un cono 1-dimensionale interno a σ : essa corrisponde geometricamente al blow up della varietà lungo l'orbita associata al cono σ .

3. – Calcolo dei termini della successione di Merkur'ev.

Nel Capitolo 4 abbiamo supposto allora che la condizione H1 sia verificata, e che inoltre i coni massimali del ventaglio abbiano tutti dimensione pari a quella della

varietà. Questo è come dire che una realizzazione geometrica di $S_{\mathcal{A}}$ è una sottovarietà con bordo della sfera $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$.

Con queste ipotesi, è possibile trovare un'espressione molto esplicita dei termini E_{pq}^2 , in cui figura solo l'omologia ridotta di $S_{\mathcal{A}}$. (Nel caso che anche questa si annulli, si ritrova una delle implicazioni del Teorema 1). Vale infatti il seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Se $X(\mathcal{A})$ è una varietà torica liscia il cui ventaglio Δ soddisfi la condizione H1, e sia tale che $\Delta_{\max} = \Delta_n$, allora*

$$\mathrm{Tor}_p^{RT}(K_0^T(X(\mathcal{A})), \mathbf{Z}) \cong \bigoplus_{i=p+1}^n \tilde{H}^{i-p-1}(S_{\mathcal{A}}, \mathbf{Z}^{\binom{n}{i}}).$$

I termini $\mathrm{Tor}_p^{RT}(K_q^T(X), \mathbf{Z})$, per $q > 0$, si ottengono poi da quelli con $q = 0$ mediante il teorema dei coefficienti universali, in quanto $K_q^T(X) = K_0^T(X) \otimes_{\mathbf{Z}} K_q(k)$.

Un cenno sulla dimostrazione dell'ultimo teorema. Essa si basa sull'idea (non nuova, vedi per es. [1]) di considerare $\mathcal{A}$ come uno spazio topologico, i cui punti sono i coni, e la topologia è indotta dall'ordine delle facce, e su di esso costruire opportuni fasci di anelli. Nel nostro caso, esiste un fascio $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}$ dotato di tale topologia, il cui gruppo delle sezioni globali è proprio $K_0^T(X)$: la sua definizione nasce naturalmente dall'espressione di $K_0^T(X)$ come sottoalgebra di $\prod_i RT_{\sigma_i}$. L'osservazione chiave è che i termini $E_{p,0}^2$ della successione di Merkur'ev corrispondono ai gruppi di ipercoomologia del complesso di Koszul associato a $\mathcal{A}$: inoltre, la condizione H1 assicura che la successione spettrale convergente a questa ipercoomologia abbia abbastanza termini nulli per giungere al nostro risultato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARTHEL G., BRASSELET J. P., FIESELER K. H. e KAUP L., *Combinatorial intersection cohomology for fans*, Tohoku Math. J., **54** (2002), 1-41.
- [2] MERKUR'EV A. S., *Comparison of the equivariant and the ordinary K-theory of algebraic varieties*, St. Petersburg Math. J., **9** (1998), 815-850.
- [3] REISNER G. A., *Cohen-Macaulay Quotients of Polynomial Rings*, Advances in Math., **21** (1976), 30-49.
- [4] VEZZOSI G. e VISTOLI A., *Higher algebraic K-theory for actions of diagonalizable groups*, Invent. Math., **153** (2003) 1-44.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna;

e-mail: baggio@dm.unibo.it

Dottorato in matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo XIV

Direttore di ricerca: Prof. Angelo Vistoli, Università di Bologna