Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giorgio Talenti

Necrologio di Carlo Pucci

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.2, p. 357–377.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_2_357_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Agosto 2005, 357-377

Necrologio di Carlo Pucci

GIORGIO TALENTI [1]

1. – Carlo Pucci nacque in Firenze nel 1925 da una colta famiglia della borghesia fiorentina. Uno zio paterno di lui, che portò i medesimi nome e cognome e visse dal 1879 al 1918, fu professore di zootecnia ed ezoognosia nell'Università di Pisa, consigliere del Comune di Firenze, membro della Camera dei Deputati, apprezzato sia nella scienza, sia nella politica. Uno zio materno fu Ernesto Rossi, uomo politico e saggista vissuto dal 1897 al 1967, il quale si distinse nella classe intellettuale italiana durante la prima metà del secolo scorso ed ebbe grande influenza sul pensiero del Nostro.

Carlo Pucci condivise fin da bambino le convinzioni, fieramente ostili al regime fascista, di tutta la sua famiglia. Ernesto Rossi si batté da leone contro il fascismo, e subì in conseguenza nove anni di carcere ed anni di confino. Carlo, ancora ragazzo, visitò due volte lo zio incarcerato e si strinse spiritualmente a lui. Diciottenne, partecipò con entusiasmo alle dimostrazioni antifasciste del 25 luglio 1943 in Firenze.

Iniziò nel 1943 gli studi universitari di ingegneria, ma decise di abbandonare e passare alla clandestinità dopo breve tempo, quando la Repubblica Sociale Italiana chiamò alle armi la classe 1925. Si arruolò volontario nel Corpo italiano di liberazione e combatté sul fronte nord-orientale italiano. Tornato dopo la guerra agli studi universitari, verso la fine degli anni quaranta si laureò in matematica a Firenze sotto la guida di Giovanni Sansone. La sua tesi di laurea fu notata da Mauro Picone, che lo invitò a Roma. Quivi egli si trasferì con una borsa di

[1] L'autore ringrazia vivamente A. Figà-Talamanca per le informazioni e il cordiale aiuto che questi ha voluto dargli.

studio dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica e principiò la sua carriera universitaria. Picone e Sansone, allora fra i più autorevoli professori italiani di analisi matematica, furono sempre ricordati con stima dal loro antico allievo.

Gli esordi non esclusero qualche *lapsus*, come vecchie recensioni e vecchi divertenti documenti raccontano. Tuttavia Carlo Pucci si affermò, grazie anche ad alcuni proficui *stages* negli USA, rapidamente. Ecco in breve il suo *curriculum vitae*. Borsista presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica nel 1950-51; assistente di ruolo di Analisi Matematica nell'Università di Roma dal 1951 al 1961; professore straordinario di Analisi Matematica presso l'Università di Catania nel 1961-62; professore di Analisi Matematica (dapprima straordinario, poi ordinario) presso l'Università di Genova dal 1962-63 al 1968-69; professore ordinario di Istituzioni di Analisi Superiore nell'Università di Firenze dal 1969-70. *Assistant professor* nell'Institute for Fluid Dynamics, University of Maryland, negli anni 1956-57 e 1957-58; *visiting professor* presso la Rice University, Texas, nelle estati del 1961 e del 1963; *visiting professor* presso la Louisiana University, Baton Rouge, nell'estate del 1965; *visiting professor* presso l'Università della California, Berkeley, nell'estate del 1967.

Carlo Pucci esplicò importanti mansioni in molte organizzazioni scientifiche. Presiedette la Commissione Didattica del Comitato di Coordinamento delle Associazioni Scientifiche Italiane dal 1976 al 1979, presiedette il medesimo comitato dal 1979 al 1987. Fu membro di varie commissioni ministeriali. Fece parte dell'*Editorial Board* della *Encyclopaedia of Mathematics and its Applications* e della rivista *Applicable Analysis*; fu a lungo direttore della rivista *Archimede*, del Notiziario e del Bollettino dell'Unione Matematica Italiana; fondò e diresse per vari anni la sezione A – *La matematica nella società e nella cultura* – del medesimo bollettino.

Presiedette il Comitato per le Scienze Matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche per otto anni, dal 1968 al 1976. Fu presidente dell'Unione Matematica Italiana dal 1976 al 1982, presidente onorario dal 1996 fino ai suoi ultimi giorni. Fu presidente dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica due volte, dal 1986 al 1995. Diresse per diciassette anni, dal 1981 al 1998, l'Istituto di Analisi Globale ed Applicazioni – uno degli istituti matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche in quel tempo.

Ebbe numerosi allievi ed amici, non si privò di qualche nemico. Alcuni dei primi sono oggi professori (ordinari oppure associati) in Università italiane; altri – J. Cannon, K. Miller, K. Oddson – sono *full professors* in Università degli Stati Uniti. Molti eminenti matematici, italiani e stranieri, lo stimavano. Parecchi avversari gli riconoscevano dei meriti. Taluni si sentivano invece disturbati dai lati meno cattivanti della sua indole – *l'esprit combattif*, l'intransigenza, l'incrollabile fiducia nelle proprie convinzioni.

Si dedicò anima e corpo all'esercizio della scienza, all'insegnamento, al governo della vita scientifica. Orientò le ricerche matematiche, sue personali e di chi voleva imparare da lui, verso questioni chiare e significative, che domandavano ingegno più che tecnica – aveva buon gusto, intuito sicuro, acuto spirito critico; teneva le costruzioni macchinose e le mode del momento in non cale. Fu uno di coloro che negli anni cinquanta e successivi si adoprarono affinché la matematica italiana si riscattasse dal pregresso isolamento e arrivasse a competere con quella di altre nazioni. Fu fra gli artefici del sistema che ha consentito a molteplici generazioni di matematici italiani sia di studiare all'estero, visitare università di paesi diversi, collaborare con professori visitatori stranieri, sia di sfornare ad un ritmo adeguato, anche quando il dottorato di ricerca non esisteva a sud delle Alpi o stentava, un numero sufficiente di giovani professionisti sufficientemente preparati. Era particolarmente interessato al reclutamento e alla formazione dei giovani: la Scuola Matematica Universitaria, attiva fin dai primi anni settanta in Perugia e Cortona a beneficio di laureati esordienti, è stata una sua creazione.

Ebbe potere ed influenza sulla comunità matematica italiana per molti anni. Il suo prestigio discendeva in gran parte dalla lungimiranza, rettitudine e impegno personale – aveva il vizio di lavorare dodici ore al giorno o giù di lì. Sebbene sagace nell'azione e risoluto, era un idealista – obbediva rigidamente a dei principi e non approvava che il particolare facesse aggio su quelli. Ricusò onori accademici di rito, favorì i suoi sodali non più del minimo indispensabile – spesso trattava meglio gli altri. Condusse una severa vita privata.

Andò in pensione anticipatamente nel 1998, quando sentì che le forze lo stavano abbandonando. Morì nel gennaio 2003 a causa di un cancro, che da parecchio tempo lo faceva soffrire e lo spense progressivamente. Trascorse i suoi ultimi anni in condizioni a grado a grado peggiori nella sua casa di Firenze; tuttavia confortato dalle rimembranze di passate imprese, sue e della sua famiglia, e lavorando tenacemente malgrado l'infermità ad una quantità di iniziative. Ad esempio, una fondazione, che conserva scritti, documenti e ricordi di Gaetano Salvemini ed Ernesto Rossi, è fra i frutti di suoi ultimi appassionati sforzi.

2. – Carlo Pucci dedicò larga parte della sua attività alla cura della vita matematica italiana.

Il suo primo successo politico fu la costituzione di un cartello di giovani animosi, il quale intraprese a caldeggiare, in contrapposizione alle generazioni anziane, una più moderna organizzazione della ricerca. Il cartello, impostato durante il Congresso dell'Unione Matematica Italiana (UMI) del 1951 e sostenuto dall'Associazione Sindacale dei Ricercatori di Matematica, uscì clamorosamente allo scoperto quando Enrico Magenes presentò una mozione all'assemblea dell'UMI, che si tenne a Napoli nel 1959 in occasione di uno dei congressi quadriennali. La mozione, firmata da oltre quaranta soci, fu approvata e produsse effetti importanti. Nacque il Consiglio Nazionale per la Ricerca Matematica (CoNaRM), con tanto di statuto e di comitato esecutivo. Il CoNaRM esordì come una vera e propria agenzia: ottenne una sovvenzione dall'Ente Nazionale Idrocarburi, assegnò borse di studio, finanziò progetti di ricerca. Nel 1961 il CoNaRM indusse il Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) a finanziare cinquanta contratti per la matematica. Questi, denominati Gruppi di Ricerca, furono la fonte da cui nacque il finanziamento generale della matematica italiana. Il seme di un sistema, destinato a durare lungamente con successo, fu gettato così. Pucci fu il primo segretario del CoNaRM e restò in carica per molti anni – anche quando conduceva il gioco, egli preferiva non comparire in prima persona, ma restare alquanto defilato.

Carlo Pucci fu attivo nell'Unione Nazionale Assistenti Universitari – un'associazione sindacale che raccomandava riforme dell'università e del CNR senza badare troppo agli interessi personali dei suoi aderenti. Divenuto professore, egli continuò la sua azione nell'ambito dell'Associazione Nazionale dei Professori Universitari di Ruolo, dove costituì una corrente progressista. Egli partecipò ampiamente al dibattito per la riforma del CNR – mirante a fare di questo ente l'organo principale per il coordinamento di tutta la ricerca italiana, scientifica ed umanistica – e si può affermare che molte parti di tale riforma – attuata da una legge del 1963 e dai regolamenti del 1967 – scaturirono dal suo pensiero e dalla sua azione politica.

Nel 1968 Carlo Pucci fu eletto nel Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del CNR, quale rappresentante dei professori universitari di analisi matematica. Divenne presidente di tale comitato e conseguentemente entrò nel consiglio di presidenza del CNR – il massimo organo dirigente dell'ente. Egli mantenne questa posizione fino alla fine del 1976.

In quell'epoca la speranza di adeguare il sistema universitario alle necessità del paese sembrava tramontata: il disegno di legge, che avrebbe potuto varare le riforme proposte a partire dagli anni cinquanta, era stato definitivamente accantonato nel 1968; il movimento studentesco rendeva i partiti politici riluttanti ad occuparsi dell'università. D'altra parte sembrava chiaro che il sistema universitario avrebbe dovuto espandersi in seguito sia all'iscrizione dei diplomati degli istituti tecnici e magistrali, sia alla crescente domanda generale di istruzione. L'addestramento dei futuri docenti universitari divenne dunque un problema urgente. Sotto l'influenza di Pucci, il Comitato per la Matematica del CNR decise di investire quasi tutte le sue risorse nella formazione dei matematici. Gli strumenti principali furono: (i) le borse di studio per l'interno; (ii) le borse di studio per l'estero; (iii) i corsi estivi. Le borse per l'estero consentirono a molti ricercatori di perfezionarsi in prestigiose università straniere, e consentirono a molti neolaureati di conseguire un serio dottorato di ricerca. I corsi estivi furono progettati sulla falsariga dei *graduate courses* statunitensi e furono affidati quasi esclusivamente a docenti delle migliori scuole internazionali. Nel 1969 e 1970 essi ebbero luogo a Pisa nella Scuola Normale Superiore, nel 1971 furono in parte spostati a Perugia; a partire dal 1972 l'Università di Perugia ospitò i corsi di primo livello, mentre i corsi più avanzati si svolsero a Cortona nella *dependence* della Scuola Normale Superiore.

Pucci attribuiva ai corsi estivi non solo la funzione di preparare professionalmente, ma anche quella di stimolare un generale scambio di opinioni, informazioni e idee fra gli aspiranti membri della comunità matematica avvenire. Egli credeva profondamente che soltanto una classe dirigente educata al confronto e al dibattito sarebbe stata in grado di efficacemente autogovernarsi e servire il paese; pensava, con una forte dose di ottimismo, che i corsi estivi avrebbero irrobustito l'osmosi culturale fra ambienti e generazioni diversi, rinverdito la ricerca scientifica e l'insegnamento, offuscato antiche cattive abitudini accademiche. Pucci si occupò per tutta la vita della Scuola Matematica Interuniversitaria – un'associazione che egli stesso aveva creato per dare stabilità ai corsi estivi di Perugia e Cortona.

Il Comitato per le Scienze Matematiche, guidato da Pucci, costituì i Gruppi Nazionali di Ricerca Matematica. Quattro gruppi, diretti da consigli scientifici, presero ad operare sotto la supervisione del Comitato – Analisi Matematica, Algebra e Geometria, Fisica Matematica, Informatica Matematica. Il finanziamento della ricerca matematica italiana fu interamente affidato ai Gruppi Nazionali ed essi rimasero fino al 1980 l'unica fonte di sovvenzioni.

La scelta di delegare la gestione finanziaria ad organi con direzione collegiale corrispondeva ad opinioni di Pucci che non erano allora, né tantomeno sono ora, generalmente condivise. Secondo Pucci, la collegialità avrebbe fatto progressivamente maturare nella maggior parte degli aderenti la capacità di operare nel superiore interesse della collettività e di mettere la sordina agli interessi personali. La collegialità avrebbe anche costituito un antidoto al difetto dei sistemi con rappresentanza elettiva – il rischio che l'eletto si preoccupi troppo di coltivare il suo bacino elettorale attraverso l'elargizione di favori. Una struttura complessa, comprendente il Comitato per la Matematica ed i Consigli Scientifici dei Gruppi, avrebbe emarginato i soggetti che un'acida battuta di Pucci definiva «capaci soltanto di lavorare alla costruzione del proprio monumento». La visione, che Pucci aveva sull'organizzazione di una comunità scientifica, era forse idealista, ma era certamente basata su un'analisi politica approfondita.

Fig. 1. – Carlo Pucci. La fotografia è stata scattata nel 1989 dall'amico ed antico allievo Keith Miller, in un giardino sulle colline di Firenze (per gentile concessione di K. Miller).

Il Comitato per la Matematica del CNR, presieduto da Pucci, rafforzò la matematica nelle università e nella scuola. Furono costituiti i Gruppi di Ricerca Didattica. Gli istituti matematici universitari furono sovvenzionati affinché gli studenti dell'indirizzo applicativo potessero addestrarsi con piccoli calcolatori elettronici – le complesse procedure di accesso rendevano i calcolatori, usati allora nella ricerca scientifica, inaccessibili alla didattica. Altri organi del CNR furono aggiunti al preesistente Istituto per le Applicazioni del Calcolo e destinati alla ricerca matematica presso le università: il Laboratorio (poi Istituto) di Analisi Numerica di Pavia, il Laboratorio (poi Istituto) di Matematica Applicata di Genova, il Centro (poi Istituto) di Analisi Globale di Firenze – i quali furono affidati alla direzione rispettivamente di Enrico Magenes, Jaurès Cecconi e Francesco Gherardelli.

Pucci condusse molte battaglie di carattere generale in seno al Consiglio di Presidenza del CNR. Combatté le sanatorie che riservavano posti e concorsi ai cosiddetti precari – secondo Pucci, queste sanatorie, sebbene generalmente spacciate per frutto di «dure lotte sindacali» contro le «assunzioni irregolari» e lo «sfruttamento dei giovani» da parte dei «baroni», erano spesso sollecitate da questi ultimi allo scopo di favorire quanti essi volevano discrezionalmente assumere. Si oppose al passaggio del CNR nel novero degli enti del parastato – senza riuscire: il passaggio avvenne nel 1975 su pressione sindacale. Si oppose, scontrandosi con Edoardo Amaldi, alla gestione delle spese per la ricerca spaziale – una gestione sulla quale il CNR sembrava non esercitare alcun controllo. La lungimirante politica delle borse di studio, promossa dal Comitato per la Matematica, dovette essere difesa con asprezza dalle critiche di chi la qualificava uno «spreco di soldi» o un «finanziamento a pioggia». Nel 1976 Pucci si oppose strenuamente all'approvazione dei nuovi regolamenti del CNR – presentati ad un consiglio di presidenza già scaduto, questi sancivano la quasi totale separazione del CNR dall'università. L'opposizione di Pucci ebbe alla fine un riscontro: i regolamenti riguardanti centri e gruppi di ricerca non furono approvati, i Gruppi Nazionali di Ricerca Matematica furono prorogati di cinque anni.

Carlo Pucci partecipò attivamente alla vita dell'UMI. Fu membro della Commissione Scientifica a lungo. Nel 1976 successe a Enrico Magenes nella presidenza dell'Unione; rieletto nel 1979, rimase presidente fino al 1982. Fu diretto ispiratore di molte iniziative. Creò nel 1974 il Notiziario – concepito sia come organo di informazione, sia come strumento di dibattito, familiarmente ribattezzato «Becco giallo», il Notiziario si è rivelato efficace. Si adoperò affinché studi sull'organizzazione della ricerca e sull'insegnamento della matematica, una critica costruttiva ed un dibattito franco sulla gestione dei finanziamenti alla matematica fossero inclusi fra le finalità primarie dell'UMI. Volle che relazioni del presidente del Comitato per la Matematica del CNR, e dei presidenti di altre istituzioni matematiche finanziate dal danaro pubblico, fossero presentate all'assemblea annuale dell'UMI e pubblicate sul Notiziario.

La fine degli anni settanta vide un risveglio del cosiddetto movimento studentesco – pochi studenti veri parteciparono, gruppi vicini ai terroristi si mossero invece. Furono particolarmente prese di mira le facoltà di architettura. Nonostante una diffusa connivenza di autorità accademiche, forse dovuta a timore o tornaconto, l'UMI prese una chiara posizione a difesa della legalità e della serietà degli studi. Il Notiziario dell'UMI denunciò le illegalità e le sopraffazioni che erano divenute comuni nella Facoltà di Architettura del Politecnico di Milano. Pucci redasse un libro bianco sui soprusi messi in atto nella Facoltà di Architettura dell'Università di Firenze. Nel maggio del 1980 l'UMI organizzò, in collaborazione con la Facoltà di Architettura dell'Università di Napoli, un convegno sull'insegnamento di materie scientifiche nelle facoltà di architettura, cui parteciparono numerosi docenti di queste facoltà – in particolare il presidente del Collegio dei Presidi. Le azioni dell'UMI e di Pucci segnarono una svolta: le facoltà di architettura ripristinarono le basi scientifiche e tecniche della laurea e misero un argine alle illegalità.

Come presidente dell'UMI, Pucci si adoperò anche per contrastare le leggi che vennero proposte verso la fine degli anni settanta al fine di sistemare i precari delle università. Gli esponenti del mondo accademico, che firmarono petizioni contro il Decreto Pedini, furono in gran parte sollecitati da lui. Fu lui ad offrire appoggio tecnico alla Sinistra Indipendente e ai Radicali per evitare che il Parlamento convertisse il Decreto Pedini in legge. Bisogna ricordare che i precari di allora includevano centinaia di borsisti di matematica – l'UMI scelse di opporsi ad un provvedimento che avrebbe incrementato l'organico dei docenti universitari di matematica.

Nel 1977 Carlo Pucci entrò a far parte del Comitato Direttivo dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM), che una legge dell'anno precedente aveva finalmente sottratto ad un lungo periodo di commissariato. Il nuovo comitato direttivo, anche per iniziativa di Pucci, decise di concentrare gli sforzi dell'istituto sulla formazione dei giovani, attraverso borse di studio e corsi di insegnamento. L'INdAM divenne l'unico ente in grado di sovvenzionare giovani matematici a partire dal 1978, data in cui il CNR cessò di erogare borse di studio.

In quegli stessi anni Carlo Pucci si occupò anche del Comitato per il Coordinamento delle Associazioni Scientifiche (COASSI). Divenne presidente del COASSI nel 1979. Sotto l'impulso di lui, questo comitato si occupò dell'insegnamento scientifico nella scuola inferiore, della formazione e del reclutamento dei ricercatori, della divulgazione scientifica. Il COASSI intervenne con successo anche sulla produzione legislativa: ad esempio la sua azione fu determinante nell'evitare che il ruolo dei ricercatori universitari fosse «messo ad esaurimento» nel 1986.

Carlo Pucci fu presidente dell'INdAM dal 1986 al 1995. Durante la sua presidenza furono sviluppate molte iniziative nuove, che in parte supplirono al progressivo disinteresse del CNR per quanto avveniva fuori dei propri istituti. Nel 1992 una legge di riordino entrò in vigore, la quale prescrisse in particolare che l'INdAM si dotasse di un nuovo regolamento elettorale. Pucci e la maggioranza del comitato direttivo elaborarono il regolamento elettorale in vigore a tutt'oggi.

3. – Carlo Pucci pubblicò una settantina di lavori, che vertono su questioni di analisi reale, analisi convessa, calcolo delle variazioni, equazioni differenziali alle derivate parziali – un elenco numerato si trova nel paragrafo 4. I lavori della maturità contengono risultati vari e pregevoli; alcuni contengono risultati eccellenti. Questi ultimi sono tuttora citati nella migliore letteratura matematica e sono illustrati qui appresso.

Verso l'inizio del secolo scorso J. Hadamard, illustre cultore di equazioni alle derivate parziali, propose che un problema, consistente nell'assemblare una o più certe equazioni ed eventuali condizioni aggiuntive, si dicesse *ben posto* se, convenuti un significativo quadro funzionale ed una conseguente topologia, la attinente soluzione è unica, esiste e dipende con continuità dai dati maggiormente importanti. Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace (la domanda di una funzione, che sia armonica in una regione data e assuma valori prescritti sul contorno della medesima regione) è ad esempio ben posto, e così sono generalmente i classici problemi al contorno. Hadamard dimostrò che il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace (imperniato invece su condizioni iniziali: la soluzione e il suo gradiente sono entrambi assoggettati ad assumere valori dati su una data linea o superficie) è *mal posto*: la soluzione è sì unica; tuttavia esiste soltanto sotto pesanti restrizioni sui dati; soprattutto è instabile – cioè può esplodere *ad libitum* se i valori iniziali vengono perturbati, anche se la perturbazione è arbitrariamente piccola e la linea o superficie iniziale è perfettamente regolare. La teoria delle equazioni alle derivate parziali annovera svariati problemi mal posti: il problema di Cauchy per l'equazione tridimensionale delle onde, nel caso in cui la normale alla superficie iniziale è esterna al cono caratteristico; il problema di Cauchy per l'equazione monodimensionale del calore, se la linea iniziale è l'asse dei tempi, oppure è l'asse spaziale e il tempo è retrogrado; il problema consistente nel determinare una funzione, che è armonica in una data regione ed assume valori prescritti su una data linea o superficie, interna alla regione. Arricchiscono la lista: il calcolo di derivate, il prolungamento analitico; le equazioni integrali di Fredholm di prima specie, i problemi inversi (come si determina quel certo coefficiente di quella equazione differenziale, che ha una data struttura e un dato insieme di soluzioni?) e via discorrendo. Hadamard credette di poter asserire che: (i) nessun algoritmo consentirebbe di calcolare in modo attendibile la soluzione di un problema mal posto nel caso in cui i dati fossero noti solo approssimativamente – per esempio fossero affetti da errore, oppure campionati soltanto in un numero finito di punti, oppure entrambe le cose assieme; (ii) i problemi mal posti non sono adatti a modellare processi fisici interessanti.

Le sentenze di Hadamard hanno gravato sullo sviluppo della teoria delle equazioni alle derivate parziali, però alla fine si sono rivelate erronee per almeno due ragioni. Prima: i problemi mal posti hanno trovato *de facto* applicazioni in rami recenti della scienza e della tecnologia. Per esempio, la prospezione del sottosuolo (con la quale si cerca di identificare la geologia di strati profondi in base a misure di superficie) coinvolge parenti stretti del problema di Cauchy per l'equazione di Laplace. Un processo quale una normale telefonata o un fax (consistente nel tagliare un segnale, trasmettere, addizionare un rumore di fondo, quindi ricostruire) è adeguatamente descritto da un'equazione integrale di Fredholm di prima specie. Una equazione del medesimo tipo ha fatto della tomografia una conquista della diagnostica medica. Eccetera. Seconda ragione: alcuni spiriti indipendenti si avvidero verso gli anni cinquanta del secolo scorso che la patologia di un problema mal posto è in parte dovuta ad una formulazione incompleta e può essere curata con un trattamento adatto.

È opinione diffusa che uno di tali spiriti indipendenti sia stato Carlo Pucci. Altri furono F. John, M.M. Lavrentiev, L. Payne, A.N. Tikhonov.

Secondo Pucci, un problema mal posto, lungi dal meritare il giudizio di Hadamard, può essere semplicemente equiparato ad un processo che dissipa una dose saliente dell'informazione fornita in entrata. I punti cruciali sono questi: (i) un'impostazione efficace di un problema mal posto vede opportune informazioni *a priori*, sufficientemente robuste, surrogare quelle dissipate; (ii) le informazioni in parola hanno l'ufficio di selezionare le soluzioni trattabili ed eliminare tutte le altre – in altri termini scartare proprio le soluzioni instabili, troppo sensibili a perturbazioni di dati. Le informazioni *a priori* sono elementi integranti dell'input, però nel fatto concernono l'output – non accrescono le qualità dei dati convenzionali, al contrario precisano proprietà delle soluzioni. Esse possono includere proprietà peculiari: per esempio, le soluzioni sono positive, oppure sono limitate da una quantità nota. In linea di massima comportano l'appartenenza ad una classe funzionale topologicamente compatta, oppure pressoché tale: per esempio, il gradiente delle soluzioni è limitato da una quantità assegnata. (Dietro le quinte è il principio secondo cui l'inverso di un operatore iniettivo A è continuo se A stesso è continuo e il dominio di A è compatto.) L'arte di trattare i problemi mal posti consiste in: (i) escogitare informazioni *a priori* idonee, al tempo stesso significative e tecnicamente efficaci; (ii) dimostrare e specificare quantitativamente la stabilità delle soluzioni che si conformano alle informazioni stipulate; (iii) mettere a punto algoritmi atti ad approssimare le medesime soluzioni. (In proposito è opportuno ricordare che quel metodo ispirato ai minimi quadrati, il quale è stato reso popolare da A.N. Tikhonov e viene spesso attribuito a quest'ultimo, fu indipendentemente progettato da un allievo di Pucci – K. Miller, oggi nella Università della California in Berkeley.)

Tali concetti (esposti nei lavori 18, 22, 31, 32, 34, 35, 39, 41 e nei successivi 54, 56) hanno consentito a Pucci di dare risposte stimolanti ed intimamente innovative a scelti problemi mal posti. Le idee di Pucci, come talvolta accade a certune buone e originali, furono accolte al loro apparire con qualche perplessità, ma tardarono poco a trovare sostenitori qualificati. Al giorno d'oggi esse sono condivise da tutti gli specialisti, hanno eclissato definitivamente quelle di Hadamard, costituiscono una base assodata della moderna teoria dei problemi mal posti – un'industria fiorente, che ha le sue riviste specializzate, promuove congressi con successo, dà lavoro a molta gente.

Carlo Pucci ha dato importanti contributi alla teoria delle equazioni alle derivate parziali del second'ordine di tipo ellittico. Tale teoria è nel nostro paese un tradizionale cavallo di battaglia degli analisti ed ha occupato un rango di rilevo nella matematica del ventesimo secolo a causa sia della dovizia di applicazioni sia della qualità e quantità dei suoi ingredienti – per esempio, è stata il primo banco di prova di metodi dell'analisi funzionale e dell'analisi numerica, dei metodi moderni del calcolo delle variazioni, degli integrali singolari e di molti altri strumenti. Essa è stata compendiata in notissime monografie (*e. g.* O.A. Ladyzhenskaya & N.N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, 1968; C. Miranda, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, seconda edizione, Springer-Verlag, 1970; D. Gilbarg & N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, seconda edizione, Springer-Verlag, 1983) e ha raggiunto il suo apogeo, in Italia ed altrove, all'incirca una trentina di anni fa grazie all'apporto di schiere di ricercatori. Laddove un imponente *corpus* di studi ha tradizionalmente riguardato equazioni la cui parte principale ha la struttura di una divergenza, Pucci preferì le equazioni che hanno forma affatto generica – come quelle offerte per esempio dalla teoria delle probabilità. Egli era specialmente interessato al caso in cui i coefficienti sono puramente misurabili – in altri termini, non sono soggetti ad alcuna ipotesi di regolarità. Il suo punto di vista era non tanto perseguire la generalità, quanto piuttosto mettere a fuoco quelle proprietà che valgono indipendentemente da qualità accidentali dei coefficienti e discendono soltanto dalla qualità sostanziale dell'equazione – la ellitticità. Risultati esaurienti in questo ordine di idee sono stati ottenuti da vari autori (per esempio L. Bers, R. Finn, L. Nirenberg, J. Serrin) nel caso in cui la dimensione, cioè il numero delle variabili indipendenti, è 2. Al contrario, se la dimensione supera 2 abbondano le difficoltà e i risultati di buon conio sulle equazioni in parola si contano sulle punte delle dita. Appunto uno di questi è dovuto a Pucci: pubblicato da lui nell'articolo 48 del 1966, scoperto indipendentemente da A.D. Aleksandrov, perfezionato in seguito da I.Ya. Bakel'man, esso è internazionalmente noto e citato nella letteratura contemporanea come teorema di Aleksandrov-Bakel'man-Pucci.

Il teorema di Aleksandrov-Bakel'man-Pucci è un autentico colpo maestro. Da un lato, esso si è rivelato ricco di potenziale: ad esempio, è un punto di partenza del celebre teorema di Krylov & Safonov, concernente la continuità hölderiana di soluzioni di equazioni ellittiche lineari; è la chiave di volta dei migliori teoremi attualmente sul mercato, dovuti a L. Caffarelli, L.C. Evans, N. Trudinger ed altri, concernenti l'esistenza e la regolarità di soluzioni di equazioni ellittiche completamente non lineari. D'altro lato, esso può essere dimostrato in modo sorprendentemente semplice ed enunciato con sobrie parole, comprensibili anche da un profano.

Sia E un operatore differenziale alle derivate parziali, lineare e del second'ordine, avente la forma *standard* seguente

$$E = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial^2/\partial x_i \partial x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial/\partial x_i + c\,;$$

sia G un sottoinsieme aperto e limitato dello spazio euclideo n-dimensionale. Facciamo in primo luogo due ipotesi abituali, pressoché indispensabili: (i) E è uniformemente ellittico – gli autovalori della matrice, che inquadra i coefficienti principali, sono maggiori di una costante positiva; (ii) il coefficiente di ordine zero è non-positivo. In secondo luogo supponiamo semplicemente: (iii) i coefficienti principali appartengano a $L^\infty(G)$, i restanti coefficienti appartengano a $L^n(G)$ – qui L^∞ e L^n indicano consueti spazi di Lebesgue. Asserzione: esiste una costante (dipendente soltanto dal diametro di G e dai due o tre parametri che controllano la ellitticità di E ed i coefficienti del prim'ordine) tale che

$$\text{massimo di } |u| \leq \text{ Costante} \times \left(\int_G |Eu|^n dx \right)^{1/n}$$

per ogni funzione *test* u, la quale sia sufficientemente regolare in G e si annulli con sufficiente regolarità sulla frontiera di G.

Il teorema implica in particolare che, se E, G, f e h sono assegnati, la eventuale soluzione del problema al contorno

$$Eu = f \text{ in } G, \quad u = h \text{ su } \partial G,$$

la quale appartenga a $W^{2,n}(G)$ e sia continua in $\bar{G}$, è unica e può essere maggiorata *a priori* sotto larghissime ipotesi sui dati – qui $W^{2,n}$ indica lo spazio di Sobolev *ad hoc*, ∂G e $\bar{G}$ indicano rispettivamente la frontiera e la chiusura di G.

La dimostrazione ideata da Pucci – un saggio della matematica che egli prediligeva: lessico e apparato ridotti all'osso, scena dominata da un'invenzione intelligente – merita di essere spiegata. Siano G e u come detto sopra e sia K l'insieme dei punti di G nei quali u è concava, cioè nei quali il piano tangente sta localmente sopra il grafico. Evidentemente K è una parte importante di G, perché u raggiunge il suo valore massimo in qualche punto in K e non altrove. Pucci considera con felice intuizione l'immagine di K mediante il gradiente di u e dimostra che la misura n-dimensionale di tale immagine maggiora la potenza n-esima del massimo di u. Questo – pura teoria geometrica delle funzioni – è il *clou* del ragionamento. Pucci dimostra d'altra parte che, per semplici motivi, la medesima misura può essere maggiorata mediante l'integrale, esteso a K, della potenza n-esima della parte principale di $(-Eu)$. I coefficienti principali e la ellitticità dell'operatore differenziale intervengono unicamente qui. Il resto del discorso serve per trattare i termini di ordine inferiore ed è *routine*.

Il teorema precedente corona un ciclo di ricerche, durante il quale Pucci colse altre volte nel segno. Importa ricordare ad esempio i lavori 44 e 45.

Pucci giudicò che una strategia, basata sopra l'*identikit* e una conseguente analisi del caso peggiore avverabile, consentisse di abbinare convenientemente equazioni differenziali ellittiche del second'ordine a coefficienti misurabili e maggiorazioni *a priori* di soluzioni. La strategia, da lui messa in opera, consiste *grosso modo* in: (i) esplorare un'ampia classe di equazioni, la quale sia definita da poche ipotesi essenziali e contenga le equazioni in esame; (ii) individuare nella medesima classe le equazioni più maligne – quelle le cui soluzioni verifichino le condizioni al contorno prestabilite e rendano massimo, oppure minimo, l'oggetto delle maggiorazioni elette. Uno fra i più significativi risultati, ottenuti in proposito da Pucci, può essere sintetizzato così.

Siano a, β, γ tre parametri – il primo costante e positivo, i restanti non-negativi. Sia $\mathcal{L}_{a,\beta,\gamma}$ la classe degli operatori differenziali uniformemente ellittici, che hanno la forma mostrata precedentemente e soddisfano queste condizioni:

(i) i coefficienti sono misurabili;
(ii) la ellitticità è quantificata da $a \leq$ autovalori di $[a_{ij}]$, $a_{11} + \ldots + a_{nn} = 1$;
(iii) i coefficienti del prim'ordine sono vincolati da $b_1^2 + \ldots + b_n^2 \leq \beta^2$;
(iv) il coefficiente di ordine zero è vincolato da $-\gamma \leq c \leq 0$.

(Evidentemente qualsiasi operatore differenziale lineare del second'ordine, il quale verifichi le ipotesi del teorema di Aleksandrov-Bakel'man-Pucci e sia opportunamente normalizzato, appartiene a qualcuna delle classi in considerazione.) Siano due operatori definiti dalle formule seguenti

$$m_{a,\beta,\gamma}(u) = \inf\{Eu : E \in \mathcal{L}_{a,\beta,\gamma}\} \qquad M_{a,\beta,\gamma}(u) = \sup\{Eu : E \in \mathcal{L}_{a,\beta,\gamma}\}$$

per ogni funzione u sufficientemente regolare. Prima asserzione: questi operatori – il primo concavo, il secondo convesso – possono essere rappresentati in forma esplicita mediante gli autovalori della matrice hessiana e la lunghezza del gradiente. Seconda asserzione: i due sono i peggiori operatori ellittici, relativamente alla classe considerata. In altre parole, sia E un qualsiasi elemento di $\mathcal{L}_{a,\beta,\gamma}$ – a parità di dominio, secondo membro e valori al contorno, la soluzione del problema menzionato precedentemente è la più bassa oppure la più alta a seconda che E sia rimpiazzato da $m_{a,\beta,\gamma}$ oppure da $M_{a,\beta,\gamma}$.

Resta in particolare stabilito questo fatto: la soluzione del medesimo problema è *ipso facto* maggiorata *a priori* se E appartiene a $\mathcal{L}_{a,\beta,\gamma}$ e le soluzioni dei due speciali problemi al contorno, nei quali $m_{a,\beta,\gamma}$ e $M_{a,\beta,\gamma}$ sostituiscono E a turno, sono adeguatamente maggiorate.

Gli operatori $m_{a,\beta,\gamma}$ e $M_{a,\beta,\gamma}$ hanno parecchie interessanti proprietà e permettono di toccare con mano vari interessanti obiettivi: singolarità rimovibili, sofisticate funzioni barriera, esempi e contro-esempi critici di varia natura. Essi furono da Pucci chiamati *estremanti* ed assomigliano come gocce d'acqua ad operatori introdotti da R. Bellmann nella teoria del controllo stocastico. Gli uni e gli altri sono ottimi esempi di operatori differenziali ellittici completamente non lineari, sono stati materia di studio da parte di noti matematici (quali L. Caffarelli, L.C. Evans, N. Trudinger) e sono spesso citati nella letteratura specializzata come operatori di Bellman-Pucci.

4. – Questo è un elenco delle pubblicazioni matematiche di Carlo Pucci.

[1] Un teorema di derivazione per serie con un'applicazione alle serie trigonometriche. *Boll. Unione Mat. Ital.* (3) **4** (1949), 270-274.

[2] Un teorema di derivazione per serie. *Boll. Unione Mat. Ital.* (3) **5** (1950), 20-23.

[3] Alcuni teoremi sulle successioni di funzioni di più variabili che possiedono derivate parziali fino all'ordine *r*. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **31** (1950), 129-141.

[4] Derivazione per serie di funzioni a variazione limitata. *Boll. Unione Mat. Ital.* (3) **5** (1950), 281-286.

[5] Serie di funzioni a variazione limitata. *Boll. Unione Mat. Ital.* (3) **6** (1951), 1-3.

[6] Sulla continuità dei funzionali analitici. *Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. Appl.* (5) **10** (1951), 290-296.

[7] Sulla maggiorazione dell'integrale di un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **10** (1951). 300-306.

[8] Formule di maggiorazione per un integrale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **33** (1952), 49-90.

[9] Alcune limitazioni per gli integrali delle equazioni differenziali alle derivate parziali, lineari, del second'ordine, di tipo ellittico parabolico. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **11** (1951), 334-339.

[10] Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **13** (1952), 18-23 e 111-116.

[11] Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **14** (1953), 198-202.

[12] Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **35** (1953), 129-153.

[13] Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo ad un'equazione a derivate parziali, lineare, del second'ordine. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **13** (1952), 360-366.

[14] Bounds for solutions of Laplace's equation satisfying mixed conditions. *J. Rational Mech. Anal.* **2** (1953), 229-302.

[15] Sulla compattezza di successioni di funzioni reali. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **14** (1953), 471-476.
[16] Maggiorazione degli integrali di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. *Atti del quarto Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Taormina, 1951),* vol. 2, pp. 197-199. Casa Editrice Perrella, Roma, 1953.
[17] Compattezza di successioni di funzioni e derivabilità delle funzioni limiti. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **36** (1954), 1-25.
[18] Studio col metodo delle differenze finite di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del second'ordine di tipo parabolico. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) **7** (1953), 205-215.
[19] Nuove ricerche sul problema di Cauchy. *Mem. Accademia Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (3) **1** (1953), 45-67.
[20] A proposito di un problema isoperimetrico. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **17** (1954), 345-346.
[21] Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave. *Atti Accademia Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat*. Sez. I (8) **4** (1955), 179-218.
[22] Sui problemi di Cauchy non ben posti. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **18** (1955), 473-477.
[23] Sulla risoluzione di un problema isoperimetrico. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **39** (1955), 393-400.
[24] Alcune proprietà degli involucri. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **20** (1956), 294-298.
[25] Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insieme convesso limitato dello spazio ordinario. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **21** (1956), 61-65.
[26] A proposito di un teorema riguardante la misura di involucri di insiemi. *Boll. Unione Mat. Ital.* (3) **12** (1957), 420-421.
[27] Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del second'ordine di tipo ellittico e parabolico. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **23** (1957), 370-375 e (8) **24** (1957), 3-6.
[28] (in collaborazione con A. Weinstein) Sull'equazione del calore con dati subarmonici e sue generalizzazioni. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **24** (1958), 493-496.
[29] Studio di un sistema di equazioni differenziali della dinamica dei gas. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **24** (1958), 653-657.
[30] Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave. *Atti Accademia Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **25** (1958), 31-32.
[31] Discussione del problema di Cauchy per le equazioni di tipo ellittico. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **46** (1958), 131-153.
[32] (in collaborazione con D. Fox) The Dirichlet problem for the wave equation. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **46** (1958), 155-182.

[33] Some topics in parabolic and elliptic equations. *Lecture Notes*, University of Maryland (1958).
[34] On the improperly posed Cauchy problems for parabolic equations. *1959 Rome Symposium on the numerical treatment of partial differential equations with real characteristics: Proceedings of the Symposium organized by the Provisional International Computation Center*, pp. 140-144.
[35] Alcune limitazioni per le soluzioni di equazioni paraboliche. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **48** (1959), 161-172.
[36] An integrodifferential equation. *1960 Rome Symposium on the numerical treatment of ordinary differential equations, integral and integro-differential equations: Proceedings of the Symposium organized by the Provisional International Computation Center*, pp. 608-612.
[37] Un problema variazionale per i coefficienti di equazioni differenziali di tipo ellittico. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) **16** (1962), 159-172.
[38] Limitazioni per il gradiente di una soluzione di un'equazione di tipo ellittico. *Matematiche (Catania)* **16** (1961), 51-54.
[39] Su un problema esterno per l'equazione delle onde. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **56** (1961), 69-78.
[40] Sulle funzioni barriera. *Matematiche (Catania)* **18** (1963), 102-107.
[41] Lectures on the Cauchy problem and on second order elliptic equations. *Lecture Notes*, Rice University, Texas (1963).
[42] Regolarità alla frontiera di soluzioni di equazioni ellittiche. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **65** (1964), 311-328.
[43] Sulla regolarità interna delle soluzioni di alcuni equazioni ellittiche. *Boll. Unione Mat. Ital.* **19** (1964), 334-342.
[44] Su le equazioni ellittiche estremanti. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **35** (1965), 12-20.
[45] Operatori ellittici estremanti. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **72** (1966), 141-170.
[46] Maximum and minimum first eigenvalue for a class of elliptic operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966), 788-795.
[47] Su una limitazione per soluzioni di equazioni ellittiche. *Boll. Unione Mat. Ital.* (3) **21** (1966), 228-233.
[48] Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **74** (1966), 15-30.
[49] Equazioni ellittiche con soluzioni in $W^{2,p}$, $p < 2$. *Atti del Convegno sulle equazioni alle derivate parziali, Bologna (1967)*, pp. 145-148. Edizioni Oderisi, Gubbio.
[50] Esistenza di autovalori per operatori ellittici non autoaggiunti. *Atti dell'ottavo Convegno U.M.I. (Trieste,1967)*, pp. 302-303. Zanichelli Editore, Bologna, 1968.
[51] Equazioni ellittiche. *Dispense dell'Istituto Matematico*, Università di Genova (1969).
[52] (in collaborazione con G. Talenti) Elliptic second-order partial differential

equations with measurable coefficients and approximating integral equations. *Advances in Math.* **19** (1976), no.1, 48-105.

[53] Operatori massimanti. *Seminari Ist. Naz. Alta Mat.* (1980), 169-176.

[54] Problemi non ben posti per l'equazione delle onde. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **52** (1982), 473-484.

[55] Una proprietà di massimo dell'ellisse. *Archimede* **34** (1982), 194-207.

[56] (in collaborazione con G. Papi Frosali) A not well posed problem for the wave equation. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **33** (1983), 285-304.

[57] Singolarità rimovibili per operatori ellittici. *Boll. Unione Mat. Ital.* (6) **4** (1985), 309-314.

[58] Abbasso o viva Euclide? *Archimede* **36** (1984), 170-173.

[59] Operatori ellittici estremanti, applicazioni e congetture (in russo). *Equazioni alle derivate parziali (Novosibirsk, 1983)*, pp. 167-172, Sibirsk. Otdel. Nauka, Novosibirsk (1986).

[60] An angle's maximum principle for the gradient of solutions of elliptic equations. *Boll. Unione Mat. Ital.* A (7) **1** (1987), 135-139.

[61] (in collaborazione con M. Longinetti) Introduzione alle funzioni ed agli insiemi convessi. *Quaderno*, Istituto di Analisi Globale ed Applicazioni, Firenze (1986), pp. 76.

[62] L'Unione Matematica Italiana dal 1922 al 1944: documenti e riflessioni. *Symposia Mathematica* **27** (1986), 187-212.

[63] A maximum principle related to level surfaces of solutions of parabolic equations. *J. Austral. Math. Soc.* Ser. A **46** (1989), 1-7.

[64] (in collaborazione con P. Manselli) Maximum principles related to the second derivatives of solutions of elliptic equations in the plane. *Applicable Anal.* **32** (1989), 143-164.

[65] (in collaborazione con P. Manselli) Maximum length of steepest descent curves for quasi-convex functions. *Geom. Dedicata* **38** (1991), 211-227.

[66] (in collaborazione con P. Manselli) Risultati di unicità per curve evolute ed evolventi di sé stesse. *Boll. Unione Mat. Ital.* **A 5** (1991), 373-379.

[67] (in collaborazione con P. Manselli) Limitazioni inferiori ottimali in L_q per le funzioni di Green relative a problemi di Dirichlet ellittici. *Nonlinear analysis (a tribute in honor of Giovanni Prodi), Quaderni della Scuola Normale Superiore di Pisa* (1991), 231-241.

[68] (in collaborazione con P. Manselli) Principio di massimo per il rapporto di Hölder di soluzioni di equazioni ellittiche. *Boundary Value Problems for partial differential equations and applications, RMA Res. Notes Appl. Math.* **29** (1993), 211-222., Masson, Paris.

[69] (in collaborazione con G. Bianchi e A. Colesanti) On the second differentiability of convex surfaces. *Geom. Dedicata* **60** (1996), 39-48.

[70] (in collaborazione con A. Colesanti) Qualitative and quantitative results for sets of singular points of convex bodies. *Forum Math.* **9** (1997), 103-125.

[71] Alcune riflessioni sull'organizzazione dell'insegnamento e della ricerca matematica. *Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, Supplemento al vol. 46 (1998), ixxx-xxxiv.
[72] 40 anni fa una svolta nell'organizzazione della ricerca matematica italiana. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. A Mat. Soc. Cult.* (8) (2000), 1-9.

Giorgio Talenti, Dipartimento Matematico *U. Dini*
Università degli Studi di Firenze
e-mail: talenti@math.unifi.it