
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

RICCARDO ROSSO

Sui contributi della scuola italiana alla meccanica celeste tra '800 e '900: Variazioni su un tema di KEPLER

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 8-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2005), n.2, p. 313–346.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_2_313_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_2_313_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui contributi della scuola italiana alla meccanica celeste tra '800 e '900: Variazioni su un tema di KEPLER.

RICCARDO ROSSO

1. – Introduzione.

L'ultimo ventennio del XIX secolo ed il primo del XX secolo furono attraversati da grandi novità nella ricerca in meccanica celeste classica, soprattutto per quanto riguarda il problema dei tre corpi che, da NEWTON in poi, era stato il cimento con cui si erano misurati molti tra i migliori matematici. Le novità più rilevanti vennero dall'opera di Henri POINCARÉ che con i nuovi metodi introdotti per affrontare il problema fondò, si può ben dire, la moderna teoria dei sistemi dinamici. In questo contesto, dove i migliori ingegni dedicano le proprie forze all'assalto del formidabile problema dei tre corpi, può sorprendere che ci si attardi ancora a studiare *solo* il problema di KEPLER dei due corpi, la cui soluzione analitica era nota da più di due secoli. In realtà, le *varianti* sul tema di KEPLER che analizzeremo nel seguito, lungi dall'essere esercizi accademici, si innestavano su problematiche o polemiche di importanza non secondaria per la scienza dell'epoca. D'altra parte, passato un altro secolo, il problema di KEPLER continua ad essere sorgente di spunti profondi per la ricerca ed offre possibilità di generalizzazioni di grande rilievo matematico. Basti ricordare, ad esempio, il lavoro di MOSER [Mos70] che ha messo in relazione il problema di KEPLER con i flussi geodetici su varietà a curvatura costante. Scorrendo poi la bibliografia di testi di meccanica celeste come [D92] si incontrano citazioni di studi recenti sul problema di KEPLER di grande interesse scientifico.

In questo lavoro passerò in rassegna, con riferimento al periodo menzionato in apertura, i lavori principali della scuola italiana dedicati

al problema di KEPLER e a sue varianti: dallo studio dell'equazione di KEPLER al problema di BERTRAND; dal problema di KEPLER con masse variabili al problema dell'origine delle comete. Il seguito dell'introduzione è dedicato ad una panoramica dei temi trattati.

La ricerca di metodi approssimati od analitici per la soluzione dell'equazione di KEPLER, che consente di trovare la posizione di un punto materiale che descrive un'orbita ellittica nel problema dei due corpi, è essenziale per ottenere informazioni sull'evoluzione temporale del sistema. Già nel 1900 si contavano più di 120 articoli scientifici dedicati all'argomento (*cfr.* p. 190 di [Mou14]). In quest'ambito dedicheremo la Sezione 2 all'esame di un lavoro in cui Tullio LEVI-CIVITA (1873-1941) propose un metodo di inversione dell'equazione di KEPLER di profondità concettuale pari alla semplicità degli strumenti matematici impiegati.

A metà dell'Ottocento l'affidabilità della legge newtoniana di gravitazione aveva avuto già molte conferme nello studio del sistema solare, in particolare con la previsione del passaggio della cometa di HALLEY nel 1759, dovuta a CLAIRAUT. Lo studio delle stelle doppie, scoperte da Friedrich Wilhelm HERSCHEL nella seconda metà nel Settecento⁽¹⁾, forniva un ulteriore banco di prova per le pretese universali della legge newtoniana. Esaminato il moto delle stelle doppie attorno al comune centro di massa ed associata la natura ellittica delle orbite relative, appariva naturale ricercare leggi di gravitazione, diverse da quella newtoniana, che ammettessero delle coniche come orbite. L'esito sostanzialmente negativo di questa ricerca, che è alla base del problema di BERTRAND, consentiva di riporre una rinnovata fiducia nel valore generale della legge di NEWTON. Il contributo in questo campo degli studiosi italiani che, come Giuseppe BATTAGLINI, non sempre erano specialisti di meccanica celeste, si concretizzò in alcune generalizzazioni del problema di BERTRAND che analizzeremo nella Sezione 3.

Nel problema di KEPLER classico si considerano interazioni tra corpi con masse costanti. Il caso di corpi con masse variabili trovò

(¹) HERSCHEL pubblicò due cataloghi di stelle doppie, nel 1782 e nel 1785.

applicazioni in astronomia a partire dalla seconda metà dell'Ottocento quando DUFOUR se ne servì per tentare di spiegare l'accelerazione secolare della Luna, anomalia del moto lunare oggetto in quegli anni di grandi polemiche che coinvolsero i maggiori astronomi dell'epoca. Giuseppe ARMELLINI (1887-1958) fu lo studioso italiano che dedicò più energie al problema e che ottenne risultati apprezzabili per le tecniche analitiche usate. I contributi di ARMELLINI esposti nella Sezione 4 vanno legati ai commenti di LEVI-CIVITA sull'argomento, che posero una questione concettuale di fondo, cioè a dire quale dovesse essere la corretta formulazione della seconda legge del moto di NEWTON per punti materiali di massa variabile. Le note Lincee di LEVI-CIVITA suscitavano un vivace dibattito che vide intervenire anche Enrico ALMANZI ed Enrico FERMI.

Infine, nella Sezione 5 considereremo, come ultima *variante*, il problema dell'origine delle comete, un altro tema fonte di grandi contrasti. In sostanza si vuole appurare, attraverso l'analisi delle orbite, se le comete hanno avuto origine nel sistema solare o se, formatesi all'esterno del sistema solare, siano state catturate in un secondo momento per effetto dell'azione gravitazionale del Sole e dei pianeti maggiori. I lavori considerati contengono critiche mosse da Pietro BURGATTI (1868-1938) ed ancora da Giuseppe ARMELLINI ad ipotesi che ritenevano di poter escludere l'origine interstellare delle comete in virtù della mancata osservazione di orbite cometarie iperboliche, una volta depurate dalla azione perturbatrice dei pianeti. I due studiosi furono pronti anche ad occuparsi dell'interpretazione di un'osservazione di PICKERING ed EDDINGTON secondo cui gli afeli cometari tenderebbero ad addensarsi nei pressi dell'antiapice solare⁽²⁾. BURGATTI propose un semplice modello meccanico che potesse rendere conto dell'osservazione e che poggiava sul problema dei due centri fissi. ARMELLINI mosse critiche serrate all'interpretazione fatta da PICKERING che attribuiva la concentrazione degli afeli alla resistenza del mezzo interstellare.

(²) L'apice solare è il punto della sfera celeste verso cui il sistema solare si muove rispetto alle stelle fisse. L'antiapice solare è il punto diametralmente opposto all'apice.

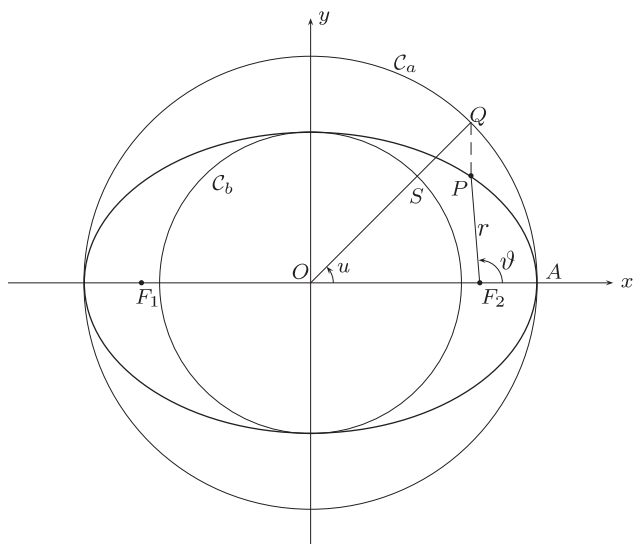
Non tratterò in questa rassegna gli importanti contributi alla meccanica relativistica, sia perché ciò avrebbe dilatato troppo la rassegna, sia perché sono già stati oggetto di dettagliate ricerche storiche. L'esame dei lavori della scuola italiana collegati al problema dei tre corpi sarà invece oggetto di un altro lavoro [R05].

2. – L'equazione di KEPLER.

Analizzeremo in questa sezione una nota di LEVI-CIVITA dedicata all'inversione dell'equazione di KEPLER. Come premessa, è opportuno descrivere brevemente il ruolo di questa equazione in meccanica celeste. Lo studio del moto di due punti materiali che si attraggono con una forza dipendente solamente dalla mutua distanza presenta le stesse difficoltà dello studio del moto di un singolo punto materiale in un campo di forze centrali. L'orbita del punto nel caso di forze newtoniane, inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal centro di attrazione, si può determinare in modo elementare⁽³⁾ grazie ad un integrale primo: il vettore di LAPLACE-RUNGE-LENZ o di HERMANN-BERNOULLI-LAPLACE, secondo la nomenclatura proposta da Herbert GOLDSTEIN che ha tracciato la tormentata storia della paternità di questo integrale primo nelle due note [G75] e [G76].

Per ricavare la posizione del punto materiale al variare del tempo, è comodo servirsi della parametrizzazione dell'orbita in termini della *anomalia eccentrica* u . Restringiamo l'attenzione alle orbite ellittiche che sono le più interessanti per lo studio dei moti planetari. Considerata un'ellisse di semiasse maggiore a , eccentricità $e \in [0, 1[$, fuochi in F_1 ed F_2 e centro O , siano C_a e C_b due circonferenze di centro O e raggio pari, rispettivamente, al semiasse maggiore ed a quello minore $b := a\sqrt{1 - e^2}$ dell'ellisse (cfr. Figura 1). Preso un punto P sull'ellisse, sia Q l'intersezione nel primo quadrante tra C_a e la verticale per P . Detta S l'intersezione di OQ con C_b , abbiamo $x_Q = x_P = a \cos u$ ed $y_S = b \sin u$ che coincide con y_P , come si vede inserendo le coordi-

⁽³⁾ Il lettore interessato a questa deduzione può riferirsi al testo di POLLARD (pp. 5-7 di [Pol66]), o a quello di BOCCALETTI e PUCACCO (pp. 131-136 di [BP96]).

Fig. 1. – Definizione dell'anomalia eccentrica u .

nate $x = a \cos u$, $y = b \sin u$ nell'equazione dell'ellisse in forma canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Grazie a questa costruzione e ricordando che $OF_2 = OF_1 = ae$, è possibile dimostrare che

$$(1) \quad r = a(1 - e \cos u),$$

dove r è il raggio vettore di P rispetto al fuoco F_2 . Poiché il raggio vettore PF_2 descrive aree uguali in tempi uguali (prima legge di KEPLER), con considerazioni geometriche è possibile mostrare che (cfr. e.g. pp. 13-15 di [Pol66])

$$(2) \quad \ell := n(t - T) = u - e \sin u,$$

dove t è il tempo, T è l'istante di passaggio per il pericentro A ed n è una costante – detta *moto medio* – che rappresenta la velocità angolare di un ipotetico moto uniforme, di periodo pari a quello del moto reale; infine, la quantità ℓ è detta *anomalia media*. La (2) è l'equazione di KEPLER che, con (1), fornisce la parametrizzazione della traiettoria di P in termini dell'anomalia eccentrica u . Invertire l'equazione di KEPLER significa ricavare u – e dunque r – in funzione del tempo. La funzione $u = u(e, \ell)$

definita implicitamente da (2) può essere invertita in due modi differenti: fissata l'eccentricità $e < 1$ si ottiene $u = u_e(\ell)$ come serie di FOURIER in ℓ , con coefficienti dipendenti da e . In alternativa, fissata ℓ si sviluppa $u = u_\ell(e)$ in serie di potenze di e con coefficienti dipendenti da ℓ . Entrambi i metodi furono introdotti da LAGRANGE nel 1771 in [Lag71] dove si trova la prima applicazione in astronomia delle funzioni di BESSEL, già utilizzate da tempo in fisica matematica ad opera, oltre che di LAGRANGE, di POISSON, EULER e FOURIER [Dut95]. Una prima stima del raggio di convergenza della rappresentazione di u fu fornita da LAPLACE [Lap78], con procedimento non rigoroso. In effetti, la determinazione rigorosa del raggio di convergenza della rappresentazione di u rappresentò una motivazione importante per lo studio della teoria delle funzioni analitiche, sviluppata soprattutto da CAUCHY. La rappresentazione di LAGRANGE per u è

$$(3) \quad u = \ell + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{d\ell^{n-1}} (\sin^n \ell) \frac{e^n}{n!}$$

e solo nel 1862 ROUCHÉ trovò il limite inferiore $e_1 = 0.6627$ per il raggio di convergenza della serie⁽⁴⁾, al variare di ℓ sull'asse reale: per una dimostrazione, si può consultare il capitolo 16 di [Tiss89]. Per ottenere questo valore occorre attribuire valori complessi all'eccentricità, come è spesso necessario fare per determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Nel 1904 LEVI-CIVITA fece pervenire all'Accademia dei Lincei la nota [LC04] –presentata da Vito VOLTERRA– dove osservava che la funzione $u(e, \ell)$ definita implicitamente da (2) era regolare rispetto ad e in una regione Γ del piano complesso dell'eccentricità contenente non solo il cerchio di convergenza della serie di LAGRANGE $|e| = e_1$ ma anche l'intervallo reale $[0, 1]$ (Figura 2). La tecnica usata è elementare e merita di essere conosciuta soprattutto perché i risultati ottenuti completano bene le ricerche precedenti. Tutto si riduce in sostanza ad applicare il teorema della funzione implicita per trovare il ramo regolare della funzione u definita da (2) in un intorno dell'origine del

⁽⁴⁾ Il valore fornito da LAPLACE a p. 479 di [Lap78] è $e = 0.66195$.

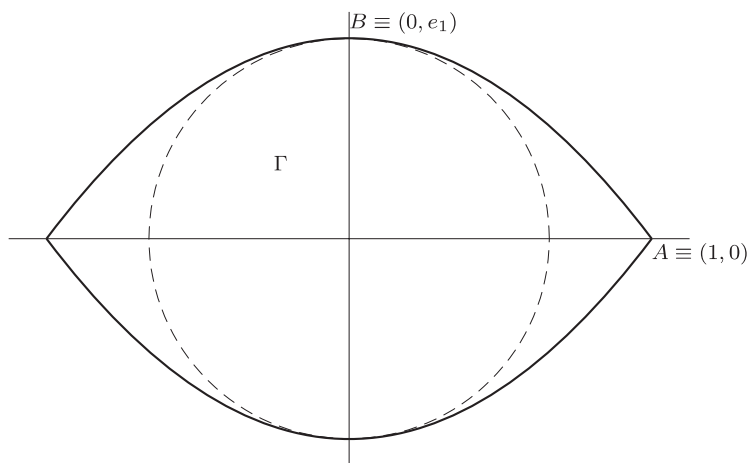


Fig. 2. – Regione Γ del piano complesso dell'eccentricità in cui la funzione $u(e, \ell)$ è regolare rispetto ad e . La circonferenza tratteggiata delimita il cerchio di convergenza della serie (3).

piano complesso dell'eccentricità. Infatti, la regolarità di u cessa quando, oltre a (2), è verificata l'equazione

$$(4) \quad 1 - e \cos u = 0$$

ottenuta derivando (2) rispetto ad u . Risolvendo il sistema composto da (2) e (4), LEVI-CIVITA dimostrò che la regione Γ è simmetrica rispetto agli assi coordinati e limitata, nel primo quadrante, da un arco di curva analitica che interseca l'asse delle ascisse in $A \equiv (1, 0)$ e quello delle ordinate in $B \equiv (0, e_1)$. Trovata Γ , LEVI-CIVITA proseguì secondo queste linee

«La funzione u di e (ritenuto ℓ comunque variabile nel campo reale) è regolare entro Γ , e non oltre. Secondo i principî della teoria delle funzioni, la naturale espressione analitica di u in Γ è quella di una serie di potenze del parametro $\eta(e)$, che realizza la rappresentazione conforme di Γ sopra un cerchio di raggio 1. Nel caso presente la determinazione di η è pressoché immediata.» (p. 329 di [LC04])⁽⁵⁾

⁽⁵⁾ Ad eccezione di [LC30], le pagine delle citazioni da lavori di LEVI-CIVITA si riferiscono ai volumi delle *Opere Matematiche*.

Per conseguire l'obiettivo, LEVI-CIVITA mostrò che sul contorno di Γ la funzione

$$\eta(e) := \frac{e \exp(\sqrt{1-e^2})}{1 + \sqrt{1-e^2}}$$

ha modulo unitario. Tagliato il piano complesso dell'eccentricità e lungo gli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, scelta per $\sqrt{1-e^2}$ la determinazione che si riduce all'unità quando $e = 0$, la funzione $\eta(e)$ rappresenta, nel piano complesso così tagliato, un ramo uniforme di funzione regolare, di modulo unitario sul contorno di Γ , la cui derivata non si annulla mai in Γ : $\eta(e)$ realizza dunque la trasformazione conforme ricercata. Come osservato nell'introduzione di [LC04], poiché η cresce al variare di $e \in (0, 1)$ ed $\eta(0) = 0$,

«Gli sviluppi precedenti per potenze di η presentano perciò, oltre al vantaggio della incondizionata validità per qualsiasi orbita ellittica, la stessa convenienza numerica degli sviluppi abituali, precedenti per potenze di e .» (p. 329 di [LC04])

LEVI-CIVITA condivide la paternità di questo contributo con CHARLIER [Ch04] ed entrambi gli autori vengono citati da WINTNER (cfr. p. 424 di [Win41]), mentre manca ogni riferimento all'articolo di LEVI-CIVITA nella pur monumentale opera di HAGIHARA [Ha70].

3. – Problemi inversi.

Lo studio del moto di un punto P in un campo di forze centrali può essere affrontato da due versanti complementari. Assegnato il campo di forze, caratterizzare le possibili orbite di P o, viceversa, determinare i campi centrali compatibili con un assegnato tipo di orbite. Attualmente il primo problema è noto come problema *diretto* ed il secondo come problema *inverso*, ma la nomenclatura è mutata nel tempo. Per le forze dipendenti dall'inverso del quadrato della distanza, NEWTON certamente mostrò nei *Principia* che, se P si muove lungo una conica sotto l'azione di una forza diretta verso un fuoco F , allora la forza ha modulo inversamente proporzionale al quadrato della distanza di P da F . Se egli abbia risolto anche il problema diretto è questione ancora dibattuta: WEINSTOCK, ad esempio, ha negato questa con-

clusione con argomentazioni vigorose e suadenti [Wei00]. La soluzione del problema diretto data da POURCIAU [Pou97] con costruzioni geometriche – per nulla banali – di tipo newtoniano e la reticenza di NEWTON sull'argomento alimentano il sospetto che questi abbia in effetti intuito la soluzione del problema, senza però offrirne una prova. Senza addentrarci nella affascinante questione, rinviando i lettori interessati agli articoli [Pou97] e [Wei00] ed alla letteratura specialistica ivi citata e procediamo nell'esame di alcuni lavori di studiosi italiani su un problema collegato, il problema di BERTRAND.

«Nel fascicolo dei *Comptes Rendus* del 9 aprile dell'anno 1877 il signor BERTRAND [Ber77] propose la questione: *Conoscendo che i pianeti descrivono delle sezioni coniche, e non supponendo altro, trovare l'espressione delle componenti della forza che li sollecita, in funzione delle coordinate del suo punto d'applicazione.*» (p. 43 di [Bat79])

La questione non era solo di interesse accademico ma riguardava il delicato problema della portata *universale* della legge di gravitazione newtoniana.

«Che le stelle doppie obbediscano nei loro movimenti relativi ad una legge di attrazione, non dissimile da quella che governa il nostro sistema solare, è stato sospettato da alcuni filosofi e geometri del secolo scorso, ancor prima che le misure di HERSCHEL e STRUVE offrissero una base concreta alle speculazioni teoriche intorno a siffatti sistemi. (...) Parve a tutti coloro che proposero metodi per il calcolo delle orbite di stelle doppie essere la legge newtoniana più probabilmente applicabile anche a questi sistemi stellari; e non si credette neppure necessario di cercare per tale gratuita ammissione altra conferma che quella, spesso poco sicura, dell'accordo fra le posizioni osservate e le calcolate. Benché Augusto COMTE e VILLARCEAU abbiano mostrato che tale procedimento non era rigoroso, pure non fu che nel 1878 che la questione fu posta nei suoi veri termini dal signor BERTRAND.» (pp. 51-52 di [Por91])

La soluzione del problema non si fece attendere molto, visto che nello stesso volume dei *Comptes Rendus*, DARBOUX e HALPHEN [Hal77] fornirono, con metodi diversi, la risposta cercata. Supponendo che la forza dipendesse unicamente dalla posizione di P .

«I due geometri francesi, e dopo di loro in altro modo l'astronomo giapponese signor S. HIRAYAMA [Hi89] hanno mostrato che, se un punto materiale attratto da un centro fisso descrive una conica, qualunque sia il valore delle condizioni iniziali e delle componenti della velocità, la legge di attrazione è rappresentata da una delle due funzioni:

$$R_1 = mh^{3/2} \frac{r}{(fx + gy + h)^3},$$

$$R_2 = m \frac{r}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{3/2}}.$$

Se si vuole, come è naturale, ammettere che R dipenda dal solo raggio vettore del punto attratto, e non dall'angolo $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, che questo raggio fa con una sua direzione particolare, si è ridotti ai due notissimi tipi

$$R_1 = m\mu r,$$

$$R_2 = m \frac{\mu}{r^2},$$

il primo dei quali rappresenta un'attrazione proporzionale alla distanza del mobile dal centro di forza, il secondo un'attrazione newtoniana.» (pp. 52-53 di [Por91])

Nelle formule precedenti (x, y) sono le coordinate di P , r la sua distanza dal centro di attrazione, mentre tutte le altre quantità sono dei parametri. La mancanza di rigore lamentata da Francesco PORRO (1861-1937) in [Por91] trovava pertanto una risposta adeguata

«Dato adunque dalle osservazioni che il satellite descriva un'orbita ellittica, osservando la legge delle aree, intorno all'astro principale, si conclude che la legge di NEWTON è la sola compatibile coll'ipotesi di un'attrazione che dipenda dalla sola distanza e non diventi infinita con questa.» (p. 53 di [Por91])

Il problema di BERTRAND e le soluzioni trovate lasciavano però ancora spazio ad ulteriori ricerche che meritano di essere ricordate in questa sede. Giuseppe BATTAGLINI (1826-1894) caratterizzò il

moto di un punto P su di una conica S in un modo un po' diverso, mostrando che la forza F agente su P poteva essere sempre vista come la somma di due forze F' ed F'' , con F' diretta verso un punto fisso O *arbitrario* ed F'' diretta lungo la retta a , tangente alla conica in P . Inoltre, F' è proporzionale al raggio vettore condotto da O a P , all'inverso del cubo della distanza di P dalla retta polare ⁽⁶⁾ $\mathcal{R}$ di O rispetto ad S e ad una funzione g del parametro θ che determina la posizione di P su S . D'altra parte, F'' è proporzionale all'inverso della distanza di O dalla retta a , all'inverso del quadrato della distanza di P da $\mathcal{R}$ e ad un'altra funzione di θ , legata alla g . Se la forza F agente su P passa sempre per O , allora $F'' = 0$ e BATTAGLINI ritrova i risultati di BERTRAND ed HALPHEN nei casi particolari in cui O è il centro di S oppure uno dei fuochi.

Il problema successivo da affrontare era a questo punto naturale

«Conoscendo la traiettoria di un punto mobile trovare le componenti della forza che lo sollecita in funzione delle coordinate del mobile.» (p. 272 di [D80])

In [D80] Ugo DAINELLI (1849-1906), oltre a riprodurre i risultati di BATTAGLINI per le coniche, ne ottenne di nuovi. Ad esempio,

- «Quando un punto materiale mobile percorre una traiettoria piana qualunque per effetto di una forza diretta ad un punto fisso qualunque nel piano della traiettoria, la forza è direttamente proporzionale alla distanza del mobile dal centro della forza ed inversamente proporzionale al raggio di curvatura ⁽⁷⁾ ed al cubo della distanza del centro della forza dalla tangente.» (p. 276 di [D80])

- Quando la forza ha *direzione* costante

«La forza varia in ragione inversa del raggio di curvatura e del cubo del seno dell'angolo fra la direzione della forza e la tangente alla curva.» (p. 281 di [D80])

- Se si rilassa l'ipotesi che la traiettoria sia piana, l'analisi diventa subito molto complicata ed il solo risultato concreto proposto da

⁽⁶⁾ Se $O \in S$ la retta polare di O rispetto ad S è la tangente in O ad S mentre per $O \notin S$ la polare è la retta che congiunge i punti di tangenza, eventualmente immaginari, delle due rette tangenti ad S , condotte da O .

⁽⁷⁾ della traiettoria, si intende.

DAINELLI è il seguente

«Quando un punto mobile percorre una traiettoria qualunque nello spazio per effetto di una forza parallela costantemente ad un piano fisso, questa è direttamente proporzionale al seno dell'angolo fra il piano osculatore e il piano fisso ed inversamente proporzionale al raggio di curvatura ed al cubo del coseno dell'angolo fra il piano normale e il piano fisso: la velocità è inversamente proporzionale a questo ultimo coseno.» (p. 299 di [D80])

I risultati tecnici di DAINELLI non passarono inosservati, come prova il fatto che Victor SZEHEBELY fa riferimento a [D80] nella bibliografia sui problemi inversi al Capitolo 10 della monografia [Sz67].

Infine, ricordiamo che nella memoria [Por91] già citata più volte, PORRO diede una ulteriore soluzione del problema di BERTRAND, supponendo dall'inizio che la forza fosse funzione della distanza del punto materiale dal centro di forza e semplificando un procedimento introdotto da GLAISHER [Gl78].

4. – Masse variabili.

Problemi dinamici per corpi di massa variabile furono affrontati ben prima che le esigenze dell'astronautica si facessero sentire.

«Il problema, di cui passiamo ad occuparci, è stato proposto da C. DUFOUR [D66] e T. OPPOLZER [O84], i quali hanno cercato di spiegare, almeno parzialmente, la differenza che esiste tra l'osservazione e la teoria dell'accelerazione secolare della Luna⁽⁸⁾, ammettendo che esi-

⁽⁸⁾ La longitudine media λ della Luna si esprime come $\lambda = \lambda_0 + n_0 t + \sigma \left(\frac{t}{100} \right)^2 +$ termini periodici, dove λ_0 , n_0 e σ sono costanti e t misura il tempo in anni giuliani. Il coefficiente σ , pari ad $11''$, è detto accelerazione secolare della Luna e venne studiato già da LAPLACE (cfr. pp. 382-384 di [D92]) che la imputò alla variazione dell'eccentricità dell'orbita terrestre. In questo modo egli riuscì però a rendere conto solo di un'accelerazione pari a metà di quella osservata. I tentativi di accordare teoria ed osservazioni sfociarono in una velenosa polemica che coinvolse i massimi astronomi del XIX secolo, PLANA, ADAMS, LE VERRIER, PONTÉCOULANT e DELAUNAY: per un resoconto della diatriba, si può consultare il lavoro di KUSHNER [K89]. Il lavoro di DUFOUR citato da ARMELLINI si colloca in coda alla polemica che portò ad esaminare varie ulteriori cause dell'accelerazione secolare.

ste un incremento della massa terrestre, dovuto alla caduta degli aereoliti.» (p. 75 di [Ar16a])

Alterazioni simili possono coinvolgere il sistema Terra-Sole, cui volse con preferenza l'attenzione Giuseppe ARMELLINI che dedicò all'argomento diversi lavori⁽⁹⁾. Il problema viene formulato in questi termini: si suppone che la somma delle masse $M(t)$ di due punti materiali A e B che si attraggono con legge newtoniana sia una funzione analitica, reale e positiva per tutti i valori reali del tempo t . Occorre risolvere il seguente problema

«Data la funzione $M(t)$ e conosciute le condizioni iniziali del movimento, determinare l'orbita relativa di uno dei due punti A rispetto all'altro B .» (p. 77 di [Ar16a])

ARMELLINI, seguendo altri studiosi che si erano già occupati della questione, scrisse le equazioni del moto di A rispetto a B nella forma

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + fM(t) \frac{x}{r^3} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + fM(t) \frac{y}{r^3} = 0, \end{cases}$$

dove (x, y) sono le coordinate di A rispetto a B nel piano in cui avviene il moto relativo, r la distanza tra A e B ed f la costante di attrazione. Il fatto che il moto relativo sia piano è conseguenza della conservazione del momento angolare che continua a sussistere per il sistema (5). Già a questo punto è bene fermarsi per precisare alcune questioni di principio. Le equazioni (5) sono state ottenute in completa analogia con il caso kepleriano classico, inserendo $M(t)$ al posto di una massa costante. Pertanto, il punto di partenza per dedurre (5) è l'equazione di NEWTON nella forma

$$(6) \quad \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

⁽⁹⁾ ARMELLINI ebbe anche una disputa accesa circa la priorità dei suoi contributi al problema dei due corpi con masse variabili. La nota lineea [Ar14a] contiene la sua piccata risposta ad un lavoro [TZ14] in cui TOMMASSETTI e ZARLATTI avevano ottenuto, talora in modo non rigoroso, alcuni risultati di ARMELLINI, senza citarlo.

che viene manipolata per mettere in evidenza il moto di A rispetto a B . Dunque, l'apparente semplicità di (5) cela delicate questioni di principio che esaminiamo sulla scorta di una nota di LEVI-CIVITA [LC28a], posteriore di oltre un decennio rispetto ai lavori di ARMELLINI. La precisazione di LEVI-CIVITA non ha carattere polemico, ch  anzi egli difese la liceit  dell'impostazione di ARMELLINI di cui, tra l'altro, aveva presentato le note lincee [Ar13, Ar14a] sull'argomento.

«Fu ripetutamente oggetto di studio il problema dei due corpi (Sole-Pianeta) nell'ipotesi di masse variabili, e in particolare crescenti, con t . Il punto di partenza di tali ricerche fu sempre la formula newtoniana (6) in cui soltanto si riguarda m non pi  come costante, ma come funzione assegnata di t .

Una tale impostazione   *a priori* perfettamente ragionevole, e suffragata *a posteriori* dal fatto che nel problema dei due (o pi ) corpi si pu  (per semplice sottrazione delle corrispondenti equazioni (6), divise pel rispettivo m , come nel caso delle masse costanti) fare intervenire esclusivamente il loro moto *relativo*.

Ci  nonostante io credo – e mi propongo di indicarne il perch  nella presente comunicazione – che l'applicazione conseguente dei principi della meccanica classica dia luogo, con ovvio passaggio al limite, non alla (6), bens  all'equazione

$$(7) \quad \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F},$$

che esprime il teorema della quantit  di moto e, notoriamente, resta valida sotto la stessa forma anche nella relativit  ristretta.» (pp. 595-596 di [LC28a])

I passi salienti per giustificare l'applicabilit  di (7) si possono riassumere schematicamente in questi termini:

- Si considera un corpo P (pianeta) la cui massa varia a causa di urti anelastici con uno sciame di corpuscoli Q (meteoriti).
- Si calcola la variazione di velocit  $\Delta\mathbf{v}$ subita da P per effetto di un urto, assumendo la massa del meteorite trascurabile rispetto a quella di P .
- Partendo da un istante t , si calcola la variazione di velocit  complessiva $\Delta'\mathbf{v}$ subita da P per effetto degli urti anelastici occorsi in un

intervallo Δt , sufficientemente piccolo da potere essere trattato come infinitesimo, ma d'altra parte abbastanza lungo da comprendere molti urti.

- Si ammette l'ipotesi di *isotropia statistica*: il baricentro dello sciame di corpuscoli Q ha velocità nulla rispetto ad un riferimento inerziale. Dette μ_i e $\mathbf{v}_i$ le masse e velocità dei meteoriti componenti il pulviscolo Q , questa ipotesi si traduce nel richiedere

$$(8) \quad \sum \mu_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

indipendentemente dalla velocità del pianeta.

- Si ammette l'ipotesi di *indipendenza degli effetti*: la variazione di velocità subita da P nell'intervallo Δt si ottiene sommando quella dovuta alle forze $\mathbf{F}$, in assenza di variazione di massa, con quella dovuta alla sola variazione di massa, in assenza di altre forze.

Seguendo questi passi, LEVI-CIVITA mostrò come (7) fosse l'equazione da adottare. La necessità di postulare l'indipendenza degli effetti fu discussa da Emilio ALMANZI (1869-1948) in una lettera inviata a LEVI-CIVITA e pubblicata come nota lincea [Al29]. Qui egli mostrò che si poteva giungere alla (7) semplicemente applicando il teorema della quantità di moto al sistema formato dal pianeta e dai corpuscoli che cadono su di esso nell'intervallo Δt .

LEVI-CIVITA aveva osservato in [LC28a] che l'equazione (6) vale se la velocità del baricentro di Q è nulla non già rispetto ad un riferimento inerziale, ma rispetto ad uno solidale a P , ipotesi che sembrava conciliarsi con l'emissione di corpuscoli da parte di P , più che con il loro assorbimento. Poco dopo, in [LC28b] LEVI-CIVITA mutò parere, convincendosi che l'equazione corretta fosse la (7) anche nel caso dell'emissione di corpuscoli. Tuttavia egli commise una «svista materiale» nei calcoli

«assumendo $\mu \mathbf{w}$ quale misura dell'impulso di un corpuscolo di massa μ emesso con velocità (assoluta) $\mathbf{w}$ da un corpo in moto con velocità (assoluta) $\mathbf{v}$. In realtà, siccome si tratta di emissione, si deve supporre che, immediatamente prima, il corpuscolo sia animato dalla stessa velocità $\mathbf{v}$ del corpo emittente, sicché l'impulso risentito non è $\mu \mathbf{w}$, ma $\mu(\mathbf{w} - \mathbf{v})$. Tenendo conto di ciò, anche col ragionamento di allora, si arriverebbe, ben si intende, alla (6).» (p. 627 di [LC30])

A parte la correzione della svista, la nota [LC30] è dedicata ai limiti di validità del postulato di isotropia statistica. Lo studio era stato motivato da una lettera [F29] diretta a LEVI-CIVITA in cui Enrico FERMI (1901-1954) rilevava la necessità di un esame dettagliato della distribuzione statistica delle velocità dei corpuscoli, prima di trarre conclusioni circa il loro valore medio $\bar{v}$. FERMI ipotizzò una distribuzione con densità $f(v)$ funzione del solo modulo v di $\mathbf{v}$ e suppose che la probabilità di un urto tra il meteorite ed il pianeta fosse proporzionale al modulo della velocità relativa. Infine, per simmetria, assunse $\bar{\mathbf{v}}$ parallelo alla velocità $\mathbf{V}$ del pianeta. Il calcolo di $\bar{v}$ venne indicato nelle linee generali per una distribuzione maxwelliana, ma fu svolto in dettaglio sotto l'ipotesi che tutti i meteoriti avessero velocità di ugual modulo. In tal caso l'equazione di moto da usare diventava

$$\frac{1}{\sqrt[3]{m}} \frac{d}{dt} \left(\sqrt[3]{m^4} \mathbf{v} \right) = \mathbf{F}.$$

A questo punto LEVI-CIVITA avvertì la necessità di esaminare in dettaglio i limiti di validità dell'equazione (8). Con argomenti di meccanica statistica e servendosi di una distribuzione maxwelliana per le velocità egli mostrò in [LC30] che (8) era accettabile quando era possibile trascurare il rapporto $\left(\frac{w^*}{V} \right)^2$, dove w^* indica la velocità quadratica media dei meteoriti.

Le conseguenze di (7) sul problema dei due corpi con masse variabili vennero esaminate in una nota [Vra28], ispirata da LEVI-CIVITA, in cui Gheorghe VRANCEANU mostrò come non fosse possibile garantire la planarità del moto, partendo da (7).

Rimane un punto da chiarire. Donde proviene la confusione tra gli approcci basati su (6) e (7)? In una nota a [LC28a] leggiamo

«In linea storica va rilevato che la considerazione esplicita di urti anelastici soddisfacenti alla (8) del testo [o, più precisamente, ad una condizione che, per il sistema planetario, è sensibilmente identica alla (8)], si trova già in una Nota dell'OPPOLZER, inserita nel n. 2375 ⁽¹⁰⁾ (vol.

⁽¹⁰⁾ Il numero corretto è il 2573, come riportato in [O84].

108, 1884) delle *Astronomische Nachrichten*. Pare tuttavia (per quanto si può giudicare dagli accenni sommari della Nota suddetta) che l'Autore faccia poi il calcolo delle perturbazioni movendo dalla (6), mentre, come si mostra nel presente scritto, esso dovrebbe essere imposto sulla (7).» (p. 598 di [LC28a])

Prescindendo da questa intrigante questione di principio, le memorie di ARMELLINI restano interessanti soprattutto per l'analisi elegante del problema, con cui riuscì ad estendere risultati già noti, così come ad ottenerne di nuovi. La memoria [Ar16a] riassume i risultati di ricerche già presentate in [Ar11] e [Ar13] e si concentra su tre aspetti del problema: studiare la natura della traiettoria di un corpo rispetto all'altro; trovare serie convergenti per tutti gli istanti di tempo grazie alle quali rappresentare l'integrale generale di (5); sviluppare un metodo approssimato di soluzione per stabilire la traiettoria con precisione sufficiente per le applicazioni astronomiche. Nella ricerca di proprietà generali della traiettoria relativa, ARMELLINI si avvale delle tecniche analitiche introdotte da Karl SUNDMAN nello studio del problema dei tre corpi (*cf.* [R05]) e distinse vari casi, a seconda della legge di crescita di $M(t)$. Ad esempio, per una funzione $M(t)$ crescente con $M(t) = o(t)$ per $t \rightarrow +\infty$, egli mostrò che era possibile scegliere condizioni iniziali tali da permettere l'allontanamento indefinito di A da B : se la massa solare seguisse una legge simile, alcuni pianeti potrebbero comunque sfuggire all'attrazione del Sole. Se l'unica informazione su $M(t)$ è che $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) = +\infty$, la sola alternativa alla fuga di A è che la distanza relativa r abbia 0 come limite inferiore. Infine, se $M(t)$ è monotona e se $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = +\infty$, allora la funzione $r(t)$ ammette al più un minimo, come nel caso di masse costanti.

La caratteristica qualitativa del moto che sta più a cuore ad ARMELLINI è la natura dell'orbita osculatrice, cioè di quella conica che il punto materiale seguirebbe se ad un istante t venissero meno tutte le perturbazioni della forza newtoniana. Tale interesse era motivato da un risultato di GYLDÉN [Gyl84] in base al quale, se la massa solare crescesse *linearmente* con il tempo, tutti i pianeti e le comete che ora hanno orbite osculatrici ellittiche o paraboliche finirebbero con il cadere sul Sole. Il teorema mostrato da ARMELLINI afferma che, se $M(t)$ è crescente e diverge all'infinito con ordine almeno uguale ad 1, r ha 0

come limite inferiore, *per tutte* le condizioni iniziali. Infine, l'ultimo teorema generale afferma che, se la crescita di $M(t)$ è di ordine inferiore al primo, l'orbita osculatrice può restare sempre iperbolica, per un'opportuna scelta delle condizioni iniziali. Con soddisfazione ARMELLINI osservava che

«Questo teorema ha grande importanza perché distrugge un errore in cui erano caduti alcuni astronomi. Si era infatti creduto, fondandosi sulla sola intuizione, che, facendo crescere all'infinito la somma delle masse $M(t)$ con legge qualsiasi, l'orbita osculatrice relativa avrebbe dovuto in fine cangiarsi in una ellisse. Noi abbiamo dimostrato che questa conclusione è erronea.» (p. 89 di [Ar16a])

ARMELLINI ottenne i risultati presentati in [Ar16a] per via analitica. Circa un decennio dopo, egli tornò in [Ar25] a studiare le proprietà delle orbite osculatrici nel problema con masse variabili, ricavando per via sintetica i risultati presentati in [Ar16a], grazie ad un teorema generale sul legame tra le orbite osculatrici del punto A rispetto a B , prima e dopo un incremento della massa di A . In concreto, egli mostrò che la conica osculatrice $\mathcal{E}'$ dopo l'urto è sempre interna a quella $\mathcal{E}$ precedente l'urto o, meglio, $\mathcal{E}'$ giace nella porzione di piano compresa tra $\mathcal{E}$ e B .

Nella seconda parte di [Ar16a] ARMELLINI ottenne una rappresentazione di r come serie uniformemente convergente per ogni valore del tempo, seguendo da vicino il lavoro di SUNDMAN [Su12] e supponendo

«che la massa solare aumenti col tempo, in modo però da non superare un certo limite finito e determinato. È questo l'unico caso che presenti un vero interesse per la meccanica celeste e per l'astronomia matematica.» (p. 89 di [Ar16a])

Nei problemi di interesse astronomico la massa $M(t)$ aumenta molto lentamente col tempo. Grazie a questa osservazione ARMELLINI introdusse un metodo per trovare soluzioni approssimate al problema.

«Noi supponiamo, in ultima analisi, che la Terra sia attratta dal Sole con una forza corrispondente non alla sua massa istantanea, ma bensì a quella che il Sole aveva il giorno avanti.» (p. 94 di [Ar16a])

Se t e τ sono due istanti di tempo corrispondenti allo stesso valore dell'anomalia del pianeta, invece di considerare $M(t)$, si considera $M(\tau)$

che diventa una funzione dell'anomalia, una volta risolta l'equazione di KEPLER per τ . Grazie a questo espediente, ARMELLINI riottenne per via più spiccia un risultato di LEHMANN-FILHÈS sulla variazione dei parametri dell'orbita terrestre che egli enunciava in questi termini

«se la pioggia di materia cosmica che cade sul Sole è assai leggiera e costante, l'orbita della Terra sarà, con grande approssimazione, una ellisse il cui parametro decresce linearmente col tempo, mentre la posizione dell'asse maggiore e le eccentricità restano invariabili.» (p.95 di [Ar16a])

Un problema di interesse matematico era l'integrazione esplicita delle equazioni (5). Prima di ARMELLINI i soli casi noti, dovuti a MESTSCHERSKY [Mest93, Mest02], coprivano le situazioni in cui $M(t)$ era del tipo

$$(9) \quad M(t) = \frac{1}{a + \beta t} \quad \text{o} \quad M(t) = \frac{1}{\sqrt{a + \beta t + \gamma t^2}},$$

con a , β e γ costanti. In [Ar12], ARMELLINI studiò l'integrabilità delle equazioni di moto per un punto materiale P soggetto ad una forza centrale F , di centro O . Poiché il moto è piano, le sole coordinate polari r e $\mathcal{J}$ riferite ad O bastano ad individuare la posizione di P . Il teorema mostrato da ARMELLINI si enuncia in questi termini

«L'equazioni differenziali del moto del punto P , sono sempre integrabili con sole quadrature, tutte le volte che la forza F ha la forma $F = \frac{\varphi(\mathcal{J})}{r^2(at + b)}$; dove φ è una funzione della sola $\mathcal{J}$, t è un tempo e a e b

sono costanti arbitrarie.» (p. 177 di [Ar12]) ARMELLINI dimostrò il teorema in due modi diversi, dapprima integrando direttamente le equazioni di LAGRANGE e poi utilizzando una trasformazione omografica introdotta da APPELL [App89] che permetteva, operando simultaneamente sulle coordinate dei punti materiali e sul tempo, di formulare un problema ausiliario dove le eventuali dipendenze delle forze dalla velocità dei punti materiali erano assenti. Il teorema di ARMELLINI consentiva di riottenere il caso (9)₁ quando φ è costante, così come un teorema di JACOBI [Jac42], quando $a = 0$.

Lo studio dell'integrabilità per equazioni di tipo (5) fu proseguito da Carla MADERNI, allieva di ARMELLINI, che in [Mad21] integrò il si-

stema con $M(t) = a + \beta t$ ed una forza di attrazione $F \propto r^{-5}$. Più in generale, LOVETT [L21] mostrò che, supponendo $M(t) = (a + \beta t)^n$ ed $F \propto r^k$, il problema era integrabile quando $k + 2n + 3 = 0$. Questo risultato venne ulteriormente esteso da ARMELLINI che in [Ar21] mostrò l'integrabilità dei casi in cui $k + n + 3 = 0$. Per la dimostrazione, indicato con $[k, n]$ il problema dove $M(t) = (a + \beta t)^n$ ed $F \propto r^k$, ARMELLINI dimostrò attraverso semplici manipolazioni formali che $[k, n]$ era integrabile se e solo se $[k, -(k + n + 3)]$ lo era. Grazie a questa osservazione ed alla struttura delle equazioni di moto, il risultato seguiva immediatamente.

Per concludere, ricordiamo ancora un lavoro di LEVI-CIVITA [LC28c] dove sono esposte alcune applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici, introdotti poco prima in fisica atomica da EHRENFEST. Tra queste, LEVI-CIVITA considerò il problema del moto kepleriano con masse variabili *lentamente* nel tempo, partendo dalle equazioni (5). Grazie alla nozione di invariante adiabatico egli potè mostrare che

«Se $M(t)$ cresce indefinitamente con legge lenta, ma qualsiasi, si avrà un urto; mentre, se $M(t)$ converge a zero, i due corpi andranno allontanandosi indefinitamente.» (p. 580 di [LC28c])

LEVI-CIVITA continua a ritenere deboli le (5) per questioni di principio, ma le studia per illustrare le potenzialità della nozione di invariante adiabatico che consente di semplificare l'analisi di ARMELLINI quando l'ipotesi di crescita lenta è soddisfatta.

5. – L'origine delle comete.

Nel secondo decennio del Novecento si riaccese il dibattito sull'origine delle comete, se cioè esse fossero corpi celesti appartenenti al sistema solare (teoria solare) o se provenissero dagli spazi interstellari. Per meglio inquadrare l'opera di ARMELLINI e BURGATTI che ci accingiamo ad esaminare, riassumiamo le tappe salienti del dibattito.

Sulla base delle idee di HERSCHEL, LAPLACE era convinto che le comete fossero

«piccolissime nebulose erranti negli spazi interstellari senza alcuna legge od armonia, le quali si presentano a noi lungo orbite allungatissime quando, cadendo per caso nel campo d'azione del Sole,

vengono attratte e obbligate a passare a traverso il sistema solare; dal quale poi possono uscire per ritornare negli spazi donde provennero, ma possono anche, per effetto delle azioni planetarie, rimanere catturate in perpetuo.» (p. 179 di [Bur15])⁽¹¹⁾

All'ipotesi di origine interstellare si contrapponeva una teoria *solare* introdotta da LAGRANGE secondo la quale le comete erano conseguenza di eruzioni vulcaniche occorse sui pianeti maggiori del sistema solare ovvero su loro satelliti. Posta in questi termini la teoria solare non ha oggi molti sostenitori, in quanto si scontra con l'enorme valore della velocità di eiezione che un ipotetico frammento lanciato da un pianeta dovrebbe avere per dar luogo ad una cometa: per Giove, ad esempio, tale velocità risulterebbe pari a 67 km/sec. Molto credito riscuote invece la teoria di OORT [Oo50] secondo la quale le comete a lungo periodo proverrebbero da una regione alle estreme propaggini del sistema solare, ad una distanza compresa tra 50000 e 200000 unità astronomiche dal Sole⁽¹²⁾. Da questa riserva, detta *nube* di OORT, alcune comete si addentrerebbero nelle regioni interne del sistema solare per effetto delle perturbazioni dei pianeti maggiori. Secondo OORT, la nube avrebbe avuto origine in seguito alla frantumazione di un pianeta orbitante tra Marte e Giove. Siamo di fronte quindi ad una diversa teoria solare dell'origine delle comete.

Tornando al periodo che ci interessa, LAPLACE aveva concluso – fondandosi su considerazioni statistiche – che le orbite osculatrici delle comete visibili dovevano essere quasi certamente delle ellissi molto schiacciate. A questa spiegazione si oppose Giovanni Virginio SCHIAPARELLI (1835-1910) che osservò come LAPLACE non avesse considerato il moto proprio del Sole. Dai calcoli di SCHIAPARELLI si traevano conclusioni opposte rispetto a LAPLACE: le comete visibili avevano grande probabilità di avere orbite iperboliche o al più paraboliche. Il disaccordo con i dati sperimentali spinse SCHIAPARELLI a proporre una diversa teoria secondo cui le comete erano

⁽¹¹⁾ Per le note di BURGATTI [Bur15] e [Bur22], le pagine delle citazioni si riferiscono al volume di *Memorie Scelte*.

⁽¹²⁾ Una unità astronomica è pari alla distanza media della Terra dal Sole, circa $1.5 \cdot 10^8$ km.



Fig. 3. – Fotografia della cometa HALE-BOPP scattata il 30 marzo 1997 (Cortesia di Fulvio BISI).

«corpi viaggianti nello spazio insieme al sistema solare, del quale occuperebbero gli estremi confini; di quando in quando alcune di esse penetrerebbero più internamente nel sistema solare, fino a scendere per attrazione verso il Sole lungo orbite quasi paraboliche.» (p. 180 di [Bur15])

La teoria di SCHIAPARELLI tramontò in seguito ad osservazioni e calcoli accurati ad opera, tra gli altri, di FABRY e STRÖMGREN che confermarono la natura ellittica delle orbite cometarie. A questo punto sorse una nuova ipotesi, sostenuta da FABRY e CROMMELIN [Cr10], basata su una semplice regola di selezione:

«soltanto orbite iperboliche o paraboliche sono possibili per comete provenienti dagli spazi interstellari.» (p. 181 di [Bur15])

Questo assunto fu però contestato da ARMELLINI [Ar14b]:

«[CROMMELIN] si domanda (...) come mai non sia stata sin qui osservata alcuna cometa nettamente iperbolica. Non potendo ammettere che tutti questi astri entrino nella sfera d'attrazione del Sole, con ve-

locità estremamente piccola, dichiara che questo fatto costituisce una prova innegabile dell'origine solare delle comete. Ora a me sembra che tale ragionamento abbia un punto debole: il CROMMELIN e il FABRY infatti non tengono conto della distanza perielia che deve risultare assai piccola perché la cometa sia osservabile.» (p. 304 di [Ar14b])

ARMELLINI, assumendo che la distanza perielia plausibile per una cometa visibile non potesse eccedere le due unità astronomiche, si propose di mostrare che la probabilità di osservare una cometa con orbita nettamente iperbolica era molto bassa anche supponendo che un gran numero di comete provenisse dall'esterno del sistema solare. Così egli poteva invalidare le conclusioni di CROMMELIN e FABRY, visto che la mancata osservazione di orbite cometarye iperboliche era compatibile con l'origine interstellare delle comete. Il calcolo di ARMELLINI, di natura probabilistica, poggiava sul seguente postulato

«Facendo astrazione dalle regioni prossime agli astri, le comete dello spazio si muovono con legge tale che tutte le direzioni risultano egualmente probabili. Ammetteremo ancora che *dentro certi limiti*, tutte le velocità siano equamente ripartite.» (p. 308 di [Ar14b])

ARMELLINI dimostrò che il rapporto tra il numero di comete che penetrano entro una sfera centrata nel Sole, di raggio pari a 2 unità astronomiche ed il numero di comete che entrano con velocità v in una sfera concentrica di raggio molto grande tende rapidamente a 0 non appena l'energia totale h della cometa supera il valore 0 e quindi l'orbita osculatrice diventa iperbolica. Con ciò ARMELLINI poteva affermare che

«Anche se molte comete pervenissero dall'esterno, la probabilità di scoprirne una con orbita fortemente iperbolica sarebbe pressoché nulla.» (p. 310 di [Ar14b])

L'argomento di ARMELLINI riprendeva quello di LAPLACE ed offriva il fianco alla stessa critica mossa da SCHIAPARELLI: considerando il moto proprio del Sole, le conclusioni potevano essere opposte. BURGATTI [Bur15] separò il problema in due parti analizzando la distribuzione dei *moduli* delle velocità cometarye e quella delle loro *direzioni*. Riguardo a queste ultime, egli mostrò che la probabilità di dar luogo ad orbite iperboliche era *trascurabile* rispetto a quella per le orbite ellittiche; quanto ai moduli, ammettendo una distribuzione

uniforme, alle orbite ellittiche spettava una probabilità inferiore ma *confrontabile* con quella delle comete iperboliche.

«È dunque vero che l'apparizione di comete tutte a orbite ellittiche non deve meravigliare fin che si resta nell'ambito del calcolo delle probabilità; ma c'è pur qualcosa che non appaga. Si desidererebbe capire se e come possa una cometa entrare nel campo solare in condizioni da descrivere poi un'orbita ellittica; giacché questa è un'ipotesi del tutto arbitraria, proveniente dalla nostra ignoranza sui rapporti tra le comete e l'universo.» (p. 185 di [Bur15])

BURGATTI si propose di studiare la questione da un punto di vista meccanico

«Si desidererebbe capire se e come possa una cometa entrare nel campo solare in condizioni da descrivere poi un'orbita ellittica. (...) Benché si parli di campo solare, si ragiona in sostanza come se non ci fosse che il Sole nell'universo. Non si tien conto del fatto evidentissimo che il campo d'azione solare confina necessariamente con quelli d'altre stelle; in modo che una cometa non può entrare in quello senza uscire da uno di questi, e viceversa. L'idea di comete vaganti a caso non si può accettare. (...) Per semplificare il problema e per tentare di chiarirlo almeno un poco, supponiamo che la cometa per un grandissimo intervallo di tempo risenta sensibilmente soltanto l'azione del Sole e un'altra stella S_1 .» (cfr. p. 185 di [Bur15]).

Trattando il Sole S ed S_1 come centri *fissi* di attrazione, BURGATTI osservò che le superficie equipotenziali di rivoluzione rispetto ad SS_1 soddisfacevano l'equazione

$$\frac{m}{r} + \frac{m_1}{r_1} = \lambda,$$

dove m ed m_1 sono le masse del Sole e di S_1 , r ed r_1 le distanze della cometa da questi due astri e λ una costante. Esiste una superficie separatrice, la cui sezione meridiana è una lemniscata, che distingue due tipi di moto cometario, a seconda del valore dell'energia. In un caso la cometa resta sempre più vicina ad uno dei due astri, nell'altro essa potrà migrare dai pressi di S a quelli di S_1 e viceversa. Così, dall'esame del segno dell'energia BURGATTI ricavava che

«non c'è contraddizione tra il fatto dimostrato che l'orbite cometarie

hanno carattere ellittico anche a grande distanza dal Sole e l'ipotesi della loro provenienza dai campi d'azione d'altre stelle.» (p. 187 di [Bur15])

L'analisi della geometria delle regioni accessibili alla cometa mostra che l'ingresso nel campo di azione solare dovrebbe avvenire attraverso una «strozzatura» compresa tra S ed S_1 , in virtù del profilo delle superficie equipotenziali. A questo proposito, in una nota aggiunta in bozza, BURGATTI osservava che

«Il Prof. PICKERING e il Prof. EDDINGTON poi, hanno fatto un primo studio sulla distribuzione nel cielo degli afelii delle orbite cometary meglio conosciute, e hanno trovato ch'essi si raggruppano di preferenza in certe due plaghe celesti. Le loro ricerche non hanno ancora un elevato grado di precisione; tuttavia esse danno valore a queste nostre considerazioni teoriche; le quali alla lor volta, possono incoraggiare a ricerche astronomiche più precise.» (p. 188 di [Bur15])⁽¹³⁾

Le semplici considerazioni meccaniche proposte da BURGATTI per spiegare, almeno qualitativamente, la concentrazione degli afelî cometari notata da PICKERING [Pick12] e precisata da EDDINGTON [E13] fornivano una spiegazione delle osservazioni alternativa rispetto a quella avanzata dallo stesso PICKERING secondo la quale concentrazione degli afelî era compatibile con l'azione di un mezzo resistente interstellare. Un affondo all'ipotesi di PICKERING fu portato da ARMELLINI che ne mostrò in [Ar16c]⁽¹⁴⁾ l'insostenibilità non solo per

⁽¹³⁾ Un altro merito di BURGATTI in questo contesto è l'aver indicato una possibile applicazione astronomica del problema dei due centri fissi che sino a quel momento aveva avuto un interesse soprattutto matematico, trattandosi di un problema integrabile: per dettagli si può consultare la memoria [Mor80] di Giacinto MORERA (1856-1909) che contiene, oltre ad una discussione dettagliata sullo *stato dell'arte*, un approccio alternativo alla soluzione di questioni già affrontate in questo ambito ed uno studio qualitativo delle orbite che venne poi ampliato da Carlo BONACINI (1869-1944) [Bon89]. A margine, ricordo che VOLTERRA [Vol99], CECCONI [C15] ed ARMELLINI [Ar16b] considerarono in momenti diversi il problema dell'attrazione da parte di più centri, fissi o mobili con legge assegnata. Questi lavori hanno più che altro un interesse analitico in quanto tutti si appoggiano sul teorema *della stella* di MITTAG-LEFFLER [ML84].

⁽¹⁴⁾ ARMELLINI pubblicò un sunto delle sue conclusioni in una lettera [Ar16d] apparsa su *The Observatory*, la stessa rivista che aveva ospitato pochi anni prima il lavoro di EDDINGTON.

difficoltà concettuali pure presenti, ma perché in contrasto con i risultati di un'analisi perturbativa

«Tenendo conto delle sole perturbazioni di primo ordine, gli afeli delle orbite cometarie periodiche tenderebbero ad addensarsi non già verso l'antiapice (come suppone il PICKERING) ma piuttosto lungo un cerchio massimo avente per poli l'apice e l'antiapice.» (p. 626 di [Ar16c])

BURGATTI continuò a studiare l'addensamento degli afeli delle comete in [Bur18] dove introdusse un nuovo punto di vista.

«Nell'ordinaria meccanica celeste, che studia il movimento dei corpi costituenti il sistema solare, si trascura senz'altro l'attrazione delle stelle, giudicandola insensibile a cagione della loro enorme distanza. A questo si può obiettare che il numero delle stelle è anche straordinariamente grande, oltre che moltissima materia oscura è sparsa dovunque nell'universo; per modo che il numero potrebbe, per così dire, compensare la piccolezza delle singole attrazioni e dare una risultante piccola sì, ma non del tutto trascurabile.» (p. 230 di [Bur18])

A sostegno dell'ipotesi BURGATTI riportava le osservazioni secondo cui il Sole descriveva nello spazio «una immensa orbita a spirale», (p. 180 di [Bur18]) incompatibile con l'assenza di forze esterne. L'azione di questa «materia cosmica» coinvolgeva anche i pianeti, senza però causare alterazioni rilevanti del loro moto rispetto al Sole, data l'esiguità delle distanze tra il Sole ed i pianeti. Al contrario, per BURGATTI la sensibilità delle comete a tale attrazione era tale da dare luogo ad effetti misurabili. Supponendo costante per lunghi tratti dell'orbita la forza agente sulla cometa, BURGATTI poté concludere dall'analisi dell'equazione del moto di una cometa rispetto al Sole che gli afeli delle orbite cometarie tendevano ad addensarsi lungo un piano particolare, risultato compatibile con le osservazioni, a patto di ipotizzare un'orbita circolare per il Sole.

Seguendo l'idea esposta da BURGATTI in [Bur18], in un ulteriore lavoro [Ar20] dedicato all'origine delle comete ARMELLINI volle rettificare un'ipotesi sulla genesi delle comete *paraboliche*:

«Si crede infatti che qualora l'orbita di un'eventuale cometa, corretta dalle perturbazioni planetarie, risultasse esattamente parabolica, essa dovrebbe essere considerata di sicura origine stellare.» (p. 183 di [Ar20])

ARMELLINI considerò la cometa soggetta a due forze, quella newtoniana dovuta all'attrazione del Sole e quella imputabile all'azione complessiva delle stelle più vicine al Sole. Assumendo che queste avessero una distribuzione a simmetria sferica, con centro in un punto O , la loro azione su un corpo celeste veniva ridotta ad una sola forza attrattiva diretta verso O , proporzionale alla distanza da O . Questa azione, che per coerenza era estesa anche al Sole, consentiva di ridurre lo studio del moto della cometa rispetto al Sole all'integrazione dell'equazione

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{fM}{r} + \lambda r,$$

dove f e λ sono costanti, M è la massa solare, pure costante, mentre r è la distanza della cometa dal Sole. Introducendo come unità di tempo l'anno sidereo e come unità di lunghezza la distanza media tra la Terra ed il Sole, la terza legge di KEPLER fornisce la relazione $Mf = 4\pi^2$. D'altra parte, trascurando gli effetti della cometa sul moto solare, il Sole è attratto da O con una forza proporzionale alla distanza da O e dunque descrive un'ellisse di *centro* O con periodo $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Detta q la distanza *pereliaca* della cometa ed imponendo che l'orbita osculatrice della cometa al perielio sia esattamente parabolica, la distanza *afeliaca* R della cometa è la sola radice positiva – diversa da q – dell'equazione per r

$$r^4 - (qr)^2 - 2rT^2 + 2qT^2 = 0.$$

ARMELLINI riportava come stima di R l'espressione $R = \propto T^{2/3}$ e da ciò concludeva che, esclusi casi particolari in cui la cometa era diretta verso le stelle più vicine al Sole⁽¹⁵⁾,

«affinché un'eventuale cometa esattamente parabolica sia di origine stellare, T deve essere uguale ad almeno cento o centocinquanta milioni di anni.» (p. 185 di [Ar20])

⁽¹⁵⁾ ARMELLINI cita: α Centauri, la stella di BARNARD, la 21185 LALANDE, Sirio, la 36 Ophiuci, la 61 Cygni e la 130 PIAZ.

Così, nel caso dell'apparizione di una cometa parabolica o debolmente iperbolica

«Potremo soltanto dire che, se tali comete appartengono al sistema solare, esse avranno un periodo estremamente lungo, misurabile in secoli piuttosto che in anni.» (pp. 185-186 di [Ar20])

Di qui la proposta di attribuire a tali (ipotetiche) comete la qualifica di *comete secolari*. L'aspetto del problema che ARMELLINI sottolineava era il legame inatteso tra l'origine delle comete secolari ed il moto del Sole nello spazio.

Infine, ricordiamo il lavoro [Bur22] in cui BURGATTI studiò l'azione delle stelle sui perielî di pianeti e comete. Seguendo l'impostazione di ARMELLINI contenuta in [Ar20] egli dimostrò che tale effetto è del tutto trascurabile. Curiosamente, quando l'eccentricità dell'orbita ellittica di una cometa è pari a $e = 0.907$, l'azione stellare sul perielio è nulla. Nell'attraversare questo valore critico si assiste ad un cambiamento del verso di spostamento del perielio. Più del risultato, è interessante notare la motivazione del lavoro

«Data la grande importanza che la teoria della relatività ha fatto acquistare al fenomeno dello spostamento dei perielî, vien naturale cercare tutte le cause che possono produrlo e di calcolare per ciascuna di esse l'ordine di grandezza che ne segue, allo scopo di raccogliere anche in questo campo tutti i dati possibili occorrenti per un esame obiettivo della maggiore o minore attendibilità della bella teoria Einsteniana.» (p. 225 di [Bur22])

Il dibattito sull'origine delle comete non si decise negli anni esaminati e, a ben vedere, neppure nella letteratura contemporanea tutti gli aspetti del problema hanno risposte unanimemente accettate. Se la nube di OORT è un'ipotesi di lavoro condivisa dai più, la sua origine solare è invece discussa; ad esempio, VALTONEN ed INNANEN [VI82] sostengono che un accumulo significativo di comete nella nube di OORT sia dovuto alla cattura di pulviscolo stellare da parte del sistema solare nel corso di un transito prolungato in una nube di scorie stellari. In questo modo sarebbe la stessa nube di OORT ad avere un'origine interstellare. È interessante che a sostegno dell'ipotesi gli autori pongano la concentrazione dei perielî cometari nella direzione dell'apice solare, come a dire che gli elementi del dibattito in cui furono coinvolti

ARMELLINI e BURGATTI sono ancora di attualità. Se c'è scetticismo sulla possibilità che studi statistici possano da soli risolvere il problema, diversi studiosi (*cf.* [W72], ad esempio) ritengono che lo studio della distribuzione dei semiassi maggiori delle orbite cometarie contenga in effetti informazioni cruciali per catturare gli aspetti qualitativi del moto delle stelle e per suffragare l'origine interstellare delle comete.

6. – Conclusioni.

L'immagine della scuola fisico-matematica italiana che emerge dall'esame dei lavori svolto sino a questo punto è quella di una scuola molto vivace, pronta sia a recepire gli stimoli della comunità scientifica internazionale sia ad elaborare contributi originali di pregio. La risonanza ottenuta è stata buona e non mancano citazioni dei lavori qui esaminati a distanza di molti anni dalla pubblicazione. Come ricordato nelle Sezioni 1 e 2 l'opera di LEVI-CIVITA sull'equazione di KEPLER ha avuto un adeguato riconoscimento e le generalizzazioni al problema di BERTRAND di BATTAGLINI e DAINELLI hanno ricevuto una certa attenzione. Lavori di rassegna sul problema dei due corpi a masse variabili ([Berk81], [Pol94]) citano, dopo più di mezzo secolo, gli studi di ARMELLINI sul comportamento qualitativo delle soluzioni ed anche le precisazioni di LEVI-CIVITA sono ricordate (*cf.*, *e.g.* [Ho74]); sono invece meno noti i lavori di ARMELLINI sull'integrazione esplicita delle equazioni (5). Similmente, non hanno avuto il rilievo meritato le precise critiche mosse da ARMELLINI agli argomenti addotti per giustificare ipotesi sull'origine delle comete. A rafforzare il giudizio positivo sulla scuola italiana concorrono certamente i molti lavori che, nello stesso periodo, furono dedicati al problema dei tre corpi e che costituiranno oggetto di un prossimo studio [R05].

Ringraziamenti. – Desidero ringraziare il Prof. Eugenio REGAZZINI per avere incoraggiato la stesura del lavoro, il Dott. Claudio GNOLI per aver sopportato le mie frequenti incursioni nel settore storico della biblioteca del Dipartimento. Esprimo viva riconoscenza al sig. Piero CIACCIA che si è sempre adoperato per procurare gli articoli non di-

sponibili nella biblioteca e al dott. Fulvio BISI che mi ha permesso di utilizzare alcune fotografie della cometa HALE-BOPP, scattate nel 1997.

BIBLIOGRAFIA

- [Al29] E., ALMANZI, *Sul moto di un corpo di massa variabile*, Rend. Acc. Lincei **9**₁, Serie VI (1929₁), 1055-1056.
- [App89] P. APPELL, *De l'homographie en mécanique*, Amer. J. Math. **12** (1889), 103-114.
- [Ar11] G. ARMELLINI, *Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili*, Rend. Acc. Lincei **20**₂, Serie V (1911₂), 682-687.
- [Ar12] G. ARMELLINI, *Sopra l'integrabilità dell'equazioni differenziali della meccanica*, Rend. Acc. Lincei **21**₂, Serie V (1912₂), 177-182.
- [Ar13] G. ARMELLINI, *Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili. Nota II*, Rend. Acc. Lincei **22**₁, Serie V (1913₁), 294-302.
- [Ar14a] G. ARMELLINI, *Sul problema dei due corpi nel caso di masse variabili*, Rend. Acc. Lincei **23**₁, Serie V (1914₁), 913-919.
- [Ar14b] G. ARMELLINI, *Esame analitico della teoria di Fabry e Crommelin sull'origine delle comete*, Rend. Acc. Lincei **23**₁, Serie V (1914₁), 230-233.
- [Ar16a] G. ARMELLINI, *Il problema dei due corpi di masse variabili*, Mem. Soc. It. Sci. detta dei XL **19**, Serie III (1916), 75-96.
- [Ar16b] G. ARMELLINI, *Sul moto di un punto attratto da più punti fissi*, Mem. Soc. It. Sci. detta dei XL **19**, Serie III (1916), 97-117.
- [Ar16c] G. ARMELLINI, *Sopra un'ipotesi del Pickering relativa alla frequenza degli afeli delle orbite cometarie nelle vicinanze dell'antiapice*, Rend. Acc. Lincei **25**₁, Serie V, (1916₁), 622-627.
- [Ar16d] G. ARMELLINI, *The aphelia of cometary orbits*, The Observatory **39**, (1916), 345-346.
- [Ar20] G. ARMELLINI, *Osservazioni sopra le comete secolari*, Rend. Acc. Lincei **29**₂, Serie V (1920₂), 183-186.
- [Ar21] G. ARMELLINI, *Sopra l'integrabilità del problema dei due corpi di masse variabili*, Rend. Acc. Lincei **31**₁, Serie V (1922₁), 170-173.
- [Ar25] G. ARMELLINI, *Un teorema sul problema dei due corpi di masse crescenti*, Rend. Acc. Lincei **6**₁, Serie VI (1925₁), 617-622.
- [Bat79] G. BATTAGLINI, *Sul movimento per una linea di secondo ordine*, Giorn. Matem. **17**, Serie I, (1879), 43-52.
- [Berk81] L.M. BERKOVIĆ, *Gylden-Meščerskii problem*, Cel. Mec. **24**, (1981), 407-429.
- [Ber77] BERTRAND, J., *Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction*, Comptes Rend. Acad. Sci. **84** (1877), 671-674.

- [BP96] G. BOCCALETTI - G. PUCACCO, *Theory of Orbits I. Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, Springer, Berlin (1996).
- [Bon89] C. BONACINI, *Sul moto di un punto attratto da due centri fissi secondo la legge di Newton*, Giorn. Matem. **27**, Serie I, (1889), 352-370; **28**, Serie I, (1890), 44-51.
- [Bur15] P. BURGATTI, *Osservazioni sull'origine delle comete*, Rend. Acc. Sc. Bologna, Serie VII, **2** (1914-1915), 3-10. In P. BURGATTI *Memorie Scelte*, Zanichelli, Bologna (1951), 180-188.
- [Bur18] P. BURGATTI, *Sul prevalente addensamento degli afeli delle orbite cometary intorno all'antiapice*, Rend. Acc. Lincei, Serie V, **27**₂ (1918₂), 230-233.
- [Bur22] P. BURGATTI, *Dell'azione delle stelle sui perielî dei pianeti e delle comete*, Mem. Acc. Sc. Ist. Bologna, Serie VII, **9** (1921-1922), 55-60. In P. BURGATTI *Memorie Scelte*, Zanichelli, Bologna (1951), 225-231.
- [C15] A. CECCONI, *Sul moto di un punto attratto da più centri mobili con legge nota*, Atti R. Ist. Ven. **74** (1914-1915), 2053-2069.
- [Ch04] C.V.L. CHARLIER, *On the singular curve of the elliptic motion*, Lunds Obs. Medd. **22** (1904).
- [Cr10] A.C.D. CROMMELIN, *The origin and nature of comets*, Riv. di Scienza **7** (1910), 241-252.
- [D80] U. DAINELLI, *Sul movimento per una linea qualunque*, Giorn. Matem. **18**, Serie I (1880), 271-300.
- [D92] J.M.A. DANBY, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Second Edition. Willmann-Bell, Richmond (1992).
- [D66] M.Ch. DUFOUR, *Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune*, Compt. Rend. Séances Acad. Sci. **62** (1866), 840-842.
- [Dut95] J. DUTKA, *On the early history of Bessel functions*, Arch. Hist. Exact Sci. **49** (1995), 105-134.
- [E13] A.S. EDDINGTON, *Some problems of astronomy. III The distribution of cometary orbits*, The Observatory **36** (1913), 142-146.
- [F29] Fermi, E., *Sul moto di un corpo di massa variabile*, Rend. Acc. Lincei **9**₁, Serie VI, (1929₁), 984-986.
- [Gl78] H. GLAISHER, *On the law of force to any point in the plane of motion, in order that the orbit may be always a conic*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **39** (1878), 77-91.
- [G75] H. GOLDSTEIN, *Prehistory of the «Runge-Lenz» vector*, Am. J. Phys. **43** (1975), 737-738.
- [G76] H. GOLDSTEIN, *More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector*, Am. J. Phys. **44** (1976), 1123-1124.
- [Gyl84] H. GYLDÉN, *Die bahnbewegung in einem systeme von zwei körpern in dem falle, dass die massen veränderungen unterworfen sind*, Astron. Nachr. **109 Nⁱ** 2593-2594 (1884), 1-6.

- [Ha70] Y. HAGIHARA, *Celestial Mechanics I: Transformation Theory*, Princeton University Press, Princeton (1970).
- [Ho74] G.P. HOREDT, *A variable mass of the primaries and librations around the triangular points.*, *Cel. Mech.* **10** (1974), 319-326.
- [Hal77] G.H. HALPHEN, *Sur les lois de Kepler. Solution d'un problème proposé par M. Bertrand.*, *Compt. Ren. Acad. Sci.* **84** (1877), 936-938. In G.H. Halphen, *Œuvres vol. II*, Gauthier-Villars, Paris (1918), 89-92.
- [Hi89] S. HIRAYAMA, *On the force to any point in a conic*, *Astron. Journ.* **9** (1889), 53-54.
- [Jac42] C.G.J. JACOBI, *De motu puncti singularis*, *Crelle Jour. R. und Angew. Math.* **24**, (1842 5-27). In C.G.J. Jacobi *Gesammelte Werke vol. IV*, Reimer, Berlin (1886), 265-288.
- [K89] D. KUSHNER, *The controversy surrounding the secular acceleration of the Moon's mean motion*, *Arch. Hist. Exact Sci.* **39** (1989), 291-316.
- [Lag71] J.-L. LAGRANGE, *Sur le problème de Képler*, *Memoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* **25**₂ (1771). In J.-L. Lagrange *Œuvres vol. III*, Gauthier-Villars, Paris (1869), 113-138.
- [Lap78] P.-S. LAPLACE, *Supplément au V^e volume du Traité de Mécanique Céleste*. In P.-S. Laplace *Œuvres vol. V*, Gauthier-Villars, Paris (1882), 469-505.
- [LC04] T. LEVI-CIVITA, *Sopra la equazione di Kepler*, *Rend. Acc. Lincei.* **13**₁, Serie V, (1904₁), 260-268. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. II*, Zanichelli, Bologna (1956), 321-330.
- [LC28a] T. LEVI-CIVITA, *Sul moto di un corpo di massa variabile*, *Rend. Acc. Lincei* **7**₂, Serie VI, (1928₂), 329-333. In T. Levi-Civita, *Opere Matematiche vol. IV*, Zanichelli, Bologna (1956), 595-599.
- [LC28b] T. LEVI-CIVITA, *Aggiunta alla nota «Sul moto di un corpo di massa variabile»*, *Rend. Acc. Lincei* **8**₂, Serie VI, (1928₂), 621-622. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. IV*, Zanichelli, Bologna (1956), 601-602.
- [LC28c] T. LEVI-CIVITA, *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna (1928), 17-28. In T. LEVI-CIVITA, *Opere Matematiche vol. IV*, Zanichelli, Bologna (1956), 575-589.
- [LC30] T. LEVI-CIVITA, *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile*, *Rend. Acc. Lincei* **10**₁, Serie VI, (1930₁), 626-632.
- [L21] E.O. LOVETT, *Sul problema di due corpi di massa variabile*, *Rend. Acc. Lincei* **31**₁, Serie V (1922₁), 178-181.
- [Mad21] C. MADERNI, *Un nuovo caso di integrabilità nel problema dei due corpi di massa variabile*, *Rend. Acc. Lincei* **30**₂, Serie V (1921₂), 176-178.
- [Mest93] J. MESTSCHERSKY, *Ein specialfall des Gylden'schen problems*, *Astron. Nachr.* **132**, N° 3153 (1893), 129-130.
- [Mest02] J. MESTSCHERSKY, *Über die integration der bewegungsgleichungen im probleme zweier körper von veränderlicher masse*, *Astron. Nachr.* **159**, N° 3807 (1902), 229-242.

- [ML84] G. MITTAG-LEFFLER, *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante*, Acta Math. **4** (1884), 1-79.
- [Mor80] G. MORERA, *Sul moto di un punto attratto da due centri fissi colla legge di Newton*, Giorn. Matem. **18**, Serie I (1880), 34-71.
- [Mos70] J. MOSER, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 609-636.
- [Mou14] F. R. MOULTON, *An Introduction to Celestial Mechanics*, 2nd Revised Edition. Mac Millan, New York (1914).
- [Oo50] J.H. OORT, *The structure of the cloud of comets surrounding the solar system, and a hypothesis concerning its origin*, B. Astron. I. Neth. **11** (1950), 91-110.
- [O84] Th. V. OPPOLZER, *Über ein ursache welche den unterschied zwischen der theoretisch berechneten säculacceleration in der länge des Mondes und der thatsächlichen bedingen kann*, Astron. Nachr. **108**, N° 2573, (1884), 67-72.
- [Pick12] W.H. PICKERING, *The motion of the solar system relatively to the interstellar absorbing medium*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **72** (1912), 740-743.
- [Poi92] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris. Tome I (1892). Tome II (1893). Tome III (1899).
- [Pol66] H. POLLARD, *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1966).
- [Pol94] E.N. POLYAKOVA, *A two-body variable-mass problem in celestial mechanics: The current state.*, Astron. Rep. **38** (1994), 283-291.
- [Por91] F. PORRO, *Sull'estensione della legge di Newton ai sistemi stellari binarii*, Rend. Circ. Mat. Palermo **5** (1891), 51-58.
- [Pou97] B. POURCIAU, *Reading the master: Newton and the birth of celestial mechanics*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 1-19.
- [R05] R. ROSSO, *La meccanica celeste in Italia tra '800 e '900: Il problema dei tre corpi*, apparirà su Boll. UMI A.
- [Su12] K.F. SUNDMAN, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math. **36** (1912), 105-179.
- [Sz67] V. SZEBEHELY, *Theory of Orbits. The restricted Problem of the Three Bodies*, Academic Press, New York (1967).
- [Tiss89] F. TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, vol. I Gauthier-Villars, Paris (1889).
- [TZ14] S. TOMMASSETTI - F.S. ZARLATTI, *Le problème astronomique des deux corps de masses variables*, Bull. Astr. **31** (1914), 150-166.
- [VI82] M.J. VALTONEN - K.A. INNANEN, *The capture of interstellar comets*, Astroph. J. **255**, (1982), 307-315.
- [Vol99] V. VOLTERRA, *Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica*

- del prof. Mittag-Leffler*, Atti Acc. Sc. Torino **34**, (1898-1899), 492-494. In V. VOLTERRA *Opere Matematiche vol. II*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1956), 591-593.
- [Vra28] G. VRANCEANU, *Sopra le equazioni del problema dei due corpi di masse variabili*, Rend. Acc. Lincei **7**₂, Serie VI (1928₂), 555-558.
- [Wei00] R. WEINSTOCK, *Inverse-square orbits in Newton's Principia and twentieth-century commentary thereon*, Arch. Hist. Exact Sci. **55** (2000), 137-162.
- [Win41] A. WINTNER, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1941).
- [W72] J.M. WITKOWSKI, *On the problem of the origin of comets, The motion, Evolution of Orbits, and Origin of Comets: International Astronomical Union Symposium No. 45, held in Leningrad, U.S.S.R., August 4-11, 1970*, A. CHEBOTAREV, E. I. KAZIMIRCHAK-POLONSKAYA, B. G. MARSDEN (editors), D. Reidel, Dordrecht (1972), 419-425.

Riccardo Rosso, Dipartimento di Matematica,
Istituto Nazionale di Fisica della Materia,
Università di Pavia, via Ferrata 1, 27100 Pavia
e-mail: riccardo.rosso@unipv.it