Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Salvatore Coen

RECENSIONI. Da Pitagora a Borges. Discussioni in rete sull'infinito. Autore: Claudio Citrini, Mondadori (2004)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.1, p. 183–190.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_1_183_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Aprile 2005, 183-190

RECENSIONI

Da Pitagora a Borges. Discussioni in rete sull'infinito. Di Claudio Citrini, Collana «Matematica e dintorni» Bruno Mondadori Editore, pp. 256, Milano, 2004, ISBN 88-424-9147-0; €. 17.

Recensione di Salvatore Coen

Questo è un libro impostato in modo assai originale. In un'afosa giornata di luglio, l'autore cerca stancamente di riordinare materiale sull'infinito, raccolto sull'arco di un lungo periodo, quando il computer gli annuncia l'arrivo di una e-mail (anzi, poi si vedrà meglio il perché) di una *i-mail*. Nulla di strano in questo se non che il computer non è in rete. Forse qualche hacker è riuscito ad intrufolarsi nel computer attraverso un cellulare con opportuno software ? L'indirizzo del mittente

<poeta.sovrano@nobilecastello.inf>

lascia perplessi. Dante vede Omero nel Limbo appunto come poeta sovrano; il destinatario ha come indirizzo <ClaudioC@pothi.gaia>, ove <pothi> vuole dire «ovunque si trovi», Gaia (anzi meglio «Gâ̓ia») è il termine omerico ad indicare la Terra. In quest'ordine di idee il significato di «inf» appare fin troppo chiaro. È decisivo il fatto che l'oggetto del messaggio riguardi esattamente i pensieri che il nostro autore stava allora svolgendo proprio riguardo alla nozione d'infinito in Omero («l'ira funesta che *infiniti* addusse lutti agli Achei..»). In breve, l'autore comprende di essere in contatto via i-mail (infinity – mail) con Omero ed altri illustri signori dell'aldilà. Questi sono grandi matematici o grandi artisti (per lo più scrittori), disposti ad aprire con lui un dialogo sull'infinito. Il mortale destinatario di tanta sapienza non deve inorgoglirsi troppo; là dove i grandi stanno, di tempo ce ne è quanto si vuole. In primo luogo, come per ogni buona chat- room, gli interlocutori si scelgono i loro nicknames. Così Omero sceglierà Hom anche perché «fa più matematico», Ago sarà S. Agostino, Ari sta per Aristotele, Clide è Euclide, Mela è Newton. Il nostro autore si fa piccolo piccolo scegliendo «Epsi», un abbreviativo di epsilon; in realtà, da buon matematico sa quanto l'epsilon sia importante ed assume questo prestigioso nickname solo dietro indicazione di Cauchy che modestamente si fa chiamare di conseguenza «delta».

Dopo la premessa ed il prologo, il libro si sviluppa su quattordici capitoli, anzi nella registrazione di quattordici sessioni di «chat» (è Omero ad usare termini come chat o nickname che noi quindi non metteremo più tra virgolette).

La prima sessione è (naturalmente) dedicata alla «parola». «Da dove cominciamo?» chiede gentilmente Gaetana Agnesi ad Epsi, e quello: «Dai primordi. Dalla parola...» L'ultima seduta è intitolata «Regresso» e conclude il volume con alcuni versi del Paradiso <qui farem punto come buon sartore ...> e con la citazione in tedesco ed in italiano di un brano del *Chorus Misticus* dal Faust di Goethe.

Il nostro lettore comincia già da ora a farsi un'idea della natura di questo libro, ma per entrare nel suo spirito, occorre esaminarne qualche capitolo un poco in dettaglio.

Il primo capitolo affronta anzitutto la concezione che avevano i Greci dell'infinito. Si ricorda la nozione di *apeiros*, letteralmente «sconfinato». Omero ricorda che per lui sono sconfinati la terra, il mare, il popolo ed anche il sonno. Pindaro – ricorda Omero ad Epsi – parlando degli inferi dice che «... l'infinita tenebra discaricano i torbidi fiumi della cupa notte»; ad Epsi questo rammenta un brano di J.L. Borges ove si parla dell'«infinita sostanza della notte». Ecco l'infinito come indeterminato, incompleto e perciò terrificante. Dopo una breve digressione sulla felicità ed un intervento a sorpresa di Galileo che afferma di avere calcolato il volume dell'Inferno, sono Pascal e Giordano Bruno a riportarci all'infinito. Dante e Giordano Bruno, entrambi superbi, si scontrano a parole e Pascal ci spiega che quello che veramente spaventa nella teoria dell'infinità dell'universo è il silenzio eterno degli spazi infiniti. Anche questa svolta nella discussione ha, come spesso si verifica nel libro, anzi – oseremmo dire – come deve verificarsi in un tale libro, due generi di sviluppi. Il primo è di carattere scientifico: Galileo spiega come Römer già nel 1675 fosse riuscito a verificare che la velocità della luce è finita ed a darne, attraverso un ingegnoso espediente basato sulle sue conoscenze del moto di Giove, la misurazione di 227.000 Km/sec. L'altra conseguenza di quest'ultima discussione è la necessità di chiarire, anche etimologicamente, il termine «orizzonte». Qui è Aristotele a spiegare come stiano le cose, ma non basta. Con una tipica diversione il lettore comprende anche come mai un modo verbale si chiami appunto «infinito» (faticosa traduzione del termine «aparémphatos» che meglio sarebbe stato tradurre come «indefinito»). I grandi del passato continuerebbero più o meno tranquillamente a parlare, ma ben fa Gaetana Agnesi a chiudere qui una chat già anche troppo intensa.

E la matematica? Se per ora questa è apparsa poco, la responsabilità deve essere attribuita allo scrivente: ci è sembrato, infatti, necessario soffermarci parecchio sulla parte iniziale di questo specialissimo libro; finora abbiamo così esaminato solo il primo capitolo dove l'autore ci ha introdotto alle nozioni basiche e storiche della nozione di infinito, non siamo ancora alla matematica. Essa compare subito nei capitoli seguenti, come si vede dai loro titoli: *Enumerare*, *Algoritmi*, *Periodicità*, *I numeri reali*, *Quanti sono?*, *Uno strano numero, Asintoti*, *Avvicinarsi all'infinito*, *Limite*, *Inviluppi*, *Paradossi sulle serie*, *Induzione*; per finire, come già ricordato, con *Regresso*.

L'enumerare affascina; affascina i bambini nelle loro filastrocche ed affascina i grandi. Dal 1965 il pittore Roman Opalka ha dato inizio ad un programma consistente nello scrivere uno dietro l'altro tutti i numeri naturali che può, pronunciandoli contemporaneamente ad alta voce. Forse è Borges che chiarisce il fascino dell'enumerare: «È verosimile - egli ha scritto nella sua «Storia dell'eternità» che proprio nell'insinuazione dell'eterno... risieda la causa del particolare piacere che procurano le enumerazioni». Per fare meglio comprendere questo grande mistero che ci fa provare l'ebbrezza dell'infinito, l'Autore segue paradossalmente la strada di cercare quella «singola parola che rappresenta il numero più grande di tutti». Il problema è pertanto anche linguistico e di vocabolario e su questo hanno da dire la loro Archimede, Dante, Orazio, S. Agostino oltre che Poincaré.

Il terzo è probabilmente uno dei capitoli più riusciti del libro. Inizia con lo studio del paradosso di Achille, limpidamente riassunto in tre righe da Aristotele (che usa qui le stesse parole usate nella *Physica*) e discusso poi a tre da Epsi, Euclide e Galileo. Quando, poi, alla discussione comincia a partecipare Archimede le pagine si fanno più fluide. È certo interessante ed assai efficace a fini didattici il modo con cui si cerca di fare capire ad Archimede l'utilità del calcolo differenziale. Dice, infatti, Archimede che i moderni dapprima hanno definito il limite in modo fumoso, poi sono ricorsi a nozioni finitistiche, già sostanzialmente note nell'antichità classica, per darne una nozione precisa; il tutto non si capisce quale vantaggio possa dare. È Newton a rispondere: «Tutto il calcolo infinitesimale procede in maniera spedita proprio perché evita sistematicamente di rifarsi alle nozioni di base...» Galileo cerca di spiegare l'utilità dei metodi moderni usando ragionamenti pienamente accettabili dai grandi vecchi Euclide ed Archimede. Ci permettiamo di suggerire al lettore di passare direttamente da questo capitolo terzo al decimo, dedicato ad introdurre nel modo particolare preferito dall'autore, la nozione di limite. Apprendiamo direttamente da Cauchy, esattamente come nel suo *Cours d'Analyse* del 1821, la nozione di infinitesimo; ancora Cauchy ci enuncia in termini rigorosi la nozione di limite di $f(x)$ per x tendente all'infinito e ci parla di un epsilon come di un numero *aussi petit que l'on voudra*. È effettivamente Cauchy a chiarire la nozione moderna. Ma, in questo capitolo, naturalmente, appaiono Leibniz e Newton, in continua polemica personale, che ci spiegano come sia sorto il calcolo infinitesimale. In questo capitolo vediamo, con l'ausilio di un grafico interessante, anche come Ippocrate sia riuscito, per primo, a calcolare esattamente l'aerea di una figura curvilinea. Qui Newton, con le parole tratte dai suoi scritti, ci rivela il teorema fondamentale del calcolo integrale. Qui si introduce la nozione di tangente a certe curve piane e quella di curvatura e di cerchio di curvatura.

Si tratta poi la nozione di *periodicità* perché «tra i modi di procedere all'infinito... sembra tra i più semplici..» (e forse anche perché questo è un concetto assai caro agli interessi scientifici dell'autore). La periodicità in matematica è affrontata, inizialmente, attraverso lo studio dei numeri periodici; ciò fornisce anche la opportunità di introdurre alcune nozioni di teoria dei numeri, come la funzione $\Phi(n)$ di Eulero. La periodicità la si esamina poi attraverso l'astronomia, per studiare, come dice la Agnesi «l'aspetto cinematico della periodicità del moto». Questo approccio permette a noi lettori di accrescere le nostre nozioni storiche e scientifiche sul sistema solare, avendo come guide Galileo, Cauchy, Newton, Poincaré oltre ad Aristotele ed Euclide (Copernico, Keplero e Tolomeo probabilmente hanno troppi problemi nel loro aldilà per trovare tempo di intervenire direttamente). I numeri reali sono introdotti dopo una presentazione dei numeri naturali ed una discussione ampia sullo zero con ovvio intervento di Omero che parla del suo Odisseo e spiega ad Euclide che non può liquidare lo zero dicendo che siccome si chiama «nulla», allora non esiste; è come se Odisseo non fosse mai esistito solo perché dice di chiamarsi «Oútis. Nessuno».

Il capitolo più ampio è il sesto dal titolo *Quanti sono?*. Si chiede quanti sono i numeri reali, ma subito, cercando di definire cosa è infinito e cosa è finito, si scivola sul lato filosofico o teologico, terreno proprio di S. Agostino. Si focalizza poi il problema di dare una buona definizione di insieme finito, ma si passa a problemi di geometria, trascinati dalle personalità di Euclide e di Archimede. Naturalmente sono proprio queste considerazioni che mostrano la strada con cui, astrazione dopo astrazione, si è giunti a nozioni di teoria degli insiemi, ora di uso comune in matematica, ma che si possono comprendere certo meglio quando se ne veda o almeno se ne intraveda la genesi. L'interesse maggiore è dato, a parere di chi scrive, dalla illustrazione di teoremi, problemi, paradossi capaci di suscitare nel lettore domande difficili e delicate. Galileo ci parla della ruota di Aristotele, Peano ci parla della sua curva, compaiono i paradossi della teoria degli insiemi; vengono esaminati anche risultati sui volumi, sulle aree; è introdotto il metodo degli indivisibili; si parla di numeri algebrici e trascendenti. Soprattutto, questo sesto capitolo è quello in cui più rifulge la personalità di Galileo del quale sono riportati molti brani e varie dimostrazioni la cui esposizione non può che entusiasmare il lettore anche appena interessato.

Abbiamo esposto, senza alcuna completezza, ma con qualche particolare il contenuto di circa la metà delle sessioni di chat illustrate nel libro e pensiamo che siano sufficienti per dare un'idea di questo originale volume. Tralasciamo il resto non perché meno interessante, ma perché non strettamente necessario ai nostri fini.

Il nostro lettore avrà ben visto come nel libro siano strettamente coesi concetti matematici o più generalmente scientifici, insieme ad antiche reminiscenze greche e latine, il tutto con grande rigore, attraverso citazioni ovunque precise. Si potrebbe pensare che questo fosse l'intento dell'autore: mescolare matematica, letteratura, filosofia e teologia avendo come collante la storia della matematica e presentare così una introduzione ad alcuni tra i concetti fondamentali della matematica. Non crediamo che questa interpretazione sia del tutto corretta. In realtà, Claudio Citrini *vive* in questo mondo culturale ed egli, quindi, si è limitato a mostrarci uno squarcio delle sue conoscenze, con un lavoro duro, ma probabilmente a lui assai grato. Diversamente, non sarebbe stato possibile continuare così a lungo questo gioco, senza steccare più volte. Se l'autore non avesse creduto e non credesse così profondamente in quello che scrive, il libro avrebbe potuto facilmente scadere a rendiconto di una serie di sedute spiritiche. Noi vediamo, invece, il libro come ispirato ai grandi viaggi nell'aldilà della letteratura occidentale. Con questo non vogliamo dire che il libro sia un poema o che questa linea seguita dall'autore sia l'unica possibile per fornire profondità e prospettiva a concetti difficili. Certamente, però, il *Leitmotiv* fondamentale cui si ispira da alcuni anni la rivista su cui stiamo scrivendo, il vedere e fare vedere la matematica come parte integrante della cultura qui è compiutamente accettato e sperimentato in una maniera originalissima e questo solo sarebbe già motivo sufficiente per illustrare una tale opera ai nostri lettori.

I personaggi che compaiono parlano o meglio chattano frequentemente con frasi da loro stessi usate nei loro scritti. Ora, il riuscire a svolgere un discorso compiuto usando i discorsi originali di questi grandi del passato, vissuti sull'arco di più di duemilacinquecento anni (da Pitagora a Borges, appunto) è un gioco da grandi equilibristi della cultura. Si vedano in questo senso, i capitoli già ricordati relativi agli algoritmi (infiniti) ed ai limiti, ove si mostra con una buona continuità il passaggio dall'infinito dell'antica Grecia all'infinito del calcolo infinitesimale. L'andamento è teso, le digressioni su problemi vari sono frequenti, ma una logica precisa guida tutta la esposizione con esiti ottimi.

Dice l'autore: «Questo libro è come una ragnatela tanto fragile da non poter resistere alle critiche dei professionisti – matematici, filosofi, storici, letterati che siano ...» No, il ragno ha lavorato con serici fili resistentissimi. Il problema che un tale libro presenta non sembra risiedere qui. Piuttosto, il problema ci sembra essere nel determinare quali lettori siano in grado di apprezzare quest'opera. Si tenga presente che l'autore spesso tralascia di tradurre gli scritti dal latino e dall'inglese, che egli si compiace di entrare in questioni linguistiche delle lettere classiche, in questioni teologiche, in problemi storici. Lo fa con gusto raffinato, affrontando questioni (apparentemente) elementari con leggerezza, ricorrendo assai spesso all'ironia o all'umorismo (anche Achille Campanile aiuta), ma è, comunque, un alto prezzo quello di richiedere al lettore interessi di tale natura. La difficoltà nella lettura discende anche da due altre ragioni: i capitoli sono spesso assai concettuosi e nello stesso capitolo i problemi affrontati sono generalmente di natura diversa (l'autore parla propriamente di *percorsi trasversali..,digressioni che continuamente permettono una diversa chiave di lettura*).

Sembrerebbe, quindi, che il libro fosse indirizzato a scienziati con buona infarinatura classica o a letterati con buoni interessi scientifici. Queste categorie di persone siamo, infatti, convinti che, in buon numero, potranno trarre grande godimento dalla lettura di tutto il libro o anche solo di alcuni dei suoi capitoli.

La scelta degli argomenti, però, indica che non era questo il pubblico principale cui il libro era indirizzato. Gli argomenti fondamentali sono di carattere matematico e riguardano concetti basilari. Essi lasciano intendere una finalità didattica. Infatti, questo volume nasce da anni di insegnamento, imperniato sull'idea di fornire concetti, di studiare le motivazioni anche storiche di questi e di interessare, così, i discenti a tal punto che essi possano poi abbordare le tecniche, anche ardue, qui assenti, con consapevolezza e curiosità.

Finalmente il cuore del problema della leggibilità del libro è svelato dall'autore quando dice che questo deve essere visitato *con lo stile del ragno, che va qua e là a raccogliere i bocconi che preferisce, e talvolta li impacchetta per una degustazione futura.* Questa bella immagine ci trova assolutamente consenzienti. La lettura del volume dal principio alla fine è riservata a pochi, a lettori già abbastanza maturi sugli argomenti trattati e che, come dicevamo, certamente man mano che la lettura avanza troveranno nuovi interessi per proseguire. Altri lettori troveranno più piacevole soffermarsi frequentemente lungo questo cammino, verificare una citazione, approfondire o chiosare con la loro esperienza un passo ... Infine, molti altri (studenti dei nostri bienni, corsisti delle attuali SSIS, ...) potranno trarre da argomenti ben precisi (o precisati da un docente) le motivazioni per i loro studi e verificare anche con entusiasmo di pagina in pagina lo sviluppo di un'idea, la sua genesi non necessariamente matematica, magari anche fisica o filosofica o anche teologica. Si pensi, ad esempio, alla gratificazione che può provare uno studente nel verificare che certe sue difficoltà erano state proprio i punti sui quali secoli addietro alcuni grandi avevano dovuto soffermarsi.

Infine, le citazioni a piè di pagina qui assumono un significato più importante che altrove, sono assai abbondanti e precise e devono essere costate grande pazienza a chi le ha preparate. Le illustrazioni sono scelte assai bene. Non altrettanto si può dire di come sono riprodotte. Il volume è corredato da parecchi elenchi ed indici, molto opportuni; purtroppo, forse per la stessa natura dell'opera, manca un indice degli argomenti che per certi lettori potrebbe essere assai utile.

Il fatto che Epsi riesca ad evitare discorsi specialistici non vuol certo dire che le difficoltà tecniche siano state eliminate. Per illustrare i vari approfondimenti tecnici di alcuni dei concetti introdotti, invece di ricorrere ad appendici che avrebbero forse appesantito il volume, l'autore invita i lettori ad una sua pagina web. Egli si impegna, attraverso tale espediente ed opportuni messaggi elettronici ad aiutare i lettori con approfondimenti, ulteriori notizie e quant'altro necessario (spesso nel testo un personaggio dichiara che i particolari o gli sviluppi di qualche idea li spiegherà via i-mail; Epsi si impegna a trasferire questi i-mail in opportuni e-mail per noi mortali finiti nel tempo; l'impegno è largamente mantenuto, si veda la pagina http://fds.mate.polimi.it/file/citrini/Pitaborges/i-mail.html). Questi metodi uniti all'ampia esperienza didattica già acquisita, garantiscono la accessibilità a vaste aree di pubblico. Pur ribadendo che questo libro non si esaurisce affatto in un'opera didattica, ma è di interesse generale per il pubblico dei nostri lettori, dobbiamo guardare con grande attenzione e rispetto ad una iniziativa didattica così originale e motivata.