Carlo Viola

Addendum Approssimazione diofantea, frazioni continue e misure d'irrazionalità (*)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.1, p. 179–182.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_1_179_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Aprile 2005, 179-182

Addendum
Approssimazione diofantea, frazioni continue e misure d'irrazionalità (*).

CARLO VIOLA

3. Possiamo precisare meglio l'idea sopra accennata osservando che per un numero irrazionale α interessa trovare *infiniti* razionali r/s che migliorino qualitativamente la diseguaglianza banale (1). Cioè interessano successioni (r_n/s_n) $(n = 1, 2, \dots)$ di razionali che migliorino la stima asintotica (2)

$$\left| \alpha - \frac{r_n}{s_n} \right| = O\left(\frac{1}{s_n}\right) \qquad (n \to \infty)$$

ottenuta dalla (1) (intendendo ovviamente che r_n sia l'intero più vicino a $s_n \alpha$), ossia che verifichino almeno la stima

$$\left| \alpha - \frac{r_n}{s_n} \right| = o\left(\frac{1}{s_n}\right) \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

(*) A causa di un increscioso errore tipografico il lavoro *Approssimazione diofantea, frazioni continue e misure d'irrazionalità* di Carlo Viola è stato pubblicato nel fascicolo Serie VIII, Vol. VII-A, Agosto 2004, 291-320, omettendo alcune righe a partire dalla riga 14 di pag. 295 del terzo paragrafo. Qui di seguito viene riprodotto interamente il terzo paragrafo del lavoro nella sua presentazione originale. (NdR)

(2) Ricordiamo la definizione dei simboli asintotici $O(\dots)$ e $o(\dots)$. Date due successioni (u_n) e (v_n) con $v_n > 0$, la notazione $u_n = O(v_n)$ indica che il quoziente u_n/v_n si mantiene limitato per $n \to \infty$, cioè che esiste una costante $c > 0$, indipendente da n, tale che $|u_n| \leq c v_n$ per ogni n. La notazione $u_n = o(v_n)$ indica che $u_n/v_n \to 0$ per $n \to \infty$.

La (2) è equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} |s_n\alpha - r_n| = \lim_{n\to\infty} \|s_n\alpha\| = 0\,. \tag{3}$$

Per comprendere l'utilità di disporre di successioni (r_n/s_n) di questo tipo, osserviamo che la condizione (3) fornisce facilmente un criterio assai generale per decidere se un'assegnata costante $\alpha \in \mathbb{R}$, definita mediante un opportuno algoritmo (per es. come somma di una serie numerica, o come valore di un integrale definito, ecc.), sia razionale o irrazionale. Più precisamente, se, dato un $\alpha \in \mathbb{R}$, esistono due successioni di interi (r_n) e (s_n) tali che

$$0 \neq s_n\alpha - r_n \to 0 \qquad (n \to \infty)\,, \tag{4}$$

allora $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Infatti se fosse $\alpha = M/N$ con $M, N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$, per l'ipotesi $s_n\alpha - r_n \neq 0$ si avrebbe, per $n = 1, 2, \ldots$,

$$|s_n\alpha - r_n| = \frac{|s_nM - r_nN|}{N} > 0\,,$$

da cui $|s_nM - r_nN| \geqslant 1$ perché r_n, s_n, M, N sono interi, e quindi anche $s_nM - r_nN$ lo è. Dunque

$$|s_n\alpha - r_n| \geqslant \frac{1}{N}\,,$$

contro l'ipotesi $s_n\alpha - r_n \to 0$.

Diamo una semplice applicazione del precedente criterio dimostrando l'irrazionalità del numero $e = 2{,}71828\ldots$ (base dei logaritmi naturali), sfruttando la convergenza, sufficientemente rapida dal punto di vista diofanteo, della serie esponenziale. Essendo

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,, \tag{5}$$

definiamo, per $n = 1, 2, \ldots$,

$$\frac{r_n}{s_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\,.$$

Poiché $(n-1)!$ è multiplo di $k!$ per ogni k tale che $0 \leqslant k \leqslant n-1$, abbiamo $s_n \leqslant (n-1)!$. Allora

$$e - \frac{r_n}{s_n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} > 0\,,$$

e, moltiplicando per $s_n \leqslant (n-1)!$,

$$\begin{aligned}
0 < s_n e - r_n &\leqslant (n-1)!\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\right) \\
&< \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n^2} \to 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Dunque la condizione (4) è soddisfatta, e quindi $e \notin \mathbb{Q}$.

Se avessimo utilizzato la formula

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

anziché la serie (5), non avremmo potuto dimostrare altrettanto facilmente l'irrazionalità di e, poiché la successione $e - \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ tende a zero, ma non così rapidamente da compensare la crescita del denominatore n^n. È interessante osservare che vi sono costanti «classiche» α per le quali non si conosce un algoritmo di convergenza abbastanza rapido in senso diofanteo, cioè non si sa dimostrare l'esistenza di successioni (r_n) e (s_n) di interi soddisfacenti la (4); di tali costanti α, in effetti, non si sa dimostrare l'irrazionalità. È questo il caso, per esempio, della costante di Euler–Mascheroni (Tav. 3):

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = 0{,}57721\dots,$$

che ha importanza in vari rami della matematica e in particolare nella teoria della funzione gamma di Euler, o della costante di Catalan:

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = 0{,}91596\ldots.$$

Si congettura che queste costanti siano trascendenti, ma, fino ad oggi, non se ne sa dimostrare neppure l'irrazionalità.