Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Vito Fragnelli, Roberto Tadei

«Operations Research Games»

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **8-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2005), n.1, p. 107–122.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2005_8_8A_1_107_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2005.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VIII-A, Aprile 2005, 107-122

«Operations Research Games» (*).

VITO FRAGNELLI - ROBERTO TADEI

1. – Introduzione.

La Ricerca Operativa, in particolare l'Ottimizzazione, affronta vari problemi decisionali con lo scopo di determinare tra le molte alternative possibili quella o quelle che risultano più vantaggiose, rispetto a prefissati obiettivi. In un'ottica più ampia la Ricerca Operativa si inserisce tra le Scienze delle Decisioni, quelle discipline che si propongono di fornire gli strumenti per analizzare le situazioni in cui è necessario scegliere tra più alternative al fine di massimizzare opportuni indici di performance (obiettivi), rispettando i vincoli imposti dalle situazioni in oggetto. Le applicazioni della Ricerca Operativa spaziano in numerosi campi: aziendale, politico, sociale, economico, ecc.

Più precisamente, in un problema di Ricerca Operativa si suppone che i differenti elementi del problema possano essere utilizzati in modo differente a seconda degli obiettivi che si vogliono raggiungere. Ad esempio, volendo ottimizzare il funzionamento di un motore l'obiettivo può variare a seconda del tipo di automobile su cui verrà utilizzato, per cui per un'utilitaria si cercherà di contenere il consumo, mentre per una vettura di classe elevata risulta preferibile ridurre la rumorosità e le vibrazioni, invece per un'automobile da competizione è importante ottenere il massimo di potenza.

Ma la Ricerca Operativa risulta insufficiente nelle situazioni in cui sono presenti più decisori; infatti non solo i differenti decisori possono avere obiettivi diversi, situazione questa che può essere affrontata con la programmazione multiobiettivo, ma come spesso accade, una oppor-

(*) Gli autori ringraziano un anonimo revisore per gli utili suggerimenti.

tuna coordinazione delle scelte può portare ad un miglioramento rispetto ai risultati che gli agenti coinvolti possono ottenere separatamente, per cui è necessario fronteggiare il nuovo problema di come suddividere in modo ragionevole tra gli agenti il guadagno ottenuto. Si consideri il seguente problema lineare di produzione.

ESEMPIO 1.1 (Modello di produzione lineare). – *Un processo produttivo utilizza due risorse, A e B; due agenti, I e II, possono ottenere le risorse necessarie, ma a costi unitari differenti, come riportato nella tabella seguente*:

	costo di A (in euro)	*costo di B (in euro)*
I	11	6
II	4	10

Supponendo che un'unità di prodotto venga rivenduta al prezzo di 20 euro, l'agente I ottiene un guadagno unitario di 3 euro e l'agente II di 6 euro. Se i due agenti si accordano possono utilizzare la risorsa A al costo dell'agente II e la risorsa B al costo dell'agente I, con un guadagno unitario di 10 euro. ■

Nell'esempio precedente i due agenti possono ottenere un profitto maggiore se operano congiuntamente, per cui saranno disponibili a collaborare, purché la suddivisione del profitto risulti soddisfacente per entrambi. Infatti, una uguale divisione di 5 euro ciascuno risulterebbe svantaggiosa per l'agente *II* che potrebbe ottenere un guadagno di 6 euro operando da solo.

In altre parole, dopo aver risolto il problema di ottimizzazione per decidere come utilizzare al meglio le risorse disponibili per la produzione, sorge la domanda di come suddividere il profitto tra gli agenti in modo che tutti accettino di rendere disponibili le loro risorse. Questa domanda trova risposta nella Teoria dei Giochi, una disciplina che studia l'interazione strategica tra i differenti agenti di una situazione in cui l'esito finale dipende dal comportamento, cioè dalle scelte, dei decisori.

Riassumendo possiamo dire che, in generale, l'Ottimizzazione monobiettivo trova la sua naturale applicazione nelle situazioni in cui è presente un unico decisore, che quindi cerca di ottenere la soluzione per lui migliore, cioè la *soluzione ottima*, mentre la Teoria dei Giochi si rivolge alle situazioni in cui operano più decisori, detti *giocatori*, tutti in grado di influenzare l'esito finale, per cui ciascuno deve considerare che il proprio risultato potrebbe non essere quello atteso se gli altri decisori non agiscono secondo le sue previsioni.

La Teoria dei Giochi nasce nel 1944, a seguito della pubblicazione del libro *Theory of Games and Economic Behavior* di John von Neumann e Oskar Morgenstern [41]. Lo scopo degli autori, come dice il titolo, era di esaminare il comportamento di situazioni reali in cui operano più agenti, utilizzando le osservazioni derivanti dalle strategie usate nei più comuni giochi, ad esempio il poker.

Esistono due classi di giochi:

- Giochi non cooperativi.
- Giochi cooperativi.

La differenza dipende dalla possibilità (giochi cooperativi) o meno (giochi non cooperativi) di sottoscrivere *accordi vincolanti*, cioè dal fatto che i giocatori possano concordare, tramite una trattativa preliminare, le strategie da utilizzare e successivamente possano far valere in modo opportuno gli accordi stipulati. Si può sottolineare che il termine «possibilità» comprende sia un significato normativo, cioè non deve esistere un'*authority* che vieta gli accordi (come, ad esempio, accade in campo assicurativo), sia un significato tecnico, nel senso che i giocatori devono avere i mezzi per comunicare (ad esempio, in una situazione di traffico intenso, gli automobilisti non possono concordare l'utilizzo di differenti percorsi alternativi). Il termine «vincolante», a sua volta, implica la possibilità di imporre il rispetto degli accordi.

A loro volta i giochi cooperativi si dividono in due classi:

- Giochi cooperativi a utilità non trasferibile (*Giochi NTU*).
- Giochi cooperativi a utilità trasferibile (*Giochi TU*).

Nel primo caso i giocatori possono accordarsi sulle strategie da adottare, ma ciascuno consegue un'utilità prefissata, per cui nella scelta della strategia devono tenere conto che, a seconda dell'esito, potranno avere un risultato più o meno vantaggioso; nel secondo caso invece l'utilità che i giocatori ottengono globalmente può essere ripartita in qualsiasi modo, ma affinché questo sia possibile è necessario che esista la possibilità di trasferire l'utilità. Ad esempio, se gli utenti di un servizio si accordassero per limitare le perdite di tempo dovute alla congestione ognuno avrebbe un proprio tempo di servizio e il tempo eventualmente guadagnato non potrebbe essere trasferito ad un altro utente. Deve, quindi, esistere un mezzo per trasferire l'utilità tra i giocatori, ad esempio il denaro, a cui tutti i giocatori attribuiscono lo stesso valore (in realtà anche il denaro non ha lo stesso valore per tutti; si pensi, ad esempio, al potere di acquisto di un dollaro che in un paese in via di sviluppo è molto superiore rispetto ad un paese industrializzato). Infine, per poter parlare di utilità globale, deve essere possibile sommare le utilità ottenute dai diversi giocatori.

I giochi non cooperativi e la loro più importante soluzione, l'equilibrio di Nash, sono stati trattati in un recente articolo di M. Li Calzi [21] su questo Bollettino, per cui in questo lavoro rivolgeremo la nostra attenzione ai giochi cooperativi (ed in particolare quelli a utilità trasferibile) ed alle soluzioni più utilizzate. Relativamente alle applicazioni analizzeremo in particolare gli *Operations Research Games*, cioè quei giochi che partendo da problemi classici della Ricerca Operativa, considerano le corrispondenti situazioni in cui sono presenti più decisori, che si coordinano fra di loro.

Questa classe di giochi ha ricevuto notevole interesse dalla comunità scientifica internazionale e si è sviluppata sulla spinta di ricercatori olandesi, spagnoli, israeliani e canadesi, che le hanno attribuito il nome che dà il titolo all'articolo. Per tale motivo, e tenendo conto che non esiste una traduzione in italiano, gli autori hanno preferito mantenere il titolo in lingua inglese, invece di utilizzare una artificiosa traduzione del tipo «Giochi derivanti da problemi di Ricerca Operativa», che male renderebbe il significato originale.

2. – Giochi cooperativi a utilità trasferibile.

Come si è detto, se gli agenti che operano in una situazione decisionale perseguono un obiettivo comune possono trovare vantaggioso coordinare le loro scelte in modo tale da incrementare il loro ritorno complessivo, ovviamente privilegiando la propria utilità nella fase di suddivisione; si pensi alla realizzazione di un impianto di irrigazione di due poderi adiacenti: è più conveniente costruire un unico collegamento con il canale principale (obiettivo comune) condividendo la spesa, anche se ciascun proprietario vorrebbe pagare il meno possibile (utilità personale).

Formalmente un gioco TU può essere rappresentato tramite una coppia $G = (N, v)$ dove $N = \{1, 2, \dots, n\}$ è l'*insieme dei giocatori*, $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $v(\emptyset) = 0$, è la *funzione caratteristica* del gioco G e 2^N indica l'insieme delle parti, o sottoinsiemi, di N; questa rappresentazione del gioco G è detta *forma caratteristica*.

Gli elementi dell'insieme N rappresentano gli agenti che interagiscono; un sottoinsieme di agenti $S \subset N$ è detto *coalizione* e l'insieme N è detto *grande coalizione*.

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione S un valore $v(S)$ che rappresenta l'utilità che i giocatori di S possono ottenere indipendentemente dagli altri giocatori, cioè senza la collaborazione degli altri giocatori.

Facendo riferimento all'Esempio 1.1 l'insieme dei giocatori è $N = \{I, II\}$ e la funzione caratteristica è definita da $v(\emptyset) = 0$, $v(\{I\}) = 3$, $v(\{II\}) = 6$, $v(\{I, II\}) = 10$.

Dopo aver definito cosa è un gioco TU possiamo porci la domanda: Cosa vuol dire risolvere un gioco TU?

Come mostrato nell'Esempio 1.1, la scelta della strategia, che riveste un ruolo centrale nei giochi non cooperativi, passa decisamente in secondo piano; infatti, il valore della funzione caratteristica non dà nessuna informazione esplicita sul comportamento dei giocatori, in quanto i giocatori scelgono di operare in modo da massimizzare l'utilità complessiva; risulta, invece, centrale il problema di come ripartire il guadagno tra i giocatori della coalizione. Possiamo rimarcare che il problema della suddivisione del valore ottenuto dalla coalizione costituisce una fase importante della negoziazione che porta alla stipulazione degli accordi vincolanti, che sono alla base dei giochi cooperativi. Infatti, i giocatori decideranno di entrare in una coalizione tenendo conto di quanto otterranno.

In particolare, in un gioco TU una soluzione, o più esattamente un *concetto di soluzione*, è costituita da una ripartizione del valore della grande coalizione $v(N)$, in quanto si suppone che se alcuni giocatori formano una sottocoalizione S gli altri possano essere, in un certo senso, «esclusi dal gioco», e l'attenzione si sposta sulla determinazione di una ripartizione di $v(S)$ tra i giocatori di S, che diventa quindi la «nuova» grande coalizione, ed, eventualmente, di una ripartizione di $v(N \backslash S)$ tra i giocatori che non fanno parte di S.

Una *ripartizione* o *vettore payoff* è un vettore $(x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ con $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$; questa condizione viene detta *efficienza*.

Vediamo ora alcuni dei concetti di soluzione più comunemente utilizzati per i giochi TU.

I concetti di soluzione si suddividono in due gruppi, le *soluzioni insiemistiche* e le *soluzioni puntuali*. Le prime individuano un insieme di ripartizioni del valore del gioco mentre le seconde determinano una sola ripartizione.

2.1. *Il nucleo*

La più semplice soluzione insiemistica è costituita dall'insieme delle *imputazioni*, cioè quelle ripartizioni che verificano la *razionalità individuale*, cioè che garantiscono ad ogni giocatore un payoff non inferiore a quello che potrebbe ottenere da solo, o formalmente $x_i \geqslant v(\{i\})$, $\forall\, i \in N$. Questa soluzione tiene conto della forza di ogni giocatore singolarmente, ma non del ruolo che i giocatori possono svolgere se danno vita ad una sottocoalizione. Nel 1953 Gillies [15] propose un concetto di soluzione, il *nucleo*, o *core*, che tiene conto di questa osservazione. Il nucleo è costituito dalle imputazioni che verificano la *razionalità collettiva* o *razionalità di coalizione*, cioè che garantiscono ad ogni gruppo di giocatori un payoff complessivo non inferiore a quello che potrebbero ottenere se si separassero formando la coalizione S, o formalmente:

$$core(v) = \left\{(x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S),\ \forall S \subset N \ e \ \sum_{i \in N} x_i = v(N)\right\}.$$

Il nucleo ha un ruolo essenzialmente normativo, nel senso che la razionalità collettiva costituisce una condizione di stabilità della grande coalizione rispetto a quella ripartizione. In altre parole, l'esistenza di un nucleo non vuoto assicura la possibilità di scegliere un'imputazione alla quale i giocatori non possono opporre una obiezione collettiva, per cui i giocatori non ottengono un vantaggio defezionando dalla grande coalizione. Se il nucleo è non vuoto il gioco viene detto *bilanciato*. Per alcuni giochi il nucleo è vuoto, ad esempio nel gioco di maggioranza semplice a tre giocatori in cui per ottenere una maggioranza sono necessari almeno due giocatori; in questo caso $N = \{1, 2, 3\}$, $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$; $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$ (1) e le condizioni $x_1 + x_2 \geqslant 1$, $x_1 + x_3 \geqslant 1$, $x_2 + x_3 \geqslant 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ sono incompatibili.

Se un gioco ha nucleo vuoto non necessariamente la grande coalizione non si forma, ma risulta più instabile, cioè più soggetta a possibili defezioni dei giocatori.

In generale, per i giochi TU il nucleo è la più importante tra le soluzioni insiemistiche, perché a fronte della caratteristica di non selezionare alcuna imputazione, fornisce informazioni sulla possibilità di formare la grande coalizione.

2.2. *Il valore di Shapley.*

Tra le soluzioni puntuali la più nota è certamente il *valore di Shapley* [32] presentata nel 1953. L'idea a cui si ispira può essere espressa in termini probabilistici come il *contributo marginale medio* di ogni giocatore rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori stessi. Per meglio comprendere questo concetto introduciamo il contributo marginale del giocatore i rispetto alla coalizione S, cioè la variazione di valore della coalizione S quando il giocatore i entra a farne parte, o formalmente $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Per semplicità possiamo supporre che i giocatori entrino a far parte della grande coalizione uno dopo l'altro e che ogni giocatore riceva come payoff il suo contributo marginale rispetto alla coalizione composta dai giocatori che sono già entrati a formare la grande coalizione; questo procedimento può non essere molto equo, per cui

(1) Solitamente si utilizza la notazione più semplice $v(1)$, $v(12)$, ecc.

possiamo supporre di tenere conto di tutti i possibili ordinamenti, le permutazioni π, dei giocatori nel formare la grande coalizione: la media dei contributi marginali di ogni giocatore equivale al valore di Shapley. Formalmente si ha:

$$\varphi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))), \quad \forall i \in N$$

dove $P(\pi, i)$ sono i giocatori che precedono i nella permutazione π.

È facile rendersi conto della notevole complessità di questa formula dal punto di vista computazionale; già per un gioco a 10 giocatori la sommatoria comprende $10! = 3.628.800$ addendi. In qualche caso la struttura stessa del gioco permette di ridurre notevolmente la complessità, fino ad ottenere formule piuttosto semplici. Il caso più noto è il gioco dell'aeroporto per il quale Littlechild e Owen nel 1973 [22] hanno determinato una formula di complessità computazionale lineare.

Per concludere il capitolo vogliamo ricordare altre soluzioni insiemistiche e puntuali. Tra le prime meritano di essere citati gli insiemi stabili dovuti a von Neumann e Morgenstern [41] che lo individuarono come la soluzione di un gioco TU, il Bargaining set e il Kernel definiti, rispettivamente, da Aumann e Maschler in [1] e Davis e Maschler in [9]. Tra le seconde vogliamo menzionare il Nucleolo di Schmeidler del 1969 [31] che prosegue gli studi sul Bargaining set e sul Kernel, le soluzioni ECA, ACA e CGA proposte negli anni '30 dopo uno studio commissionato dalla Tennessee Valley Authority [37]; un ruolo a parte spetta alla famiglia degli *indici di potere* (Shapley-Shubik [33], Banzhaf [2], Deegan-Packel [10], Owen [26]) che si applicano ai giochi semplici, cioè quelli in cui $v(S)$ può assumere solo i valori 0 e 1 con $v(N) = 1$, i quali trovano applicazione nella rappresentazione del potere all'interno di un consiglio di amministrazione o di un parlamento.

3. – Gli Operations Research Games.

Come abbiamo detto nell'Introduzione, gli elementi di un problema possono non essere tutti controllati da un unico decisore o comunque da più decisori che hanno preso una posizione comune (consiglio di amministrazione), ma siano in mano a differenti decisori che hanno un fine comune, ma interessi diversi.

In questo capitolo presentiamo alcune situazioni economiche per le quali ai ben noti problemi di ottimizzazione con un solo decisore sono stati affiancati modelli in cui sono presenti più decisori che si coordinano fra di loro. La lista sarebbe molto ampia e andrebbe al di là dello scopo introduttivo di questo articolo, pertanto presentiamo solo quei problemi a nostro parere più significativi in un'ottica divulgativa: giochi di produzione lineare, giochi di connessione e giochi di sequenziamento.

3.1. *Giochi di produzione lineare.*

In un problema di produzione lineare un insieme di processi produttivi $M = \{1, \dots, m\}$ permette di ottenere m beni, utilizzando k risorse, ciascuna disponibile in una quantità prefissata b_j, $j = 1, \dots, k$. I processi produttivi sono descritti tramite una matrice A, detta matrice tecnologica, in cui l'elemento A_{lj}, $l = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$ indica quante unità di risorsa j sono necessarie per produrre una unità di bene l. Sapendo che ciascuna unità di bene l viene venduta al prezzo c_l, $l = 1, \dots, m$ si vuole determinare quante unità produrre di ciascun bene in modo da massimizzare il ricavo, tenendo conto delle risorse disponibili. Indicando con x_l, $l = 1, \dots, m$ le unità di bene l da produrre, il problema può essere rappresentato come determinare un insieme di valori $y_1, \dots, y_m$ tali che sia massimo il valore di $\sum_{l=1,\dots,m} c_l y_l$ nel rispetto dei vincoli che $\sum_{l=1,\dots,m} A_{lj} y_l \leq b_j$, $j = 1, \dots, k$ e $y_l \geq 0$, $l = 1, \dots, m$.

A questa situazione si può associare un gioco (vedi [25]) in cui le risorse sono suddivise tra i giocatori dell'insieme $N = \{1, \dots, n\}$, ciascuno dei quali possiede una quantità b_j^i, $i = 1, \dots, n$ di risorsa b_j, $j = 1, \dots, k$, con la condizione $\sum_{i \in N} b_j^i = b_j$, $j = 1, \dots, k$. Se i giocatori formano una coalizione possono utilizzare solo le proprie risorse; indicando con $b^S = \sum_{i \in S} b^i$ le risorse disponibili per la coalizione S si ha:

$$v(S) = max\{c^T y \mid Ay \leq b^S,\ y \geq 0\}, \quad \forall S \subseteq N\,.$$

Nel 1975 Owen studiando i giochi di produzione lineari [25] stabilì un risultato molto importante:

TEOREMA 3.1. – *Tutti i giochi derivanti da problemi di programmazione lineare hanno nucleo non vuoto e un'imputazione x nel nucleo può essere determinata a partire da una soluzione ottimale u^* del problema duale associato tramite la relazione*:

$$x_i = b^{iT} u^*, \quad \forall i \in N .$$

3.2. *Giochi di connessione.*

In un problema di connessione un insieme di agenti $N = \{1, \dots, n\}$ devono essere connessi ad un servizio. Possiamo pensare al servizio telefonico, elettrico, idrico, ecc. La situazione può essere rappresentata tramite un grafo con $n + 1$ nodi in cui il nodo v_0 corrisponde al fornitore del servizio e il nodo v_i, $i = 1, \dots, n$ corrisponde all'agente i e in cui l'arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ rappresenta una connessione tra i nodi v_i e v_j. In generale si suppone che il grafo sia *non orientato*, cioè non sia necessario distinguere tra l'arco a_{ij} e l'arco a_{ji}, per ogni $i, j = 0, \dots, n$. All'arco a_{ij}, $i, j = 0, \dots, n$ si associa il costo $c_{ij} = c_{ji}$ che rappresenta il costo della connessione tra i nodi v_i e v_j.

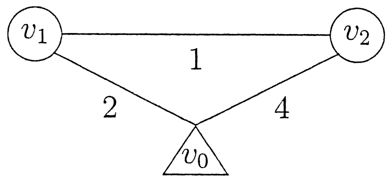
Questo problema viene risolto determinando un *albero ricoprente di costo minimo* utilizzando uno dei numerosi algoritmi disponibili, ad esempio Prim [29] o Kruskal [19].

Possiamo supporre che gli agenti possano decidere di connettersi o meno al servizio (vedi [16]); in questo caso il costo associato ad una coalizione S rappresenta il costo di connettere solo i nodi associati ai giocatori in S (2). Possiamo evidenziare due definizioni alternative del costo che rappresentano differenti situazioni reali. I giocatori di S possono connettersi al nodo v_0 utilizzando solo archi i cui estremi appartengano all'insieme $S \cup \{0\}$ oppure possono utilizzare tutti gli archi del grafo, al fine di ridurre maggiormente il costo; in questo secondo caso il gioco risulta essere monotono, cioè se si aggiungono giocatori ad una

(2) In un gioco di costi, come i giochi di connessione, la funzione caratteristica viene solitamente indicata con c e le relazioni del nucleo vengono scritte come $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$, $\forall S \subset N$ e $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$.

coalizione il costo non diminuisce, mentre nel primo caso il costo può anche diminuire.

ESEMPIO 3.1. – *Si consideri la seguente situazione di connessione*:



In questo caso il gioco di connessione monotono assegna alle coalizioni i seguenti valori:

$$c(\emptyset) = 0,\ c(\{1\}) = 2,\ c(\{2\}) = 3,\ c(\{1, 2\}) = 3$$

mentre il gioco non monotono assegna alle coalizioni i seguenti valori:

$$c(\emptyset) = 0,\ c(\{1\}) = 2,\ c(\{2\}) = 4,\ c(\{1, 2\}) = 3$$

in quanto la coalizione $\{2\}$ *non può utilizzare gli archi* a_{01} *e* a_{12}. ■

Il gioco monotono si presta a modellare situazioni tipo le connessioni telefoniche che possono utilizzare comunque il collegamento di costo minimo, mentre il gioco non monotono può rappresentare le connessioni idriche, nelle quali non è possibile utilizzare il collegamento meno costoso senza permesso.

Anche i giochi di connessione hanno nucleo non vuoto e un'allocazione nel nucleo può essere ottenuta con la regola di Bird [3] secondo la quale, dato un albero ricoprente di costo minimo con radice in v_0, si assegna a ciascun giocatore il costo dell'ultimo arco del cammino che congiunge la radice al giocatore stesso utilizzando gli archi dell'albero ricoprente. Nell'Esempio 3.1 la regola di Bird assegna 2 al giocatore 1 e 1 al giocatore 2.

3.3. *Giochi di sequenziamento.*

Per descrivere un problema di sequenziamento si può fare riferimento ad un insieme $N = \{1, \dots, n\}$ di strumenti che devono essere riparati. Per ogni strumento sono noti il tempo necessario per la riparazione $t_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ e il costo di fermo per unità di tempo $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Dato un ordine di riparazione σ lo strumento i viene riparato dopo tutti i suoi predecessori, il cui insieme può essere indicato con $P(\sigma, i)$, per cui si ha un costo $\alpha_i \left(t_i + \sum_{j \in P(\sigma, i)} t_j \right)$ e quindi il costo dell'ordinamento σ può essere indicato con:

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \left(\alpha_i \left(t_i + \sum_{j \in P(\sigma, i)} t_j \right) \right).$$

Il problema consiste nel determinare un ordinamento di costo minimo.

Un ben noto risultato di Smith [35] ci dice che il problema può essere risolto semplicemente riordinando gli strumenti per indici di urgenza non crescenti, dove per lo strumento $i = 1, \ldots, n$ l'indice di urgenza è $u_i = \frac{\alpha_i}{t_i}$.

Se gli strumenti appartengono ad agenti differenti, il riordinamento è possibile solo se gli agenti si accordano, per cui si può definire un gioco TU (vedi [8]) che assegna ad ogni coalizione S il massimo guadagno che i giocatori possono ottenere con un ordinamento σ scelto nell'insieme Σ^S degli ordinamenti ammissibili per i giocatori di S, cioè quando i riordinamenti non includono giocatori che non fanno parte di S; detto σ_0 l'ordinamento iniziale si ha:

$$v(S) = C_{\sigma_0} - \min_{\sigma \in \Sigma^S} \{C_\sigma\}, \quad S \subseteq N.$$

Anche i giochi di sequenziamento hanno nucleo non vuoto e un'allocazione nel nucleo può essere determinata tramite una semplice regola nota come *Equal Gain Splitting* (EGS) [8]. Questa regola parte dall'osservazione che l'ordinamento ottimale può essere ottenuto tramite una serie di scambi tra due giocatori; detto $g_{ij} = \max\{\alpha_i t_j - \alpha_j t_i, 0\}$ il guadagno dello scambio tra i giocatori i e j la EGS assegna ai due giocatori i e j metà del guadagno ciascuno. Indicando con $S(\sigma, i)$ l'insieme dei successori di i nell'ordinamento σ, si ha:

$$EGS_i = \frac{1}{2} \sum_{j \in P(\sigma, i)} g_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j \in S(\sigma, i)} g_{ij}, \quad i \in N$$

OSSERVAZIONE 3.1. – *Il calcolo delle soluzioni proposte per ciascuno dei tre giochi precedentemente presentati non richiede la conoscenza della funzione caratteristica del gioco. Questo aspetto è importante se si pensa che la funzione caratteristica deve essere determinata per* 2^n *coalizioni, con uno sforzo computazionale non indifferente.*

È opportuno notare che gli *Operation Research Games* possono utilizzare nella soluzione dei sottoproblemi che definiscono il valore di ogni coalizione gli algoritmi disponibili per la soluzione dei corrispondenti problemi di Ricerca Operativa; questo permette di costruire in modo efficiente la funzione caratteristica del gioco, qualora fosse necessario.

Concludiamo il capitolo ricordando altre classi di giochi, derivanti dai più classici problemi della Ricerca Operativa, che fanno parte degli ORG e che non abbiamo potuto descrivere per ragioni di spazio: flusso massimo [18], manutenzione di una connessione [4], connessione a più servizi [20], cammino minimo [12], trasporto [30], assegnazione [34], permutazione [39], commesso viaggiatore [28], postino cinese [17], PERT [6], magazzino [23] e [38] e livellamento delle risorse [13]. Per una trattazione più ampia rinviamo a [5] e [7].

4. – Conclusioni.

Esistono altre classi di giochi cooperativi a utilità trasferibile molto studiate e che si prestano a rappresentare situazioni economiche molto diffuse che non rientrano negli ORG; possiamo ricordare i giochi di bancarotta [24], i giochi di comunicazione [27], i giochi di mercato [36]. Infine, possiamo dire che la teoria dei giochi si espande a sempre nuovi problemi, tra questi citiamo la configurazione ottima di una rete di telecomunicazione di tipo wireless, in cui la teoria dei giochi permette di cogliere ed analizzare aspetti di interazione strategica. L'approccio seguito dagli autori per affrontare questo nuovo problema comprende giochi non cooperativi [14], giochi bayesiani [40] e giochi cooperativi a utilità non trasferibile [11].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] R. J. Aumann - M. Maschler, *The Bargaining Set for Cooperative Games*, in Advances in Game Theory (Annals of Mathematics Studies, 52) (Dresher M, Shapley LS, Tucker AW eds.), Princeton, Princeton University Press, 443-476 (1964).

[2] J. F. Banzhaf, *Weighted Voting doesn't Work: A Mathematical Analysis*, Rutgers Law Review, **19** (1965), 317-343.

[3] C. Bird, *On Cost Allocation for a Spanning Tree: A Game Theoretic Approach*, Networks, **6** (1976), 335-350.

[4] E. Bjørndal - M. Koster - S. Tijs, *Weighted Allocation Rules for Standard Fixed Tree Games*, CentER Discussion Paper 79, Tilburg University (1999).

[5] P. Borm - H. Hamers - R. Hendrickx, *Operations Research Games: A Survey*, TOP, **9** (2001), 139-216.

[6] R. Branzei - G. Ferrari - V. Fragnelli - S. Tijs, *Two Approaches to the Problem of Sharing Delay Costs in Joint Projects*, Annals of Operations Research, **109** (2002), 359-374.

[7] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands (1997).

[8] I. Curiel - G. Pederzoli - S. Tijs, *Sequencing Games*, European Journal of Operations Research, **7** (40) (1989), 344-351.

[9] M. Davis - M. Maschler, *The Kernel of a Cooperative Game*, Naval Research Logistics Quarterly, **12** (1965), 223-259.

[10] J. Deegan - E. W. Packel, *A New Index of Power for Simple n-Person Games*, International Journal of Game Theory, **7** (1978), 113-123.

[11] R. Delpiano, *Tesi di laurea*, Corso di Laurea in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria, Politecnico di Torino (2003).

[12] V. Fragnelli - I. Garcia-Jurado - L. Mendez-Naya, *On Shortest Path Games*, Mathematical Methods of Operations Research, **52** (2000), 139-216.

[13] V. Fragnelli - I. Garcia-Jurado - L. Mendez-Naya, *A Note on Bus Games*, Economics Letters, **82** (2004), 99-106.

[14] F. Garin, *Tesi di laurea*, Corso di Laurea in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria, Politecnico di Torino (2002).

[15] D. B. Gillies, *Some Theorems on n-person Games*, PhD Thesis, Princeton University (1953).

[16] D. Granot - G. Huberman, *Minimum Cost Spanning Tree Games*, Mathematical Programming, **21** (1981), 1-18.

[17] H. Hamers - P. Borm - R. van de Leensel - S. Tijs, *Cost Allocation*

in the Chinese Postman Problem, European Journal of Operations Research, **118** (1999), 153-163.

[18] E. KALAI - E. ZEMEL, *Totally Balanced Games and Games of Flow*, Mathematics of Operations Research, **7** (1982), 476-478.

[19] J. B. KRUSKAL, *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem*, Proceedings of the American Mathematical Society, **7** (1956), 48-50.

[20] J. KUIPERS, *Minimum Cost Forest Games*, International Journal of Game Theory, **26** (1997), 367-377.

[21] M. LI CALZI, *Un eponimo ricorrente: Nash e la teoria dei giochi*, Bollettino UMI, sez. A, **6** (2003), 3-26.

[22] S. C. LITTLECHILD - G. OWEN, *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case*, Management Science, **20** (1973), 370-372.

[23] A. MECA - J. TIMMER - I. GARCA-JURADO - P. BORM, *Inventory Games*, European Journal of Operational Research, **156** (2004), 127-139.

[24] B. O'NEILL, *A Problem of Rights Arbitration from the Talmud*, Mathematical Social Sciences, **2** (1984), 345-371.

[25] G. OWEN, *On the Core of Linear Production Games*, Mathematical Programming, **9** (1975), 358-370.

[26] G. OWEN, *Values of Games with a Priori Unions*, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, **141** (1977), 76-88.

[27] G. PEDERZOLI, *Communication games*, Control and Cybernetics, **20** (1991), 67-86.

[28] J. A. M. POTTERS - I. CURIEL - S. TIJS, *Traveling Salesman Games*, Mathematical Programming, **53** (1992), 199-211.

[29] R. C. PRIM, *Shortest Connection Networks and Some Generalizations*, Bell System Technical Journal, **36** (1957), 1389-1401.

[30] J. SANCHEZ-SORIANO - M. A. LOPEZ - I. GARCIA-JURADO, *On the Core of Transportation Games*, Mathematical Social Sciences, **41** (2001), 215-225.

[31] D. SCHMEIDLER, *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, **17** (1969), 1163-1170.

[32] L. S. SHAPLEY, *A Value for n-Person Games*, in Contributions to the Theory of Games, Vol II (Annals of Mathematics Studies 28) (Kuhn HW, Tucker AW eds.), Princeton University Press, Princeton, USA: 307-317 (1953).

[33] L. S. SHAPLEY - M. SHUBIK, *A Method for Evaluating The Distribution of Power in a Committee System*, American Political Science Review, **48** (1954), 787-792.

[34] L. S. SHAPLEY - M. SHUBIK, *The Assignment Game I: The Core*, International Journal of Game Theory, **7** (1) (1972), 111-130.

[35] W. SMITH, *Various Optimizer for Single-Stage Production*, Naval Research Logistics Quarterly, **3** (1956), 59-66.

[36] M. SHUBIK, *Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games*, Wiley, New York, USA (195).
[37] P. D. STRAFFIN - J. P. HEANEY, *Game Theory and the Tennessee Valley Authority*, Management Science, **32** (1986), 1015-1028.
[38] S. TIJS - A. MECA - M. A. LOPEZ, *Benefit Sharing in Holding Situations*, di prossima pubblicazione su European Journal of Operational Research (2004).
[39] S. TIJS - T. PARTHASARATHY - J. POTTERS - R. PRASAD, *Permutation Games: Another Class of Totally Balanced Games*, OR Spektrum, **6** (1984), 119-123.
[40] I. VARIO, *Tesi di laurea*, Corso di Laurea in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria, Politecnico di Torino.
[41] J. VON NEUMANN - O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior (2nd ed. 1947, 3rd ed. 1953)*, Princeton University Press, Princeton, USA (1944).

Vito Fragnelli, Dipartimento di Scienze e Tecnologie Avanzate
Università del Piemonte Orientale, Piazza Giorgio Ambrosoli 5, 15100 Alessandria
E-mail: vito.fragnelli@mfn.unipmn.it

Roberto Tadei, Dipartimento di Automatica e Informatica
Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino
E-mail: roberto.tadei@polito.it