
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RAFFAELE MARCOVECCHIO

Determinanti polinomiali-esponenziali

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-B (2004),
n.3, p. 713–730.*

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_3_713_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Determinanti polinomiali-esponenziali.

RAFFAELE MARCOVECCHIO

Summary. – Given $m = 2$ or $m = 3$ non-zero algebraic numbers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ such that α_j/α_l is not a root of unity for any $j \neq l$, we consider a class of generalized Vandermonde determinants of order four $G(\alpha; \mathbf{x})$, as $\mathbf{x}$ runs over $\mathbb{Z}^4$, involved in some Diophantine problems. We derive an explicit upper bound $N(d)$ for the number of solutions $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ in general position of the inhomogeneous polynomial-exponential equation $G(\alpha; 0, \mathbf{y}) = 0$, where the constant $N(d)$ depends only on $d = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : \mathbb{Q}]$.

Sunto. – Dati $m = 2$ o $m = 3$ numeri algebrici non nulli $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tali che α_j/α_l non è una radice dell'unità per ogni $j \neq l$, consideriamo una classe di determinanti di Vandermonde generalizzati di ordine quattro $G(\alpha; \mathbf{x})$, al variare di $\mathbf{x}$ in $\mathbb{Z}^4$, connessa con alcuni problemi diofantei. Dimostriamo che il numero delle soluzioni $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ in posizione generica dell'equazione polinomiale-esponenziale disomogenea $G(\alpha; 0, \mathbf{y}) = 0$ non supera una costante esplicita $N(d)$ dipendente solo da $d = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) : \mathbb{Q}]$.

1. – Introduzione.

Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0. Un'equazione *polinomiale-esponenziale* è un'equazione della forma

$$(1.1) \quad \sum_{l=1}^n P_l(\mathbf{x}) \alpha_l^{\mathbf{x}} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}^s$$

dove $\alpha_l = (\alpha_{l1}, \dots, \alpha_{ls}) \in (\mathbb{K}^\times)^s$, $\alpha_l^{\mathbf{x}} = \alpha_{l1}^{x_1} \dots \alpha_{ls}^{x_s}$ e $P_1, \dots, P_n$ sono polinomi in s variabili a coefficienti in $\mathbb{K}$.

L'equazione (1.1) si dice *puramente esponenziale* se tutti i polinomi P_l sono costanti.

Una famiglia notevole di equazioni puramente esponenziali è stata recente-

mente studiata da Schlickewei e Viola [7], precisamente quelle del tipo

$$(1.2) \quad F(x_1, \dots, x_k) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_k; x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & \cdots & \alpha_k^{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{x_k} & \cdots & \alpha_k^{x_k} \end{vmatrix} = 0$$

in cui $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}^\times$ sono tali che α_j/α_l non è una radice dell'unità per ogni $j \neq l$. Si osservi che F generalizza il determinante di Vandermonde:

$$(1.3) \quad F(0, 1, \dots, k-1) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \prod_{1 \leq j < l \leq k} (\alpha_l - \alpha_j).$$

Inoltre vale l'identità

$$(1.4) \quad F(x_1, \dots, x_k) = (\alpha_1 \cdots \alpha_k)^{x_1} F(0, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1);$$

è quindi sufficiente studiare la (1.2) nel caso $x_1 = 0$.

Per quest'ultima vale il seguente

TEOREMA 1.1 (Schlickewei e Viola [7]). – *Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}^\times$ tali che α_j/α_l non è una radice dell'unità per ogni $j \neq l$. Allora l'equazione*

$$(1.5) \quad F(0, y_2, \dots, y_k) = 0$$

ha al più $\exp((6k!)^{3k!})$ soluzioni $(y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k-1}$ in posizione generica, tali cioè che nessun sottodeterminante proprio di $F(0, y_2, \dots, y_k)$ si annulli.

La rilevanza dell'equazione (1.5) è ben nota: si vedano anche le applicazioni al problema di Posner e Rumsey in Schlickewei e Viola [5] e [6].

Il nostro obiettivo è studiare una classe di equazioni polinomiali-esponenziali che generalizza (1.2).

Siano $k \geq m \geq 1$ interi, e siano $r_1, \dots, r_m$ interi positivi tali che

$$(1.6) \quad r_1 + \cdots + r_m = k.$$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^\times$. Sia $G(\mathbf{x}) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_m; r_1, \dots, r_m; x_1, \dots, x_k)$ la funzione di variabili intere $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ definita mediante il seguente determinante di ordine k :

$$(1.7) \quad G(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & \cdots & x_1^{r_1-1} \alpha_1^{x_1} & \cdots & \alpha_m^{x_1} & \cdots & x_1^{r_m-1} \alpha_m^{x_1} \\ \alpha_1^{x_2} & \cdots & x_2^{r_1-1} \alpha_1^{x_2} & \cdots & \alpha_m^{x_2} & \cdots & x_2^{r_m-1} \alpha_m^{x_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{x_k} & \cdots & x_k^{r_1-1} \alpha_1^{x_k} & \cdots & \alpha_m^{x_k} & \cdots & x_k^{r_m-1} \alpha_m^{x_k} \end{vmatrix}.$$

Si noti che se $m = k$, e quindi $r_1 = \dots = r_m = 1$, allora G coincide con F ; se $m = 1$, e quindi $r_1 = k$, allora

$$(1.8) \quad G(x_1, \dots, x_k) = \alpha_1^{x_1 + \dots + x_k} V(x_1, \dots, x_k).$$

Quindi G generalizza simultaneamente

$$F(x_1, \dots, x_k), \quad V(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \text{ e } V(x_1, \dots, x_k).$$

La G soddisfa inoltre l'identità

$$(1.9) \quad G(x_1, \dots, x_k) = (\alpha_1^{r_1} \dots \alpha_m^{r_m})^{x_1} G(0, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1),$$

che estende la (1.4). Infatti, sviluppando $(x_1 + (x_j - x_1))^{l-1}$ per ogni $j = 1, \dots, k$ e per ogni $l = 2, \dots, r_1$, si trova che la l -esima colonna del determinante (1.7), ovvero ${}^t(x_1^{l-1} \alpha_1^{x_1}, \dots, x_k^{l-1} \alpha_1^{x_k})$, è la somma di

$${}^t(0, (x_2 - x_1)^{l-1} \alpha_1^{x_2}, \dots, (x_k - x_1)^{l-1} \alpha_1^{x_k})$$

più una combinazione lineare delle colonne precedenti. Ripetendo l'osservazione sui successivi $m - 1$ blocchi di colonne si ottiene:

$$(1.10) \quad G(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \alpha_1^{x_2} & (x_2 - x_1) \alpha_1^{x_2} & \dots & (x_2 - x_1)^{r_1-1} \alpha_1^{x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \alpha_1^{x_k} & (x_k - x_1) \alpha_1^{x_k} & \dots & (x_k - x_1)^{r_1-1} \alpha_1^{x_k} & \dots \end{vmatrix}.$$

A questo punto, portando a fattore $\alpha_1^{x_1}$ nelle prime r_1 colonne, $\alpha_2^{x_2}$ nelle successive r_2 colonne, e così via, si ottiene la (1.9). Non è quindi restrittivo, nello studio dell'equazione

$$(1.11) \quad G(\mathbf{x}) = 0,$$

supporre $x_1 = 0$.

Un ragionamento simile al precedente mostra inoltre che il determinante (1.7) è uguale all'analogo determinante che si ottiene da (1.7) sostituendo, in ciascuna colonna, alla potenza x_j^{l-1} ($j = 1, \dots, k$) polinomi monici $P_l(x_j)$ di grado $l - 1$, con P_l indipendente da j .

Definiamo ora

$$(1.12) \quad \tilde{G}(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{vmatrix} \binom{x_1}{0} \alpha_1^{x_1} & \cdots & \binom{x_1}{r_1-1} \alpha_1^{x_1-r_1+1} & \cdots & \binom{x_1}{0} \alpha_m^{x_1} & \cdots & \binom{x_1}{r_m-1} \alpha_m^{x_1-r_m+1} \\ \binom{x_2}{0} \alpha_1^{x_2} & \cdots & \binom{x_2}{r_1-1} \alpha_1^{x_2-r_1+1} & \cdots & \binom{x_2}{0} \alpha_m^{x_2} & \cdots & \binom{x_2}{r_m-1} \alpha_m^{x_2-r_m+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \binom{x_k}{0} \alpha_1^{x_k} & \cdots & \binom{x_k}{r_1-1} \alpha_1^{x_k-r_1+1} & \cdots & \binom{x_k}{0} \alpha_m^{x_k} & \cdots & \binom{x_k}{r_m-1} \alpha_m^{x_k-r_m+1} \end{vmatrix}.$$

Si osservi che $\tilde{G}(0, \dots, k-1)$ è il determinante introdotto da Méray [3], il quale ha dimostrato la formula seguente che estende la (1.3):

$$(1.13) \quad \tilde{G}(0, \dots, k-1) = \prod_{1 \leq h < i \leq m} (\alpha_i - \alpha_h)^{r_h r_i}.$$

La (1.13) ha ben note applicazioni diofantee: si vedano ad esempio quelle di Amoroso [1] anche intorno al famoso *problema di Lehmer*. È facile vedere che il determinante (1.12) è collegato al determinante (1.7). Si ha infatti, applicando un'osservazione fatta sopra,

$$G(x_1, \dots, x_k) = D \tilde{G}(x_1, \dots, x_k),$$

dove

$$D = \prod_{i=1}^m \left(\alpha_i^{r_i(r_i-1)/2} \prod_{l=1}^{r_i} (l-1)! \right).$$

Supponiamo d'ora in avanti che $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^\times$ soddisfino la condizione seguente:

$$(1.14) \quad \alpha_h / \alpha_i \text{ non è una radice dell'unità per ogni } h \neq i.$$

Un sottodeterminante Δ di $G(\alpha_1, \dots, \alpha_m; r_1, \dots, r_m; x_1, \dots, x_k)$ si dice *ben messo* se è anch'esso della forma (1.7), ovvero se esistono interi positivi $m', i_1, \dots, i_{m'}, r'_1, \dots, r'_{m'}, k', j_1, \dots, j_{k'}$, con $1 \leq m' \leq m, 1 \leq i_1 < \dots < i_{m'} \leq m, 1 \leq r'_h \leq r_{i_h}$ per ogni $h = 1, \dots, m', k' = r'_1 + \dots + r'_{m'}, 1 \leq j_1 < \dots < j_{k'} \leq k$, per i quali

$$\Delta = G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{m'}}; r'_1, \dots, r'_{m'}; x_{j_1}, \dots, x_{j_{k'}}).$$

Diciamo anche che una soluzione $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k$ di (1.11) è in *posizione generica* se essa non annulla nessun sottodeterminante proprio ben messo

Δ di $G(x_1, \dots, x_k) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_m; r_1, \dots, r_m; x_1, \dots, x_k)$. La definizione precedente generalizza quella data in [7] per le soluzioni di (1.2).

È una questione naturale chiedersi se e come il teorema 1.1 si estenda all'equazione $G(0, y_2, \dots, y_k) = 0$ quando $1 < m < k$. Il teorema seguente risponde a questo quesito quando $\mathbb{K}$ è un campo di numeri e $k = 4$:

TEOREMA 1.2. – *Sia $\mathbb{K}$ un campo di numeri di grado d , siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^\times$ tali da soddisfare la (1.14), con $2 \leq m \leq 3$. Allora l'equazione*

$$G(0, y_2, y_3, y_4) = 0$$

ha al più

$$2^{2^{25}} d^{38400}$$

soluzioni $(y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^3$ in posizione generica.

Per dimostrarlo utilizziamo un risultato di Schlickewei e Schmidt [4]. Supponiamo, tornando all'equazione generale (1.1), che $\mathbb{K}$ sia un campo di numeri di grado d , e siano $\delta_1, \dots, \delta_n$ i gradi totali dei polinomi $P_1, \dots, P_n$ rispettivamente. Poniamo:

$$A = \sum_{l=1}^n \binom{s + \delta_l}{s}, \quad B = \max(s, A).$$

Sia $\mathcal{P}$ una partizione dell'insieme $\Lambda = \{1, \dots, n\}$, e indichiamo con $|\mathcal{P}|$ la cardinalità di $\mathcal{P}$. Se $p, q \in \Lambda$, scriviamo $p \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} q$ se esiste $\lambda \in \mathcal{P}$ tale che $p, q \in \lambda$. Ogni soluzione di (1.1) soddisfa un sistema di $|\mathcal{P}|$ equazioni

$$(1.1) \quad \mathcal{P} \quad \sum_{l \in \lambda} P_l(\mathbf{x}) \alpha_l^x = 0 \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathcal{P}$$

per qualche partizione $\mathcal{P}$ di Λ . Se $\mathcal{Q}$ è un raffinamento di $\mathcal{P}$, allora (1.1 $\mathcal{Q}$) implica (1.1 $\mathcal{P}$). Denotiamo con $S(\mathcal{P})$ l'insieme delle soluzioni di (1.1 $\mathcal{P}$) che non soddisfano (1.1 $\mathcal{Q}$) per nessun raffinamento proprio $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{P}$. Sia $G(\mathcal{P})$ il sottogruppo del gruppo additivo $\mathbb{Z}^s$ formato dai vettori $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_s)$ tali che

$$\alpha_p^{\mathbf{z}} = \alpha_q^{\mathbf{z}} \quad \text{per ogni } p \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} q.$$

TEOREMA 1.3 (Schlickewei e Schmidt [4]). – *Se $G(\mathcal{P}) = \{\mathbf{0}\}$, allora la cardinalità $|S(\mathcal{P})|$ dell'insieme $S(\mathcal{P})$ soddisfa*

$$(1.15) \quad |S(\mathcal{P})| < N(d, B) = 2^{35B^3} d^{6B^2}.$$

In sintesi, il procedimento utilizzato in [7] per dimostrare il teorema 1.1 è il seguente. In primo luogo, applicando un risultato di Evertse, Schlickewei

e Schmidt [2] sulle equazioni lineari nei gruppi moltiplicativi finitamente generati, si ottiene il seguente

TEOREMA 1.4 ([7], Lemma 4.2). – *Siano $a_1, \dots, a_n$ elementi non nulli di un campo $\mathbb{K}$ di caratteristica 0. Se $G(\mathcal{P}) = \{0\}$, allora l'equazione*

$$(1.16) \quad a_1 \alpha_1^x + \dots + a_n \alpha_n^x = 0$$

del tipo (1.1) ha al più $\exp(6(n-1)^{3(n-1)}(s+1))$ soluzioni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ in $S(\mathcal{P})$.

In secondo luogo, scrivendo il determinante $F(0, y_2, \dots, y_k)$ come somma su tutte le permutazioni degli indici $1, \dots, k$, si dimostra che se $\mathcal{P}$ è una partizione del gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_k$ tale che $G(\mathcal{P}) \neq \{0\}$ allora l'unione di alcuni elementi di $\mathcal{P}$ ha un'opportuna struttura.

Nel paragrafo 2 applicheremo il teorema 1.3 alla (1.11), estendendo la prima parte del metodo di Schlickewei e Viola. Nel paragrafo 3 estenderemo la seconda parte del loro metodo alle partizioni $\mathcal{P}$ di un opportuno insieme $\mathfrak{F}_k$ tali che $G(\mathcal{P}) \neq \{0\}$. Nel paragrafo 4 concluderemo la dimostrazione.

Desidero esprimere la mia sincera gratitudine al Professor Viola per la sua generosa assistenza durante la preparazione di questo lavoro.

2. – Applicazione del teorema 1.3.

Vogliamo scrivere l'equazione (1.11) nella forma (1.1), con un numero n di addendi più piccolo possibile. A questo scopo sviluppiamo il determinante (1.7) con la regola di Laplace lungo i blocchi di $r_1, \dots, r_m$ colonne, e quindi utilizziamo la (1.8) per ciascun sottodeterminante di (1.7) contenuto in ciascun blocco.

Nell'insieme $\{1, \dots, k\}$ scegliamo r_1 elementi qualsiasi $h_1, \dots, h_{r_1}$ in ordine crescente: $h_1 < \dots < h_{r_1}$. Fra i rimanenti $k - r_1$ elementi di $\{1, \dots, k\}$ scegliamone r_2 qualsiasi in ordine crescente: $h_{r_1+1} < \dots < h_{r_1+r_2}$. Proseguiamo in tal modo, fino ad avere gli ultimi r_m elementi in ordine crescente: $h_{r_1+\dots+r_{m-1}+1} < \dots < h_{r_1+\dots+r_m} = h_k$. Associamo agli interi $h_1, \dots, h_k$ così scelti l'applicazione surgettiva $\sigma: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tale che

$$\sigma(h_1) = \dots = \sigma(h_{r_1}) = 1, \dots, \sigma(h_{r_1+\dots+r_{m-1}+1}) = \dots = \sigma(h_k) = m.$$

Indichiamo con $\mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}_{k; r_1, \dots, r_m}$ l'insieme delle applicazioni surgettive σ del tipo indicato sopra. Osserviamo che

$$|\mathfrak{F}_k| = \frac{k!}{r_1! \dots r_m!}.$$

Inversamente, per ogni $\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_k$ indichiamo con $h_1^\sigma, \dots, h_k^\sigma$ il riordinamento degli interi $1, \dots, k$ associato a σ nel modo suindicato, con χ_σ la permutazione di $1, \dots, k$ tale che

$$\chi_\sigma(h_j^\sigma) = j \text{ per ogni } j = 1, \dots, k,$$

e con $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ il segno di χ_σ . In particolare, se $m=k$ allora $\chi_\sigma = \sigma$.

Sviluppiamo il determinante $G(\mathbf{x})$ con la regola di Laplace:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \sum_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^m G(\alpha_i; r_i; x_{h_{r_1+\dots+r_{i-1}+1}}^\sigma, \dots, x_{h_{r_1+\dots+r_i}}^\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_k} Q_\sigma(\mathbf{x}) \alpha_\sigma^x \end{aligned}$$

dove, per la (1.8),

$$\alpha_\sigma = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(k)}),$$

$$Q_\sigma(\mathbf{x}) = \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{1 \leq j < l \leq k \\ \sigma(j) = \sigma(l)}} (x_l - x_j).$$

Per ogni $\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_k$ il grado totale del polinomio $Q_\sigma(\mathbf{x})$ è

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i(r_i - 1),$$

e quindi è indipendente da σ . Come spiegato nell'introduzione, non è restrittivo studiare le soluzioni $\mathbf{y} = (0, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^k$ dell'equazione

$$(2.1) \quad \sum_{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_k} Q_\sigma(0, y_2, \dots, y_k) \alpha_{\sigma(2)}^{y_2} \cdots \alpha_{\sigma(k)}^{y_k} = 0.$$

Ogni soluzione di (2.1) soddisfa

$$(2.1 \text{ } \mathcal{P}) \quad \sum_{\sigma \in \lambda} Q_\sigma(\mathbf{y}) \alpha_\sigma^{\mathbf{y}} = 0 \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathcal{P}$$

per qualche partizione $\mathcal{P}$ di $\tilde{\mathfrak{S}}_k$. Da qui in poi indichiamo con $G(\mathcal{P})$ il sottogruppo del gruppo additivo $\mathbb{Z}^k$ formato dai vettori $\mathbf{z} = (0, z_2, \dots, z_k)$ per i quali

$$\alpha_\sigma^{\mathbf{z}} = \alpha_\tau^{\mathbf{z}} \text{ per ogni } \sigma, \tau \in \tilde{\mathfrak{S}}_k \text{ tali che } \sigma \stackrel{\mathcal{P}}{\sim} \tau$$

e con $\mathcal{S}(\mathcal{P})$ l'insieme delle soluzioni di (2.1 $\mathcal{P}$) che non soddisfano (2.1 $\mathcal{Q}$) per nessun raffinamento proprio $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{P}$.

Scegliamo ora

$$(2.2) \quad \begin{aligned} s &= k - 1 \\ A &= \binom{s + \delta}{s} \frac{k!}{r_1! \cdots r_m!} \\ B &= \max \{A, s\} = A. \end{aligned}$$

Tenuto conto che il numero delle partizioni di un insieme di cardinalità n non supera n^n , e applicando la disuguaglianza (1.15) con i valori (2.2), per provare il teorema 1.2 è sufficiente dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 2.1. — *Se $k = 4$, $2 \leq m \leq 3$ e $G(\mathcal{P}) \neq \{0\}$, allora ogni soluzione di (2.1) $\mathcal{P}$ non è in posizione generica.*

3. — Partizioni.

Nel seguito $\mathbb{K}$ sarà visto come un campo qualsiasi di caratteristica 0, non necessariamente un campo di numeri. In questo paragrafo k è un intero qualsiasi maggiore di 1, ed m è tale che $2 \leq m \leq k$. Nel paragrafo successivo ci restringeremo al caso $k = 4$, $2 \leq m \leq 3$.

LEMMA 3.1. — *A meno di riordinare $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, se $\mathcal{P}$ è una partizione di $\mathfrak{F}_k$ e $\mathbf{z} = (0, z_2, \dots, z_k) = (z_1, \dots, z_k) \in G(\mathcal{P})$, allora, detto λ_z l'insieme degli elementi $\sigma \in \mathfrak{F}_k$ che verificano*

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \max \{z_{h_{r_1}^\sigma + \dots + r_{i-1} + 1}, \dots, z_{h_{r_1}^\sigma + \dots + r_i}\} \leq \\ \min \{z_{h_{r_1}^\sigma + \dots + r_i + 1}, \dots, z_{h_{r_1}^\sigma + \dots + r_{i+1}}\} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

ogni soluzione $\mathbf{y} = (0, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^k$ di (2.1) $\mathcal{P}$ soddisfa

$$(3.2) \quad \sum_{\sigma \in \lambda_z} Q_\sigma(\mathbf{y}) \alpha_\sigma = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. — (Seguendo [7]) Siano $\delta_1, \dots, \delta_m \in \mathbb{K}^\times$ elementi moltiplicativamente indipendenti tali che

$$(3.3) \quad \alpha_i = \zeta_i \delta_1^{a_{i1}} \cdots \delta_m^{a_{im}} \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

dove $a_{i1}, \dots, a_{im}$ sono opportuni interi e $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ sono radici dell'unità. Siano $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$. Per la (1.14) i vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ sono tutti distinti. Esiste quindi un vettore non nullo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ tale che i prodotti interni $c_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}$ siano distinti. A meno di riordinare $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ possiamo supporre

$$(3.4) \quad c_1 < \dots < c_m.$$

Sostituendo (3.3) nella $\mathbf{a}_\sigma^z = \mathbf{a}_\tau^z$ e confrontando gli esponenti, si ottiene

$$(3.5) \quad z_1 \mathbf{a}_{\sigma(1)} + \cdots + z_k \mathbf{a}_{\sigma(k)} = z_1 \mathbf{a}_{\tau(1)} + \cdots + z_k \mathbf{a}_{\tau(k)} \quad \text{per ogni } \sigma \sim \tau \quad \mathcal{P}.$$

Il prodotto interno per il vettore $\mathbf{u}$ dà

$$(3.6) \quad z_1 c_{\sigma(1)} + \cdots + z_k c_{\sigma(k)} = z_1 c_{\tau(1)} + \cdots + z_k c_{\tau(k)} \quad \text{per ogni } \sigma \sim \tau \quad \mathcal{P}.$$

Sia ora $\sigma_z^* \in \mathfrak{F}_k$ un elemento che verifica la (3.1), e sia $\lambda_z \subset \mathfrak{F}_k$ l'insieme degli elementi $\sigma \in \mathfrak{F}_k$ tali che

$$z_1 c_{\sigma(1)} + \cdots + z_k c_{\sigma(k)} = z_1 c_{\sigma_z^*(1)} + \cdots + z_k c_{\sigma_z^*(k)}.$$

Per la (3.6) abbiamo $\lambda_z = \lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_q$ per opportuni insiemi $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathcal{P}$. Resta da dimostrare che λ_z è l'insieme delle $\sigma \in \mathfrak{F}_k$ che soddisfano la (3.1). Si consideri infatti, al variare di $\tau \in \mathfrak{F}_k$, la quantità

$$(3.7) \quad z_1 c_{\tau(1)} + \cdots + z_k c_{\tau(k)} = \\ (z_{h_1^\tau} + \cdots + z_{h_{r_1}^\tau}) c_1 + \cdots + (z_{h_{r_1+\dots+r_{m-1}+1}^\tau} + \cdots + z_{h_k^\tau}) c_m.$$

Per la (3.4), σ soddisfa la (3.1) se e solo se la quantità (3.7) è massimale per $\tau = \sigma$. Da questo e dalla (3.6) segue che λ_z è l'insieme delle $\sigma \in \mathfrak{F}_k$ che soddisfano la (3.1), come si voleva. ■

LEMMA 3.2. — Sia $\mathcal{P}$ una partizione di $\mathfrak{F}_k$ con $G(\mathcal{P}) \neq \{0\}$, e sia $\mathbf{z} = (0, z_2, \dots, z_k) = (z_1, \dots, z_k) \in G(\mathcal{P})$ con $z_2, \dots, z_k$ non tutti nulli. Sia $w_1, \dots, w_k$ un riordinamento di $z_1, \dots, z_k$ tale che

$$(3.8) \quad w_1 \leq \dots \leq w_k.$$

Supponiamo che per ogni $i = 1, \dots, m-1$ si abbia

$$(3.9) \quad w_{r_1+\dots+r_i} < w_{r_1+\dots+r_i+1} \quad \text{oppure} \quad w_{r_1+\dots+r_{i-1}+1} = \dots = w_{r_1+\dots+r_{i+1}}.$$

Allora ogni soluzione di (2.1) $\mathcal{P}$ non è in posizione generica.

DIMOSTRAZIONE. — Possiamo supporre che $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ siano ordinati come nel lemma precedente. Siano $i_1, \dots, i_t$ gli interi i tra 1 ed $m-1$ tali che

$$w_{r_1+\dots+r_i} < w_{r_1+\dots+r_i+1}.$$

Per ipotesi si ha $t \geq 1$. Consideriamo la partizione dell'insieme $\{1, \dots, m\}$

$$\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_{t+1}\} = \{\{1, \dots, i_1\}, \dots, \{i_t+1, \dots, m\}\}.$$

Poniamo $j_l = r_1 + \dots + r_{i_l}$ ($l = 1, \dots, t$), e consideriamo la partizione dell'insie-

me $\{1, \dots, k\}$

$$\{\eta_1, \dots, \eta_{t+1}\} = \{\{1, \dots, j_1\}, \dots, \{j_t + 1, \dots, k\}\}.$$

Sia $\{\xi_1, \dots, \xi_{t+1}\}$ un'altra partizione di $\{1, \dots, k\}$, definita da

$j \in \xi_l$ se $z_j = w_j$, per qualche $j' \in \eta_l$, per ogni $l = 1, \dots, t+1; j = 1, \dots, k$.

In virtù della (3.9), $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ soddisfa la (3.1) se e solo se

$$\sigma : \xi_l \rightarrow \vartheta_l \quad \text{per ogni } l = 1, \dots, t+1.$$

Poniamo $i_0 = 0$, $i_{t+1} = m$; $j_0 = 0$, $j_{t+1} = k$. Si ha quindi, per la (3.2),

$$(3.10) \quad \sum_{\sigma \in \lambda_z} Q_\sigma(\mathbf{y}) \alpha_\sigma^y = \\ = \pm \prod_{l=1}^{t+1} G(\alpha_{i_{l-1}+1}, \dots, \alpha_{i_l}; r_{i_{l-1}+1}, \dots, r_{i_l}; y_{j_{l-1}+1}, \dots, y_{j_l}) = 0.$$

Ne segue che almeno uno tra i $t+1$ sottodeterminanti propri ben messi di $G(\mathbf{x})$

$$G(\alpha_{i_{l-1}+1}, \dots, \alpha_{i_l}; r_{i_{l-1}+1}, \dots, r_{i_l}; y_{j_{l-1}+1}, \dots, y_{j_l}),$$

al variare di l tra 1 e $t+1$, è nullo. ■

Osserviamo che la conclusione del lemma precedente resta valida se si sostituisce l'ipotesi (3.9) con la seguente: per ogni $i = 2, \dots, m$ sia

$$(3.11) \quad w_{r_i} + \dots + r_m < w_{1+r_i} + \dots + r_m \quad \text{oppure} \quad w_{1+r_i+1} + \dots + r_m = \dots = w_{r_{i-1}+1} + \dots + r_m.$$

Infatti basta applicare il lemma 3.2 con $(0, -z_2, \dots, -z_k)$ al posto di $(0, z_2, \dots, z_k)$ e quindi $(-w_k, \dots, -w_1)$ al posto di $(w_1, \dots, w_k)$. Inoltre se $m = k$ allora le condizioni (3.9) e (3.11) sono vuote.

4. – Dimostrazione della Proposizione 2.1.

Siano $k = 4$, $2 \leq m \leq 3$. Supponiamo che $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ siano ordinati come nel lemma 3.1. Sia $\mathcal{P}$ una partizione di $\mathfrak{S}_4$ tale che $G(\mathcal{P}) \neq \{0\}$, e sia $\mathbf{z} = (0, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in G(\mathcal{P})$ con z_2, z_3, z_4 non tutti nulli. Sia $\chi \in \mathfrak{S}_4$ una permutazione di $\{1, 2, 3, 4\}$ tale che il vettore

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_{\chi(1)}, z_{\chi(2)}, z_{\chi(3)}, z_{\chi(4)})$$

soddisfi la (3.8). Sia $\mathbf{y} = (0, y_2, y_3, y_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ una soluzione di (2.1 $\mathcal{P}$), e sia da qui in poi

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_{\chi(1)}, y_{\chi(2)}, y_{\chi(3)}, y_{\chi(4)}).$$

Poniamo

$$\lambda_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(j) \leq \sigma(l) \text{ per ogni } j, l \text{ con } w_j < w_l\},$$

$$\lambda'_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(j) \geq \sigma(l) \text{ per ogni } j, l \text{ con } w_j < w_l\}.$$

Applicando il lemma 3.1 ai vettori $\mathbf{z}$ e $-\mathbf{z}$ si trova che $\mathbf{x}$ soddisfa il seguente sistema di equazioni:

$$(4.1) \quad \sum_{\sigma \in \lambda_w} Q_\sigma(\mathbf{x}) \alpha_\sigma^x = 0$$

$$(4.2) \quad \sum_{\sigma \in \lambda'_w} Q_\sigma(\mathbf{x}) \alpha_\sigma^x = 0$$

$$(4.3) \quad \sum_{\sigma \in \tilde{\delta}_4 \setminus (\lambda_w \cup \lambda'_w)} Q_\sigma(\mathbf{x}) \alpha_\sigma^x = 0.$$

Osserviamo che vale l'identità

$$(4.4) \quad (x_3 - x_1)(x_4 - x_2) = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1).$$

Per il lemma 3.2 e l'osservazione successiva, possiamo supporre che $\mathbf{w}$ non soddisfi né la (3.9) né la (3.11). A meno di simmetria, possiamo distinguere i casi seguenti:

1. $r_1 = r_2 = 2, w_1 = w_2 = w_3 < w_4.$
2. $r_1 = r_2 = 2, w_1 < w_2 = w_3 < w_4.$
3. $r_1 = 3, r_2 = 1, w_1 = w_2 < w_3 = w_4.$
4. $r_1 = 2, r_2 = r_3 = 1, w_1 < w_2 = w_3 < w_4.$
5. $r_1 = r_3 = 1, r_2 = 2, w_1 = w_2 < w_3 < w_4.$
6. $r_1 = r_3 = 1, r_2 = 2, w_1 = w_2 < w_3 = w_4.$

In tutti questi casi dimostreremo, usando la (1.14) e le (4.1)-(4.4), che $x_j = x_l$ per qualche $j \neq l$.

Nei casi 1. e 2. a meno di dividere, per ogni $j = 1, 2, 3, 4$, la j -esima riga del determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & x_1 \alpha_1^{x_1} & \alpha_2^{x_1} & x_1 \alpha_2^{x_1} \\ \alpha_1^{x_2} & x_2 \alpha_1^{x_2} & \alpha_2^{x_2} & x_2 \alpha_2^{x_2} \\ \alpha_1^{x_3} & x_3 \alpha_1^{x_3} & \alpha_2^{x_3} & x_3 \alpha_2^{x_3} \\ \alpha_1^{x_4} & x_4 \alpha_1^{x_4} & \alpha_2^{x_4} & x_4 \alpha_2^{x_4} \end{vmatrix}$$

per $\alpha_1^{x_j}$ possiamo supporre $\alpha_1 = 1$, e poniamo per comodità $\alpha = \alpha_2$.

Nel caso 1. si ha $\lambda_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(4) = 2\}$, $\lambda'_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(4) = 1\}$. Di con-

sequenza le (4.1) e (4.2) hanno la forma

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) \alpha^{x_3} - (x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \alpha^{x_2} + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) \alpha^{x_1} &= 0, \\ (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) \alpha^{x_1 + x_2} - (x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \alpha^{x_1 + x_3} + \\ &+ (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) \alpha^{x_2 + x_3} = 0. \end{aligned}$$

Usando la (4.4) otteniamo rispettivamente

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)(x_4 - x_3)(\alpha^{x_3} - \alpha^{x_2}) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(\alpha^{x_1} - \alpha^{x_2}) &= 0 \\ (x_2 - x_1)(x_4 - x_3)(\alpha^{x_2} - \alpha^{x_3}) \alpha^{x_1} + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(\alpha^{x_2} - \alpha^{x_1}) \alpha^{x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima uguaglianza per α^{x_1} , e sommando membro a membro con la seconda si ha

$$(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(\alpha^{x_3} - \alpha^{x_1})(\alpha^{x_2} - \alpha^{x_1}) = 0.$$

La tesi segue dal fatto che α non è una radice dell'unità.

Nel caso 2. si ha $\lambda_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(1) = 1, \sigma(4) = 2\}$, $\lambda'_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(1) = 2, \sigma(4) = 1\}$. Le (4.1) e (4.2) equivalgono alle seguenti:

$$\begin{aligned} (x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \alpha^{x_2} &= (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) \alpha^{x_3} \\ (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) \alpha^{x_2} &= (x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \alpha^{x_3}. \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro si ottiene

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)(\alpha^{2x_2} - \alpha^{2x_3}) = 0.$$

Nel caso 3., come nei primi due, a meno di dividere, per ogni $j = 1, 2, 3, 4$, la j -esima riga del determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & x_1 \alpha_1^{x_1} & x_1^2 \alpha_1^{x_1} & \alpha_2^{x_1} \\ \alpha_1^{x_2} & x_2 \alpha_1^{x_2} & x_2^2 \alpha_1^{x_2} & \alpha_2^{x_2} \\ \alpha_1^{x_3} & x_3 \alpha_1^{x_3} & x_3^2 \alpha_1^{x_3} & \alpha_2^{x_3} \\ \alpha_1^{x_4} & x_4 \alpha_1^{x_4} & x_4^2 \alpha_1^{x_4} & \alpha_2^{x_4} \end{vmatrix}$$

per $\alpha_1^{x_j}$ possiamo supporre $\alpha_1 = 1$, e poniamo $\alpha = \alpha_2$. Abbiamo $\lambda_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(1) = \sigma(2) = 1\}$, $\lambda'_w = \{\sigma \in \tilde{\delta}_4: \sigma(3) = \sigma(4) = 1\}$, dunque

$$(4.5) \quad (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \alpha^{x_1} = (x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_4 - x_3) \alpha^{x_2}$$

$$(4.6) \quad (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \alpha^{x_4} = (x_2 - x_1)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) \alpha^{x_3}.$$

Supponiamo, per assurdo, che si abbia

$$(4.7) \quad x_j \neq x_l \text{ per ogni } j \neq l$$

e poniamo $a = x_4 - x_2$, $b = x_3 - x_1$, $c = x_4 - x_1$, $d = x_3 - x_2$. Le (4.5) e (4.6) diventano rispettivamente

$$(4.8) \quad \frac{ad}{bc} = \alpha^{x_2 - x_1}$$

$$(4.9) \quad \frac{bd}{ac} = \alpha^{x_3 - x_4}.$$

Elevando la (4.8) ad $x_3 - x_4 = b - c = d - a$, e la (4.9) ad $x_2 - x_1 = c - a = b - d$, e uguagliando, ci si riconduce a studiare il seguente sistema:

$$(4.10) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} = \left(\frac{c}{d}\right)^{c-d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

$$a + b = c + d$$

Poiché α non è una radice dell'unità, per concludere è sufficiente, in virtù delle (4.8) e (4.9), dimostrare che $ad = bc$, oppure $ac = bd$. A meno di invertire i segni di a, b, c, d possiamo supporre $a + b \geq 0$. Se $a = -b$ abbiamo finito. Dunque supponiamo $a + b > 0$. Per simmetria possiamo ancora supporre $a \geq b, c \geq d$. Se $(a - b)(c - d) = 0$, allora $a = b$ e $c = d$, e abbiamo finito. Sia dunque $a > b, c > d$, quindi $a > 0, c > 0$. A meno di simmetria possiamo inoltre supporre $b > d$, quindi $a < c, 0 < a - b < c - d$. Dalla prima equazione del sistema (4.10) segue che

$$\left| \frac{a}{b} \right| > \left| \frac{c}{d} \right|,$$

dunque, per le ipotesi precedenti, $|b| < |d|$, quindi $d < 0$. Distinguiamo due casi:

Primo caso: $b < 0$. Si ha allora

$$\left| \frac{a}{b} \right|^{a-b} > \left| \frac{c}{d} \right|^{c-d}.$$

Infatti per ogni $N \geq 1$ fissato, la funzione $f(x) = \left(\frac{N+x}{x}\right)^{N+2x}$ è decrescente per ogni $x > 0$. Ponendo $N = a + b = c + d$ si ha quindi

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^{a-b} = f(-b) > f(-d) = \left(-\frac{c}{d}\right)^{c-d}.$$

Secondo caso: $b > 0$. Sia $\frac{v}{\mu} = \frac{c-d}{a-b}$ con v, μ interi positivi coprimi. Dalla prima uguaglianza del sistema (4.10) si ha $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/\mu} = \left(-\frac{c}{d}\right)^{1/\mu} = \frac{P}{Q}$ con P, Q in-

teri positivi coprimi. Si noti che $0 < \mu < \nu$, $0 < Q < P$. Usando la seconda equazione del sistema (4.10) si ha

$$(4.11) \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{(a+b)(c-d)}{(a-b)(c+d)} = \frac{(P^\nu + Q^\nu)(P^\mu + Q^\mu)}{(P^\nu - Q^\nu)(P^\mu - Q^\mu)}.$$

Da queste uguaglianze otteniamo

$$(\nu + \mu)(PQ)^\mu (P^{\nu-\mu} + Q^{\nu-\mu}) = (\nu - \mu)(P^{\nu+\mu} + Q^{\nu+\mu}),$$

da cui segue che $(PQ)^\mu$ divide $\nu - \mu$, in particolare $\nu \geq \mu + (PQ)^\mu$. Poiché

$$\frac{(P^\nu + Q^\nu)}{(P^\nu - Q^\nu)} < \frac{(P^\mu + Q^\mu)}{(P^\mu - Q^\mu)},$$

la (4.11) implica

$$\frac{\nu}{\mu} < \left(\frac{P^\mu + Q^\mu}{P^\mu - Q^\mu} \right)^2.$$

Dunque si ha $4\mu(PQ)^\mu > (\nu - \mu)(P^\mu - Q^\mu)^2 \geq (PQ)^\mu (P^\mu - Q^\mu)^2$, da cui $P = Q + 1$, $\mu = 1$. Riscriviamo la (4.11) nei modi seguenti:

$$\nu((Q+1)^\nu - Q^\nu) = (2Q+1)((Q+1)^\nu + Q^\nu),$$

$$(\nu + 2Q + 1) Q^\nu = (\nu - 2Q - 1)(Q+1)^\nu,$$

quindi Q^ν divide $\nu - 2Q - 1$, da cui $Q = 1$. Ma allora $(\nu - 3)2^\nu = \nu + 3$, il che è assurdo.

Nel caso 4., come nei precedenti, a meno di dividere, per ogni $j = 1, 2, 3, 4$, la j -esima riga del determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & x_1 \alpha_1^{x_1} & \alpha_2^{x_1} & \alpha_3^{x_1} \\ \alpha_1^{x_2} & x_2 \alpha_1^{x_2} & \alpha_2^{x_2} & \alpha_3^{x_2} \\ \alpha_1^{x_3} & x_3 \alpha_1^{x_3} & \alpha_2^{x_3} & \alpha_3^{x_3} \\ \alpha_1^{x_4} & x_4 \alpha_1^{x_4} & \alpha_2^{x_4} & \alpha_3^{x_4} \end{vmatrix}$$

per $\alpha_1^{x_j}$ possiamo supporre $\alpha_1 = 1$, e poniamo $\alpha = \alpha_2$. Si ha: $\lambda_w = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4: \sigma(1) = 1, \sigma(4) = 3\}$, $\lambda'_w = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4: \sigma(1) = 3, \sigma(4) = 1\}$, dunque

$$(x_2 - x_1) \alpha^{x_3} = (x_3 - x_1) \alpha^{x_2}$$

$$(x_4 - x_3) \alpha^{x_2} = (x_4 - x_2) \alpha^{x_3}.$$

Da queste otteniamo

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) \alpha^{x_2 + x_3} = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \alpha^{x_2 + x_3},$$

e quindi, per la (4.4), $(x_3 - x_2)(x_4 - x_1) = 0$.

Anche nei casi 5. e 6. possiamo dividere, per ogni $j = 1, 2, 3, 4$, la j -esima riga del determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & \alpha_2^{x_1} & x_1 \alpha_2^{x_1} & \alpha_3^{x_1} \\ \alpha_1^{x_2} & \alpha_2^{x_2} & x_2 \alpha_2^{x_2} & \alpha_3^{x_2} \\ \alpha_1^{x_3} & \alpha_2^{x_3} & x_3 \alpha_2^{x_3} & \alpha_3^{x_3} \\ \alpha_1^{x_4} & \alpha_2^{x_4} & x_4 \alpha_2^{x_4} & \alpha_3^{x_4} \end{vmatrix}$$

per $\alpha_2^{x_j}$, e dunque supporre $\alpha_2 = 1$, e poniamo $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_3$.

Nel caso 5. $\lambda_w = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4: \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 3\}$, $\lambda'_w = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4: \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 1\}$, quindi per le (4.1) e (4.2) abbiamo

$$(x_3 - x_2) \alpha^{x_1} = (x_3 - x_1) \alpha^{x_2}$$

$$(x_3 - x_2) \beta^{x_1} = (x_3 - x_1) \beta^{x_2}$$

da cui $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(\alpha^{x_2} \beta^{x_1} - \alpha^{x_1} \beta^{x_2}) = 0$. La tesi segue dal fatto che α/β non è una radice dell'unità.

Nel caso 6. le (4.1), (4.2) e (4.3) si possono scrivere nella forma seguente:

$$(4.12) \quad (x_4 - x_2) \alpha^{x_1} \beta^{x_3} + (x_3 - x_1) \alpha^{x_2} \beta^{x_4} = (x_4 - x_1) \alpha^{x_2} \beta^{x_3} + (x_3 - x_2) \alpha^{x_1} \beta^{x_4}$$

$$(4.13) \quad (x_4 - x_1) \alpha^{x_3} \beta^{x_2} + (x_3 - x_2) \alpha^{x_4} \beta^{x_1} = (x_4 - x_2) \alpha^{x_3} \beta^{x_1} + (x_3 - x_1) \alpha^{x_4} \beta^{x_2}$$

$$(4.14) \quad (x_4 - x_3)(\alpha^{x_1} \beta^{x_2} - \alpha^{x_2} \beta^{x_1}) = (x_2 - x_1)(\alpha^{x_4} \beta^{x_3} - \alpha^{x_3} \beta^{x_4}).$$

Se $(\alpha\beta)^{w_1} \neq (\alpha\beta)^{w_3}$ si ha anche, per definizione di $G(\mathcal{P})$,

$$(x_4 - x_3)(\alpha^{x_1} \beta^{x_2} - \alpha^{x_2} \beta^{x_1}) = (x_2 - x_1)(\alpha^{x_4} \beta^{x_3} - \alpha^{x_3} \beta^{x_4}) = 0.$$

Sia dunque $(\alpha\beta)^{w_3 - w_1} = 1$, e sia ζ tale che $\zeta^2 = \alpha\beta$. Come nel caso 3., supponiamo per assurdo che valga la (4.7), quindi, poiché α/β non è una radice dell'unità, si ha anche $(\alpha^{x_1} \beta^{x_2} - \alpha^{x_2} \beta^{x_1})(\alpha^{x_4} \beta^{x_3} - \alpha^{x_3} \beta^{x_4}) \neq 0$. Moltiplicando membro a membro le (4.12) e (4.13), e combinando il risultato con la (4.14), otteniamo

$$(4.15) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \zeta^{2x_1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \zeta^{2x_2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \zeta^{2x_3} \\ 1 & x_4 & x_4^2 & \zeta^{2x_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante lungo l'ultima colonna riscriviamo la (4.15) nella forma $V_1 \zeta^{2x_1} - V_2 \zeta^{2x_2} = V_4 \zeta^{2x_4} - V_3 \zeta^{2x_3}$. Prendendo i quadrati dei moduli:

$$V_1^2 + V_2^2 - V_1 V_2 (\zeta^{2(x_1 - x_2)} + \zeta^{2(x_2 - x_1)}) = V_3^2 + V_4^2 - V_3 V_4 (\zeta^{2(x_3 - x_4)} + \zeta^{2(x_4 - x_3)}).$$

Usando l'identità $V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 = V_3^2 + V_4^2 - 2V_3 V_4$ si ottiene

$$V_1 V_2 (\zeta^{x_1 - x_2} - \zeta^{x_2 - x_1})^2 = V_3 V_4 (\zeta^{x_3 - x_4} - \zeta^{x_4 - x_3})^2.$$

Dunque per la (4.7)

$$(4.16) \quad (x_3 - x_4)^2 (\zeta^{x_1 - x_2} - \zeta^{x_2 - x_1})^2 = (x_1 - x_2)^2 (\zeta^{x_3 - x_4} - \zeta^{x_4 - x_3})^2.$$

Distinguiamo due casi:

Primo caso: Gli interi algebrici $\zeta^{x_1 - x_2} - \zeta^{x_2 - x_1}$ e $\zeta^{x_3 - x_4} - \zeta^{x_4 - x_3}$ sono entrambi non nulli. Allora per la (4.16) si ha $x_1 - x_2 = \pm(x_3 - x_4)$. Supponiamo ad esempio $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$. Moltiplicando la (4.12) per $\beta^{x_1 - x_3}$ e la (4.13) per $\alpha^{x_1 - x_3}$ si ha

$$(x_4 - x_2)(\alpha\beta)^{x_1} + (x_3 - x_1)(\alpha\beta)^{x_2} = (x_4 - x_1)\alpha^{x_2}\beta^{x_1} + (x_3 - x_2)\alpha^{x_1}\beta^{x_2}$$

$$(x_4 - x_1)\alpha^{x_1}\beta^{x_2} + (x_3 - x_2)\alpha^{x_2}\beta^{x_1} = (x_4 - x_2)(\alpha\beta)^{x_1} + (x_3 - x_1)(\alpha\beta)^{x_2}$$

da cui $(x_4 - x_1 - x_3 + x_2)(\alpha^{x_1}\beta^{x_2} - \alpha^{x_2}\beta^{x_1}) = 0$, quindi $x_1 - x_2 = x_4 - x_3$, che assieme a $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$ dà $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, contro la (4.7). Analogamente si procede partendo da $x_1 - x_2 = x_4 - x_3$.

Secondo caso: $(\zeta^{x_1 - x_2} - \zeta^{x_2 - x_1})(\zeta^{x_3 - x_4} - \zeta^{x_4 - x_3}) = 0$. Allora per la (4.16) e la (4.7) si ha $\zeta^{2x_1} = \zeta^{2x_2}$, $\zeta^{2x_3} = \zeta^{2x_4}$, ossia $\alpha^{x_1}\beta^{-x_2} = \alpha^{x_2}\beta^{-x_1}$, $\alpha^{x_3}\beta^{-x_4} = \alpha^{x_4}\beta^{-x_3}$. Moltiplicando la (4.12) per $\alpha^{x_3}\beta^{-x_4}$ e la (4.13) per $\alpha^{x_1}\beta^{-x_2}$ si ottengono rispettivamente

$$(4.17) \quad (x_4 - x_2)\alpha^{x_1+x_4} + (x_3 - x_1)\alpha^{x_2+x_3} = (x_4 - x_1)\alpha^{x_2+x_4} + (x_3 - x_2)\alpha^{x_1+x_3}$$

$$(4.18) \quad (x_3 - x_1)\alpha^{x_1+x_4} + (x_4 - x_2)\alpha^{x_2+x_3} = (x_3 - x_2)\alpha^{x_2+x_4} + (x_4 - x_1)\alpha^{x_1+x_3}.$$

Sommando membro a membro abbiamo

$$(x_3 + x_4 - x_1 - x_2)(\alpha^{x_1} - \alpha^{x_2})(\alpha^{x_4} - \alpha^{x_3}) = 0,$$

dunque, per la (4.7) e poiché α non è una radice dell'unità, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Dalla (4.17), o dalla (4.18), otteniamo

$$(x_3 - x_1)(\alpha^{x_2+x_3} - \alpha^{x_1+x_4}) = (x_3 - x_2)(\alpha^{x_1+x_3} - \alpha^{x_2+x_4}),$$

ovvero, moltiplicando per α^{x_3} ,

$$(4.19) \quad (x_3 - x_1)(\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_1})\alpha^{x_2} = (x_3 - x_2)(\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_2})\alpha^{x_1}.$$

Poiché $(\alpha\beta)^{2x_1} = (\alpha\beta)^{x_1+x_2} = (\alpha\beta)^{x_3+x_4} = (\alpha\beta)^{2x_3}$, moltiplicando la (4.14) per

$\alpha^{x_1+x_2}$ si ha

$$(x_4 - x_3)(\alpha^{2x_1} - \alpha^{2x_2}) = \pm(x_2 - x_1)(\alpha^{2x_4} - \alpha^{2x_3}),$$

ovvero, moltiplicando per α^{2x_3} ,

$$(4.20) \quad (x_1 + x_2 - 2x_3)(\alpha^{2x_1} - \alpha^{2x_2}) \alpha^{2x_3} = \pm(x_2 - x_1)(\alpha^{2x_1+2x_2} - \alpha^{4x_3}).$$

La (4.20) equivale in un caso a

$$(4.20^+) \quad (x_3 - x_2)(\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_2})(\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_1}) = \\ (x_3 - x_1)(\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_1})(\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_2}),$$

nell'altro a

$$(4.20^-) \quad (x_3 - x_2)(\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_1})(\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_2}) = \\ (x_3 - x_1)(\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_2})(\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_1}).$$

Moltiplicando membro a membro le (4.19) e (4.20⁺), e usando la (4.7) e il fatto che α non è una radice dell'unità si ha: $(\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_2}) \alpha^{x_1} = (\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_1}) \alpha^{x_2}$, quindi $(\alpha^{x_2} - \alpha^{x_1})(\alpha^{x_1+x_2} - \alpha^{2x_3}) = 0$, il che implica $x_1 = x_2$ oppure $2x_3 = x_3 + x_4$, contro la (4.7).

Analogamente moltiplicando membro a membro le (4.19) e (4.20⁻) si ha

$$(\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_1})^2 (\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_2}) \alpha^{x_2} = (\alpha^{2x_3} - \alpha^{2x_2})^2 (\alpha^{2x_3} + \alpha^{2x_1}) \alpha^{x_1}.$$

Sviluppando i prodotti, portando al primo membro e fattorizzando si ottiene

$$(\alpha^{x_2} - \alpha^{x_1})(\alpha^{2x_3} - \alpha^{x_1+x_2})((\alpha^{2x_3} + \alpha^{x_1+x_2})^2 + (\alpha^{x_3+x_1} + \alpha^{x_3+x_2})^2) = 0.$$

Ragionando come sopra possiamo supporre, a meno di simmetria,

$$(4.21) \quad \alpha^{2x_3} + \alpha^{x_1+x_2} = i(\alpha^{x_1} + \alpha^{x_2}) \alpha^{x_3}.$$

Posto $U = x_3 - x_1$, $V = x_3 - x_2$, $u = \alpha^{x_3-x_1}$, $v = \alpha^{x_3-x_2}$, riscriviamo le (4.19) e (4.21) nella forma

$$(4.22) \quad U(u^2 - 1)v = V(v^2 - 1)u \\ 1 + uv = i(u + v).$$

Rispetto ad u e v il sistema (4.22) ammette le soluzioni seguenti:

$$(4.23) \quad u = 1, \quad v = -1$$

$$(4.24) \quad u = -1, \quad v = 1$$

$$(4.25) \quad u = u_1(U, V) = -\frac{i(V + \sqrt{U^2 + V^2})}{U}, \quad v = v_1(U, V) = -\frac{i(U - \sqrt{U^2 + V^2})}{V}$$

$$(4.26) \quad u = u_2(U, V) = -\frac{i(V - \sqrt{U^2 + V^2})}{U}, \quad v = v_2(U, V) = -\frac{i(U + \sqrt{U^2 + V^2})}{V}.$$

Le soluzioni (4.23) e (4.24) implicano $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Per le (4.25) e (4.26) osserviamo che sono entrambe incompatibili con

$$(4.27) \quad u^V = v^U.$$

Infatti $|u_1(U, V)|^V = |u_1(-U, V)|^V = |u_1(U, -V)|^{-V} = |u_1(-U, -V)|^{-V}$, ed analogamente per $|u_2(U, V)|$, $|v_1(U, V)|$ e $|v_2(U, V)|$. Infine per $U, V > 0$ si ha

$$|v_1(U, V)| < 1 < |u_1(U, V)|$$

$$|u_2(U, V)| < 1 < |v_2(U, V)|,$$

contro la (4.27). ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. AMOROSO, *Upper bounds for the resultant and Diophantine applications*, Number Theory (Eger, 1996), 23-36, de Gruyter, Berlin, 1998.
- [2] J.-H. EVERTSE - H. P. SCHLICKWEI - W. M. SCHMIDT, *Linear equations in variables which lie in a multiplicative group*, Ann. of Math., **155** (2002), 807-836.
- [3] C. MÉRAY, *Sur un déterminant dont celui de Vandermonde n'est qu'un cas particulier*, Revue de Mathématique Spéciales **9** (1899), 217-219.
- [4] H. P. SCHLICKWEI - W. M. SCHMIDT, *The number of solutions of polynomial-exponential equations*, Compositio Math., **120** (2000), 193-225.
- [5] H. P. SCHLICKWEI - C. VIOLA, *Polynomials that divide many trinomials*, Acta Arith., **78** (1997), 267-273.
- [6] H. P. SCHLICKWEI - C. VIOLA, *Polynomials that divide many k-nomials*. Number theory in progress, Vol. 1 (Zakopane-Kościełisko, 1997), 445-450, de Gruyter, Berlin, 1999.
- [7] H. P. SCHLICKWEI - C. VIOLA, *Generalized Vandermonde determinants*, Acta Arith., **95** (2000), 123-137.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via Buonarroti 2, 56127 Pisa
E-mail: marcovec@mail.dm.unipi.it