
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO PULVIRENTI

Il sesto problema di Hilbert e le moderne teorie cinetiche.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 7-B (2004),
n.3, p. 545–562.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_3_545_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_3_545_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Il sesto problema di Hilbert e le moderne Teorie Cinetiche.

MARIO PULVIRENTI (*)

Summary. – *We discuss some problems arising in the attempts of deriving kinetic equations from the mechanics of particle systems.*

Sunto. – *In questo contributo si discute qualche problema connesso alla derivazione delle equazioni cinetiche a partire dalla meccanica dei sistemi di particelle.*

Introduzione.

Forse non tutti sanno che tra i 23 problemi posti da David Hilbert nel suo famoso discorso al congresso di Parigi nel 1900, ce n'è uno che riguarda il ruolo della Matematica nelle scienze fisiche. Esso recita:

MATHEMATICAL TREATMENT OF THE AXIOMS OF PHYSICS

The investigations on the foundation of geometry suggest ... to treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics play an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.

Potrebbe sembrare, a prima vista, che il problema consista in una completa formalizzazione matematica dei concetti fisici. Questo progetto, che apparirebbe oggi un po' ingenuo, non è in realtà quello che Hilbert intende. Infatti egli chiarisce nel seguito:

(*) Conferenza tenuta a Milano il 9 settembre 2003 in occasione del XVII Congresso U.M.I.

As to the axioms of the Theory of probabilities, it seems to me desirable that their logical investigation should be accompanied by a rigorous and satisfactory development of the method of mean values in Mathematical Physics, and in particular in the kinetic theory of gases. Important investigations by physicists on the foundations of mechanics are at hand.....Thus Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes, there merely indicated, which lead from the atomistic view to the laws of the motion of continua.

È dunque chiaro che Hilbert si augura che studi futuri permettano di chiarire in maniera logicamente corretta e matematicamente rigorosa, la transizione tra la dinamica delle particelle che obbedisce alle leggi di Newton e le equazioni che descrivono la dinamica dei fluidi e dei gas rarefatti. Più in generale, nel sesto problema, si delinea il ruolo della Matematica nel cercare di comprendere in maniera precisa, come siano connessi differenti modelli del mondo reale:

.....the mathematician has the duty to test exactly in each instance whether the new axioms are compatible with the previous ones. The physicist, as his theories develop, often finds himself forced by the results of the experiments to make new hypotheses, while he depends, with respect to the compatibility of the new hypotheses with the old axioms, solely upon these experiments or upon certain physical intuition, a practice which in the rigorously logical building up of a theory is not admissible.

Dunque nel definire le differenti metodologie del fisico e del matematico, Hilbert delinea gli scopi e il ruolo della moderna Fisica Matematica in cui è fondamentale il concetto di modello matematico quale sistema di postulati. In particolare i vari modelli, come quello del mondo macroscopico dei sistemi continui, devono essere compatibili con quello microscopico descritto dalla Meccanica delle particelle. Inoltre vanno chiariti, in maniera logicamente soddisfacente e possibilmente rigorosa da un punto di vista matematico, quelle procedure di limite che permettono di passare dal microscopico al macroscopico.

A più di un secolo di distanza possiamo dire che molti dei più interessanti problemi che si possono enucleare in quest'ambito sono tuttora aperti.

Concentriamoci, per il momento, su tre delle descrizioni matematiche usuali dei sistemi complessi che popolano il mondo reale. Esse sono:

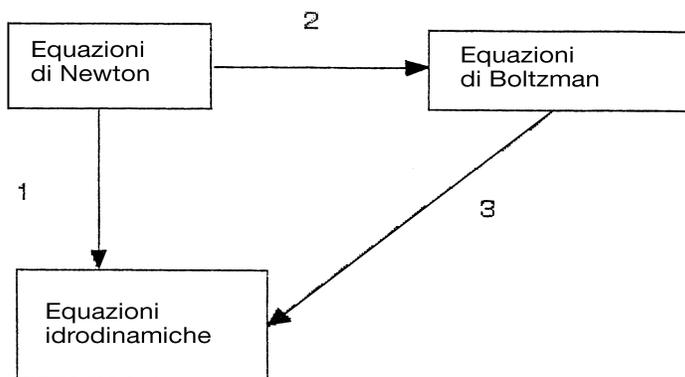
1) Descrizione microscopica-particellare. Il modello matematico associato sono le equazioni di Newton della Meccanica Classica di sistemi di particelle puntiformi.

2) Descrizione macroscopica-idrodinamica. Il modello matematico consiste nelle equazioni dei fluidi, tipo Eulero e/o Navier-Stokes.

3) Descrizione mesoscopica-cinetica dei gas rarefatti. Il modello matematico si esplicita nell'equazione di Boltzmann.

Quale descrizione (dello stesso sistema) scegliere nella pratica, dipende solo dalle scale fisiche (occorre fissare delle lunghezze spaziali e temporali tipiche del sistema, assieme al numero di componenti elementari) cui siamo interessati. In particolare è ben noto che per il sistema solare useremo lo schema 1), per fluidi e gas useremo lo schema 2), mentre per i gas rarefatti è più appropriata la scelta 3). Tuttavia, seguendo Hilbert, ciò può soddisfare il fisico: come matematici vorremo anche, trattandosi dello stesso sistema fisico soggetto a differenti descrizioni, fissare delle connessioni rigorose. In altre parole vogliamo mostrare che dal modello fondamentale 1) discendano anche gli

schemi 2) e 3) sotto opportuni limiti di scala. Il seguente diagramma schematizza la situazione.



Diagramma

Analizziamo ora le varie frecce che compaiono nel diagramma. La freccia 1 descrive il limite idrodinamico per sistemi di particelle. Matematicamente si tratta di delineare e dimostrare la procedura di limite che ci consente di ottenere le soluzioni delle equazioni di Eulero per i fluidi compressibili a partire dalle soluzioni delle equazioni di Newton per sistemi di particelle. In un fondamentale articolo del 1955 C.B. Morrey (vedi [M]) ha tracciato la strada mostrando i passi necessari. La sua prova è però formale. Una derivazione rigorosa dell'equazione di Eulero è ancora probabilmente lontana. Le difficoltà sono essenzialmente di due tipi. Ammettendo l'esistenza di una soluzione classica

dell'equazione di Eulero, la sua approssimazione in termini di sistemi di particelle incontra difficoltà legate alla nostra scarsa conoscenza del comportamento a tempi lunghi delle soluzioni di sistemi hamiltoniani, problema difficile e interessante in sé. Inoltre è ben noto che, in generale, soluzioni classiche dell'equazione di Eulero esistono solo per tempi piccoli: il tipo di nonlinearità presenti nell'equazione sviluppa singularità (onde d'urto). In presenza di tali singularità il problema è ancora più lontano dalla nostra comprensione anche in situazioni in cui si ha un buon controllo delle soluzioni, come casi a simmetria unidimensionale con un numero finito di shocks.

La freccia 2 indica la derivazione dell'equazione di Boltzmann in termini di sistemi di particelle. In questo caso sappiamo di più, come descritto nel paragrafo 3 di questa nota. Come vedremo, questa derivazione vale però soltanto per tempi piccoli. Per l'equazione di Boltzmann possediamo peraltro un teorema di esistenza globale di soluzioni deboli (vedi [DPL]), ma il controllo che ci fornisce tale teorema è ancora troppo scarso per ottenere un teorema di validità dell'equazione di Boltzmann globale nel tempo.

Infine la freccia 3 delinea il passaggio alla descrizione idrodinamica dell'equazione di Boltzmann. In questo caso il problema consiste nel derivare l'equazione di Eulero a partire dall'equazione di Boltzmann. Qui il quadro è notevolmente più soddisfacente e ricco di risultati per cui il problema può considerarsi parzialmente risolto. Lo stesso Hilbert sviluppando un metodo di perturbazioni singolari, noto come espansione di Hilbert, ha contribuito alla sua soluzione. Recentemente sono stati ottenuti notevoli risultati: rimandiamo il lettore alla monografia [EP] per una descrizione dei risultati relativi al diagramma che stiamo analizzando e per la lista completa dei riferimenti bibliografici più significativi.

Concludo osservando che l'idrodinamica dell'equazione di Boltzmann è differente da quella ottenuta (seppure formalmente) da sistemi di particelle, in quanto le leggi di stato (e gli eventuali coefficienti di trasporto) che compaiono nelle equazioni idrodinamiche, riferiscono a sistemi microscopici differenti.

1. – Il modello di Lorentz.

In questo paragrafo vogliamo studiare una semplice equazione cinetica che, come vedremo, non presenta alcuna difficoltà matematica. A noi interessa la sua interpretazione meccanica al fine di introdurre il lettore alla problematica dei limiti cinetici connessi al problema della derivazione dell'equazione di Boltzmann.

Si consideri dunque la seguente equazione di evoluzione per la densità di

probabilità $f=f(x, v, t)$ di una particella test che si muova in un mezzo aleatorio:

$$(1.1) \quad (\partial_t + v \cdot \nabla) f(x, v, t) = (K - L) f(x, v, t),$$

dove $x \in \mathbb{R}^2$, $v \in S^1$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda > 0$ è un parametro assegnato. Inoltre

$$(1.2) \quad Kf(x, v) = \frac{\lambda}{2} \int_{n \in S^1_+} dn |n \cdot v| f(x, v'),$$

$$(1.3) \quad v' = v - 2(v \cdot n) n,$$

$$(1.4) \quad S^1_+ = \{n | n \cdot v' \geq 0\},$$

e

$$(1.5) \quad Lf(x, v) = \frac{\lambda}{2} \int_{n \in S^1_+} dn |n \cdot v| f(x, v) = \lambda f(x, v).$$

Illustriamo il significato dell'equazione (1.1). $f(x, v, t)$ è la densità di probabilità associata ad una particella che si muove nel piano e che possiede una velocità $v \in S^1$. L'evoluzione temporale di f è dovuta al trasporto libero (membro di sinistra della (1.1)) ed al fatto che la particella può avere delle collisioni, che generano una transizione in velocità $v \rightarrow v'$, modulate dal parametro di impatto $n \in S^1$. Tali transizioni sono descritte dalla (1.3) o dalla figura seguente:

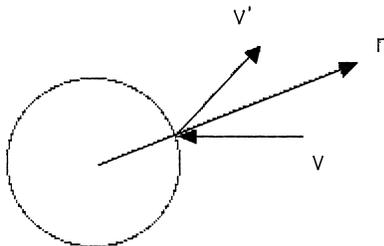


Fig. 1

Si osservi che la transizione $v \rightarrow v'$ è quella generata da un urto elastico con un disco di raggio arbitrario e dunque l'energia è conservata.

Da un punto di vista probabilistico l'eq. (1.1) descrive l'evoluzione di una densità di probabilità associata ad un processo stocastico $(x(t), v(t))$ le cui

traiettorie tipiche sono del tipo in figura

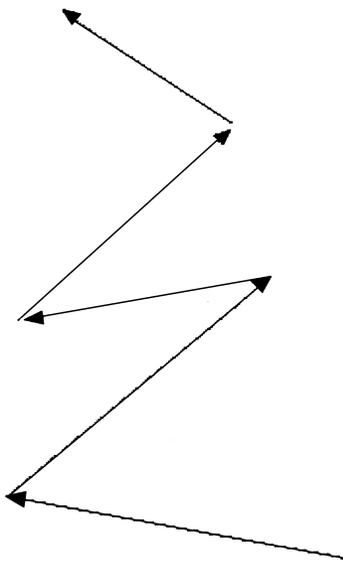


Fig. 2

L'equazione (1.1), che è una versione lineare dell'equazione di Boltzmann, non presenta difficoltà matematiche. La soluzione può essere scritta esplicitamente per mezzo di una serie. Posto,

$$(1.6) \quad (S(t)f)(x, v) = f(x - vt, v) e^{-\lambda t},$$

si trasforma la (1.1) nell'equazione integrale:

$$(1.7) \quad f(x, v, t) = (S(t)f)(x, v) + \int_0^t d\tau S(t - \tau) Kf(x, v, \tau),$$

che ammette la soluzione formale

$$(1.8) \quad f(x, v, t) = e^{-\lambda t} f_0(x - vt, v) + \sum_{m>0} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} dt_m \\ S(t - t_1) KS(t_1 - t_2) \dots KS(t_m) f_0.$$

È facile vedere che se $f_0 \in L_\infty(\mathbb{R}^2 \times S^1)$ la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times [0, T]$, per ogni $T > 0$. La soluzione $f(x, v, t)$, espressa per serie, ha

un'utile interpretazione. Il generico termine di ordine m si esplicita nel modo seguente

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^m e^{-\lambda t} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} dt_m \int dn_1 |n_1 \cdot v| \dots \int dn_m |n_m \cdot v_{m-1}| \\ f_0(x - v(t - t_1) - v_1(t_1 - t_2) \dots - v_m t_m, v_m) \end{array} \right.$$

ove

$$(1.10) \quad v_j = v_{j-1} - 2n_j(n_j \cdot v_{j-1}), \quad v_0 = v, \quad j = 1 \dots m.$$

Tale contributo può essere interpretato graficamente. Fissato il punto x, v , si percorra, all'indietro, un pezzo di traiettoria libera per il tempo $t - t_1$. In questo istante, fissato il versore n_1 , la particella subisce un urto con la transizione $v \rightarrow v_1 = v - 2n_1 \cdot v n_1$. Si prosegue quindi, con la nuova velocità v_1 , per l'intervallo di tempo $t_1 - t_2$ dopo il quale si stabilisce una nuova collisione con le stesse regole. E così via. Si calcola poi il valore del dato iniziale nel punto $x - v(t - t_1) - v_1(t_1 - t_2) \dots - v_m t_m, v_m$ così. Infine si integra sui tempi $t_1 \dots t_m$ e sui parametri n_j . Questo è dunque il contributo alla densità di probabilità al tempo t , dovuto al fatto che la particella ha compiuto in questo tempo m collisioni.

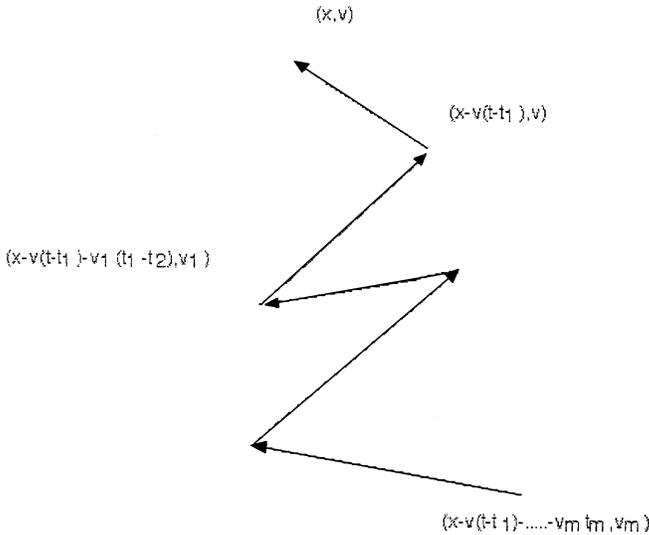


Fig. 3

Il problema che ci poniamo è il seguente: esiste un modello meccanico che descrive il processo ora descritto?

Si può tentare una risposta affermativa ragionando così. Si consideri una

distribuzione aleatoria di ostacoli circolari (di raggio $R > 0$) nel piano. Sia $c = c_1 \dots c_k \dots$, $c_k \in \mathbb{R}^2$ una assegnata configurazione di ostacoli. Sia poi $T_c^t(x, v)$ la posizione e velocità della particella al tempo t , che parte al tempo zero con dato x, v e che urta elasticamente con la configurazione c .

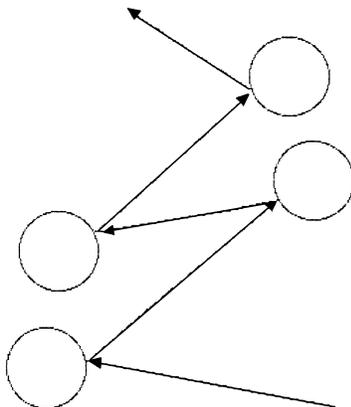


Fig. 4

Si definisca infine:

$$(1.11) \quad \tilde{f}(x, v, t) = \mathbb{E}[f_0(T_c^{-t}(x, v))]$$

dove \mathbb{E} denota l'aspettazione (o la media) rispetto alla distribuzione di ostacoli.

Ebbene ci domandiamo se sussiste l'uguaglianza

$$(1.12) \quad \tilde{f}(t) = f(t).$$

Un naturale tentativo di dimostrazione della (1.12) potrebbe essere il seguente. Cerchiamo di porre gli ostacoli in modo tale da «copiare» le traiettorie in Fig. 3, con le quali costruiamo il contributo di ordine m alla soluzione della (1.1), con traiettorie del sistema meccanico ora introdotto. Ad esempio la traiettoria in Fig. 3 può essere prodotta dall'opportuna collocazione di ostacoli realizzata in Fig. 4.

Inoltre l'integrazione rispetto alla misura:

$$(1.13) \quad \lambda^m e^{-\lambda t} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} dt_m \int dn_1 |n_1 \cdot v| \dots \int dn_m |n_m \cdot v_{m-1}|$$

dovrebbe poi essere equivalente alla media rispetto ad un'opportuna distribuzione di ostacoli. Questo punto è di facile soluzione. Un semplice cambiamento

di variabili in effetti prova che integrare rispetto alla misura (1.13) equivale a prendere l'aspettazione rispetto a una distribuzione Poissoniana di ostacoli, che significa distribuire gli ostacoli indipendentemente e uniformemente nel piano.

Tuttavia un attimo di riflessione ci porta a concludere che l'identità (1.12) è falsa. Vi sono infatti situazioni in cui le traiettorie del processo relativo all'equazione (1.1) non sono interpretabili meccanicamente. In Fig. 5 mostriamo un esempio: la traiettoria mostrata contribuisce alla soluzione dell'equazione (1.1) ma non è meccanicamente realizzabile perché il primo urto implica la presenza di un ostacolo che impedisce l'evolversi successivo della traiettoria.

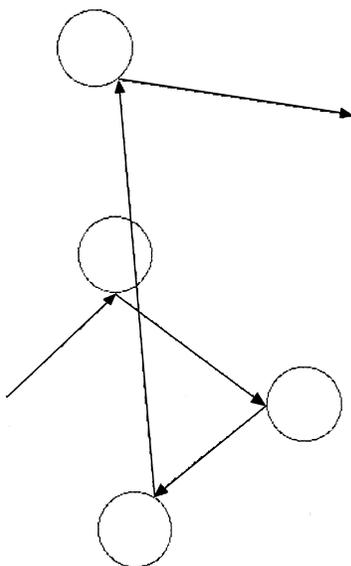


Fig. 5

In termini probabilistici possiamo dire che il processo indotto dal sistema meccanico non è un processo di Markov, non dimentica cioè gli urti avuti nel passato. Infatti se la particella ha subito una collisione vuol dire che c'è un ostacolo che l'ha prodotta. Se la traiettoria ripassa nelle vicinanze di questo ostacolo non può fare a meno di riurtarlo. Al contrario, il processo relativo all'equazione (1.1) è di Markov: la struttura della soluzione ci dice che ogni collisione è indipendente da quanto è successo nel passato. Sembrerebbe dunque che non ci sia speranza di dare un significato meccanico all'equazione (1.1). Tuttavia ci si accorge subito che le patologie ora delineate scompaiono se prendiamo il limite $R \rightarrow 0$. Se facciamo così però il processo meccanico converge al moto libero. Per ottenere un limite non banale occorre anche riscaldare la den-

sità ϱ degli ostacoli. Se consideriamo il rettangolo di base $2R$ e altezza t , osserviamo che il numero di ostacoli che cadono in media dentro questo rettangolo è $2\varrho Rt$ e dunque, a t fissato, la particella ha probabilità finita di avere una collisione se $2\varrho Rt = O(1)$ e dunque se ϱ diverge come R^{-1} . Si può, in effetti, dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA. – Sia $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^2 \times S^1)$ e si consideri il limite $R \rightarrow 0$, $\varrho \rightarrow \infty$ in maniera tale che $R\varrho \rightarrow \lambda$. Allora se \mathbb{E}_ϱ denota l'aspettazione rispetto a una distribuzione di Poisson di ostacoli con densità ϱ ,

$$(1.14) \quad \lim_{R \rightarrow 0} \mathbb{E}_\varrho f(T_c^{-t}(x, v)) = f(x, vt) \quad q.o.(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$$

dove f è l'unica soluzione dell'Eq. (1.1) con dato iniziale f_0 .

Il teorema che abbiamo descritto qui è dovuto a Gallavotti [G1], [G2]. Successive analisi e generalizzazioni si possono trovare nei seguenti riferimenti bibliografici [BBS], [S], [DeP], [DeR], [CPR]. Si noti che la stocasticità sugli ostacoli è una condizione assolutamente necessaria per ottenere una descrizione cinetica del comportamento della distribuzione della particella nel limite che stiamo considerando. Infatti se si considera una distribuzione non aleatoria ma periodica di ostacoli (si veda [BGW]), non è possibile ottenere, nel limite, un'equazione lineare del tipo (1.1).

Opportune distribuzioni periodiche di ostacoli possono peraltro evidenziare comportamenti idrodinamici. Se, assieme al limite $R \rightarrow 0$, $\varrho = O(R^{-2})$, riscaldiamo anche i tempi $t = O(R^{-1})$, la densità spaziale si comporta come una soluzione dell'equazione del calore.

Tale importante risultato, che fornisce una deduzione meccanica dell'equazione del calore, è dovuto a Bunimovich e Sinai (vedi [BS]) e costituisce a mio avviso il risultato più importante ottenuto nello studio della transizione dal microscopico al macroscopico. Le tecniche utilizzate nella dimostrazione di questo risultato sono piuttosto complesse e una loro analisi, anche superficiale, esula dagli scopi della presente nota.

Nel caso del modello di Lorentz il risultato descritto dal teorema di Gallavotti e quello di Bunimovich e Sinai, corrispondono alle frecce 1 e 2 del diagramma in introduzione. Si può anche facilmente dimostrare (vedi [EP] per dettagli) la transizione descritta dalla freccia 3. Tecnicamente ciò corrisponde a prendere il limite $\lambda \rightarrow \infty$ per la soluzione della (1.1). L'equazione idrodinamica che si ottiene per la densità spaziale è ancora l'equazione del calore. Tuttavia il diagramma in introduzione non è commutativo perché i coefficienti di diffusione dell'equazione del calore così ottenuta e quella derivata da Bunimovich e Sinai, sono diversi. In altre parole l'idrodinamica del modello di Lorentz e quella dell'equazione di Boltzmann lineare (1.1) non è la stessa.

2. – L'equazione di Boltzmann e la sua derivazione meccanica.

Passiamo ora ad analizzare una situazione in cui il sistema di partenza sia costituito da un numero N molto grande di particelle seguendo Ludwig Boltzmann che, nel 1872, usando considerazioni meccaniche e statistiche, derivò un'equazione di evoluzione per descrivere il comportamento di un gas rarefatto. Il punto di partenza dell'analisi di Boltzmann è di rinunciare a studiare il gas in termini del moto dettagliato delle molecole che costituiscono il gas, vista l'impossibilità pratica di tale proponimento e la sua inutilità al fine di ottenere informazioni rilevanti per la Fisica. Piuttosto siamo interessati alla funzione $f(x, v)$ che denota la densità di probabilità di una particella assegnata. Con essa possiamo calcolare le quantità interessanti per il comportamento di insieme (macroscopico o termodinamico) del sistema. L'equazione di Boltzmann è la seguente:

$$(2.1) \quad (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f = Q(f, f)$$

dove Q , detto operatore di collisione, ha la forma:

$$(2.2) \quad \int dv_1 \int_{S_+^2} dn (v - v_1) \cdot n [f(x, v') f(x, v_1') - f(x, v) f(x, v_1)]$$

e

$$(2.3) \quad v' = v - n[n \cdot (v - v_1)] \quad v_1' = v_1 + n[n \cdot (v - v_1)]$$

sono le velocità che si ottengono dopo la collisione di due sfere rigide. Il vettore unitario n (detto parametro di impatto) varia, fissate le velocità v e v_1 prima dell'urto, nella semisfera $S_+^2 = \{n | n \cdot (v - v_1) \geq 0\}$.

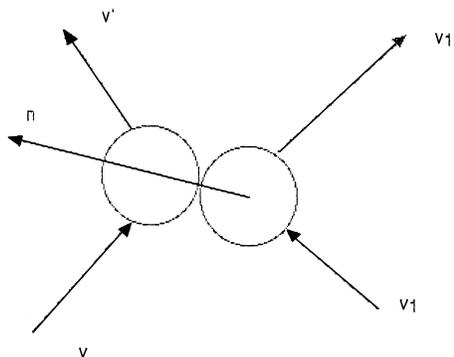


Fig. 6

Si noti che le equazioni (2.3) sono conseguenza delle leggi di conservazione dell'energia, dell'impulso e del momento angolare.

L'argomento utilizzato da Boltzmann per derivare l'equazione (2.1) fu es-

senzialmente il seguente. La variazione temporale della densità di probabilità f di una particella prefissata (particella test), è dovuta a due effetti. Il primo, il moto libero, è descritto dall'operatore di trasporto a primo membro della (2.1). Denotando poi con Coll la variazione di f dovuta alle collisioni, possiamo scrivere:

$$(2.4) \quad (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f = \text{Coll} ,$$

dove

$$(2.5) \quad \text{Coll} = G - L$$

Con L e G (termini di perdita e di guadagno) si denotano i contributi positivi e negativi alla variazione di f dovuti alle collisioni.

È chiaro che, in assenza di collisioni, la derivata temporale lungo le caratteristiche $x + vt$ (che è $(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f$) svanisce. Se ci sono collisioni, tale derivata è non nulla. Più precisamente $L dx dv dt$ è la probabilità che la nostra particella test sparisca dalla cella dello spazio delle fasi $dx dv$ intorno al punto x, v a causa di una collisione nell'intervallo temporale $(t, t + dt)$. $G dx dv dt$ è la probabilità di apparire in tale cella, per la stessa ragione, nello stesso intervallo temporale. Tali probabilità possono essere calcolate assumendo di avere solo collisioni binarie. Un semplice calcolo mostra che

$$(2.6) \quad L = (N - 1) r^2 \int_{S_-^2} dv_1 \int dn f_2(x, v, x + nr, v_1) |(v_1 - v) \cdot n| ,$$

dove S_-^2 è la semisfera $\{n | (v_2 - v) \cdot n < 0\}$. Per il termine di guadagno abbiamo invece

$$(2.7) \quad G = (N - 1) r^2 \int_{S_+^2} dv_1 \int dn f_2(x, v, x + nr, v_1) |(v_1 - v) \cdot n| .$$

In queste espressioni f_2 denota la densità di probabilità relativa ad una coppia di particelle.

Fino adesso non abbiamo fatto alcuna approssimazione tranne il fatto di aver trascurato i termini dovuti a collisioni multiple che, tuttavia, coinvolgendo una varietà di dati iniziali di codimensione positiva, hanno probabilità nulla di avvenire e dunque sono trascurabili.

L'equazione (2.4) con le espressioni (2.6) e (2.7) è completamente inutile perché non fornisce un'equazione chiusa per la f : la sua derivata temporale coinvolge la f_2 . A sua volta un'equazione di evoluzione per la f_2 coinvolgerebbe la f_3 e così via. Per spezzare questa catena di implicazioni, Boltzmann formulò la sua assunzione fondamentale, e cioè:

$$(2.8) \quad f_2(x, v, x_1, v_1) = f(x, v) f(x_1, v_1) .$$

La (2.8) è una proprietà di indipendenza statistica, e cioè la particella test, e un'altra particella predeterminata hanno distribuzioni scorrelate.

Tale proprietà, detta propagazione del caos (*Stosszahlansatz*), sembra contraddittoria a prima vista: se due particelle collidono si creano necessariamente delle correlazioni. Tuttavia la (2.8) viene invocata da Boltzmann in maniera più sottile come vedremo tra un attimo.

Si osservi preliminarmente la taglia dell'operatore di collisione. Nelle situazioni di rarefazione $Nr^3 \approx 10^{-4} \text{ cm}^3$ (che è il volume occupato dalle molecole) è molto piccolo, mentre $Nr^2 = O(1)$. Questo implica che $G = O(1)$. Siccome abbiamo a che fare con un grande numero di particelle, siamo tentati di considerare il limite per $N \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$ in modo tale che $r^2 = O(N^{-1})$. Come conseguenza la probabilità che una prefissata coppia di particelle collida è $O(r^2)$ e dunque è trascurabile. Tuttavia la probabilità, per una data particella, di collidere con un'altra a caso è $O(Nr^2) = O(1)$. La condizione (2.8) fa riferimento a due particelle preselezionate e dunque non è assurdo ipotizzare che tale relazione valga nella situazione limite che vogliamo studiare. Se vogliamo però utilizzare la (2.8) dobbiamo fare attenzione a farlo solo in situazioni precollisionali perché la collisione crea senz'altro correlazioni. Procedendo in questo modo e cioè rappresentando L e G in termini delle velocità precollisionali, invocando la continuità di f sulle traiettorie, si perviene all'equazione (2.1).

La caratteristica fondamentale delle soluzioni dell'equazione di Boltzmann è il famoso teorema H che stabilisce che il funzionale seguente,

$$(2.9) \quad H(f) = \int dx \int dv f \log f(x, v)$$

detta Entropia, è decrescente lungo le soluzioni dell'equazione (2.1).

Se da una parte il teorema H indica la tendenza dei sistemi che obbediscono all'equazione (2.1) a termalizzare, dall'altra, come è stato osservato da Poincaré ed altri, dimostra altresì la non equivalenza dell'equazione di Boltzmann con le leggi di Newton, che, come è ben noto, sono temporalmente reversibili. Si pose dunque la questione se l'equazione di Boltzmann fosse un'equazione fenomenologica che funziona..... quando funziona, o fosse conseguenza delle equazioni di Newton, come Boltzmann stesso lucidamente affermava. Rimandiamo il lettore all'affascinante monografia di C. Cercignani [C] sulla vita e l'opera di Boltzmann, per comprendere il clima culturale in cui la Teoria Cinetica nasce e si sviluppa e le polemiche che l'equazione di Boltzmann ha provocato nella comunità scientifica.

D'altra parte, come Hilbert sembra chiaramente affermare, il problema della validità dell'equazione di Boltzmann non può essere posto in chiave ideologica e filosofica, ma deve essere affrontato in maniera rigorosamente matematica.

Dopo quasi settanta anni, H. Grad [G], seguendo argomenti euristici forniti dallo stesso Boltzmann, congetturò che la sua equazione ha un carattere asin-

totico. Più precisamente deve essere valida nel limite:

$$(2.10) \quad N \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0, \quad Nr^2 \rightarrow \text{const}$$

Tale limite è comunemente detto di Boltzmann-Grad (B-G) e nasce dall'analisi della costante davanti agli operatori G e L . Dopo vari rilevanti contributi dovuti a Grad [G], Kac [K], Cercignani [C1] ed altri, Lanford ha dimostrato nel 1975 (vedi [L]), che l'equazione di Boltzmann può essere ottenuta, nel limite B-G, per tempi sufficientemente piccoli. Una molto parziale generalizzazione di R. Illner e dell'autore di questo articolo, è stata ottenuta nel 1989 nel caso di una nube di gas nel vuoto, per tempi arbitrari e dati piccoli (vedi [IP]).

Diamo ora un'idea della prova di Lanford, rimandando il lettore ai riferimenti [L], [EP] e [CIP] per i dettagli e ulteriori commenti.

Consideriamo un sistema di N sfere di raggio r che si muovano nello spazio. La dinamica è definita nel modo seguente. Denotiamo con $(X_N := x_1, \dots, x_N; V_N := v_1, \dots, v_N)$ uno stato del sistema, ove x_i and v_i indicano la posizione e velocità della i -ma particella. Dobbiamo aggiungere la condizione di esclusione:

$$|x_i - x_j| > r$$

per ogni coppia $i \neq j$, $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N$. Dato uno stato iniziale del sistema, l'evoluzione temporale è definita come moto libero $x_i(t) = x_i + v_i t$ fino al primo istante di contatto tra due delle N sfere. Note le velocità precollisionali, si applica la formula (2.3) per calcolare le velocità postcollisionali (uscenti) per applicare ancora il moto libero fino al secondo istante di collisione e così via. Non è affatto ovvio che tale procedura sia ben definita. Si può in effetti dimostrare (vedi [CIP]) che la dinamica di N sfere dure è ben definita per quasi tutte (rispetto alla misura di Lebesgue) le condizioni iniziali. Denotiamo con

$$(2.11) \quad (X_N, V_N) \rightarrow T^t(X_N, V_N)$$

il flusso dinamico così definito.

Se $\mu_N = \mu_N(X_N, V_N)$ è una densità di probabilità allora la sua evoluzione è definita nel modo seguente:

$$(2.12) \quad \mu_N(X_N, V_N; t) = \mu_N(T^{-t}(X_N, V_N)).$$

Si può anche dimostrare che la (2.12) definisce un gruppo a un parametro fortemente continuo di isometrie in tutti gli $L_p(dX_N, dV_N)$ per cui

$$(2.13) \quad \mu_N(X_N, V_N; t) = (e^{\mathcal{L}_N^t} \mu_N)(X_N, V_N)$$

Il generatore \mathcal{L}_N^r si chiama operatore di Liouville.

Assumiamo che la distribuzione di probabilità μ_N sia inizialmente, e dunque anche per tempi successivi, simmetrica nello scambio di particelle.

Se vogliamo studiare il comportamento tipico di una particella o di un grup-

po prefissato di particelle, è naturale introdurre la quantità:

$$(2.14) \quad f_j^N(X_j, V_j) = \int dX_{N-j} \int dV_{N-j} \mu^N(X_j, X_{N-j}, V_j, V_{N-j}),$$

che è la densità di probabilità relativa al gruppo di particelle $1 \dots j$ (o a qualunque altro gruppo prefissato di j particelle in virtù della simmetria).

È possibile ricavare un'equazione di evoluzione per la famiglia $\{f_j^N\}_{j=1}^N$ (ovviamente $f_N^N = \mu_N$). Si ha:

$$(2.15) \quad \partial_t f_j^N + \mathcal{L}_j^r f_j^N = C_{j+1}^r f_{j+1}^N, \quad j = 1 \dots N - 1.$$

per un opportuno operatore C_{j+1}^r che manda distribuzioni a $j + 1$ particelle in distribuzioni a j particelle.

Il significato di tale gerarchia di equazioni (che prende il nome di gerarchia BBKGY dai nomi Born, Bogoliubov, Kirkwood e Yvon) è trasparente. La variazione temporale di f_j^N dipende da due cause. Una è il moto libero e l'interazione tra il primo gruppo di j particelle. Tale variazione è descritta dall'operatore \mathcal{L}_j^r . La seconda causa è dovuta agli urti con le altre $N - j$ particelle. Tale variazione, descritta dall'operatore C_{j+1}^r , dipende da f_{j+1}^N calcolata al contatto tra una delle prime j sfere con la $j + 1$ -ma. La taglia di questo operatore è $r^2 j(N - j)$ che è $O(1)$, per j fissato, nel limite B-G che abbiamo in mente. Inoltre:

$$(2.16) \quad \mathcal{L}_j^r = - \sum_{k=1}^j v_k \cdot \nabla_{x_k} + O(j^2 r^2).$$

Infatti il moto di j sfere converge al moto libero nel limite B-G come è ovvio.

Si introduca ora la famiglia di funzioni:

$$(2.17) \quad f_j(t) = f(t)^{\otimes j}$$

ove $f(t)$ risolve l'equazione di Boltzmann (2.1). È facile dimostrare che la famiglia $\{f_j(t)\}$ soddisfa alla seguente gerarchia di equazioni

$$(2.18) \quad \partial_t f_j + \sum_{k=1}^j v_k \cdot \nabla_{x_k} f_j = C_{j+1} f_{j+1}, \quad j = 1 \dots \infty.$$

dove C_{j+1} è il limite formale di C_{j+1}^r per $r \rightarrow 0$.

Per j fissato esprimiamo le soluzioni delle due equazioni (2.15) e (2.18) per mezzo di serie. Si ha:

$$(2.19) \quad \begin{cases} f_j^N(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(N-j) \dots (N-j+n)}{N^n} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \\ S_j^r(t-t_1) C_{j+1}^r \dots S_{j+n-1}^r(t_{n-1}-t_n) C_{j+n}^r S_{j+n}^r(t_n) f_{j+n}^r(0) \end{cases}$$

dove $S_j^r(t) = e^{t \mathcal{L}_j^r}$ è il gruppo a un parametro generato dalla dinamica di j sfere

di raggio r . Il dato iniziale $f_{j+n}^r(0)$ descrive uno stato che approssima molto bene un dato completamente fattorizzato del tipo (2.17). Analogamente esprimiamo i prodotti di soluzioni dell'equazione di Boltzmann per mezzo della serie

$$(2.20) \quad \begin{cases} f_j(t) = \sum_{n \geq 0} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \\ S(t-t_1) C_{j+1} \dots S(t_{n-1}-t_n) C_{j+n} S(t_n) f_0^{\otimes n+j} \end{cases}$$

dove $S(t) f_j(X_j, V_j) = f_j(X_j - V_j t, V_j)$ denota l'evoluzione libera.

La convergenza quasi ovunque di $f_j^N(t)$ a $f_j(t)$ nel limite B-G, si ottiene attraverso il controllo della convergenza uniforme delle due serie, per ogni j e t sufficientemente piccolo e l'ispezione diretta della convergenza termine a termine. (Vedi [L], [EP] e [CIP] per dettagli e commenti).

Si osservi che l'argomento usato è del tipo di Cauchy-Kovaleski. In altre parole si lavora con espressioni delle soluzioni e non con i generatori. La piccolezza del tempo è conseguenza del fatto che le serie (2.19) e (2.20) sono controllate da serie geometriche convergenti solo per un tempo piccolo.

Il risultato di validità che abbiamo descritto è molto più delicato di quanto non sembri a prima vista. Infatti lo stesso risultato è falso nel caso di un sistema di diamanti rigidi nel piano. Ogni diamante ha quattro velocità che sono i versori degli assi coordinati e i loro opposti. La regola di collisione è quella descritta in Fig 7.

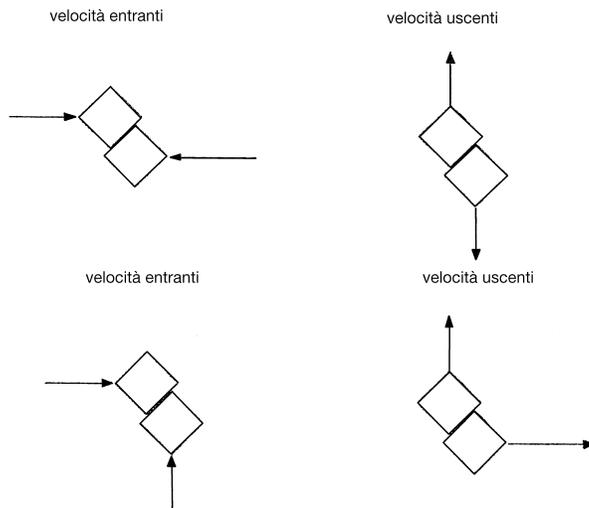


Fig. 7

L'equazione cinetica per tale sistema dinamico nel limite B-G è:

$$(2.21) \quad (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(x, v, t) = \lambda^{-1} [f(x, v^\perp) f(x, -v^\perp) - f(x, v) f(x, -v)]$$

dove v^\perp è v la ruotato di $\pi/2$. L'eq. (2.21) viene detta modello di Broadwell. Notare che la seconda collisione in Fig. 7 non gioca alcun ruolo nel limite a causa del fatto che le particelle sono identiche. Ovviamente l'eq. (2.21) può essere dedotta formalmente con gli stessi argomenti euristici che ci hanno condotto a ipotizzare la validità dell'equazione di Boltzmann per sfere dure. Tuttavia tali argomenti portano a un risultato falso. Uchiyama [U] (vedi anche [CIP]) ha sorprendentemente mostrato che la convergenza termine a termine fallisce se consideriamo un numero di collisioni più grande di tre. Questo esempio mostra come sia pericoloso fidarsi di argomenti formali in questo genere di problemi.

BIBLIOGRAFIA

- [BBS] C. BOLDRIGHINI - C. BUNIMOVICH - YA. SINAI, *On the Boltzmann equation for the Lorentz gas*, J. Stat. Phys., **32** (1983), 477-501.
- [BS] L. A. BUNIMOVICH - YA. G. SINAI, *Statistical properties of the Lorentz gas with periodic configuration of scatterers*, Comm. Math. Phys., **78** (1981), 478-497.
- [BGW] J. BURGAIN - F. GOLSE - B. WENNEBERG, *On the distribution of free path length for the periodic Lorentz gas*, Comm. Math. Phys., **190** (1998), 491-508.
- [CPR] E. CAGLIOTI - M. PULVIRENTI - V. RICCI, *Derivation of a linear Boltzmann equation for a periodic Lorentz gas*, Markov Proc. Rel. Fields, **3** (2000), 265-285.
- [C] C. CERCIGNANI, *Ludwig Boltzmann e la Meccanica Statistica*, La Goliardica (Pavia), 1998.
- [C1] C. CERCIGNANI, *On the Boltzmann equation for rigid spheres*, Transp. Theor. Stat. Phys., (1972), 211-225.
- [CIP] C. CERCIGNANI - R. ILLNER - M. PULVIRENTI, *The mathematical theory of dilute gases*, Springer series in Appl. Math., vol. 106, 1994.
- [DeP] L. DESVILLETES - M. PULVIRENTI, *The linear Boltzmann equation for long-range forces: a derivation from particle systems*, Models Methods Appl. Sci., **9** (1999), 1123-1145.
- [DeR] L. DESVILLETES - V. RICCI, *Rigorous derivation of a linear kinetic equation of Fokker-Plank type in the limit of grazing collisions*, Jour. Stat. Phys., **104** (2001), 1173-1189.
- [DPL] R. J. DI PERNA - P. L. LIONS, *On the Cauchy problem for the Boltzmann equations: Global existence and weak stability*, Annals of Mathematics, **130** (1989), 321-366.
- [EP] R. ESPOSITO - M. PULVIRENTI, *From Particles to Fluids*, Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, North-Holland, vol. 3, S. Friedlander and D. Serre editors, 2004.

- [G1] G. GALLAVOTTI, *Divergences and approach to equilibrium in the Lorentz and the Wind-tree models*, *Physical Review*, **185** (1969), 308-322.
- [G2] G. GALLAVOTTI, *Rigorous theory of the Boltzmann equation in the Lorentz gas*, reprinted in G. Gallavotti *Meccanica Statistica*, Quaderni del CNR n. 50, Nota interna n. 358 Istituto di Fisica Università di Roma, 1972 (1995), 191-204.
- [G] H. GRAD, *On the kinetic theory of rarified gases*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2** (1949), 331-407.
- [IP] R. ILLNER - M. PULVIRENTI, *Global validity of the Boltzmann equation for two and three-dimensional rare gas in vacuum: erratum and improved result*, *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), 143-146.
- [K] M. KAC, *Probability and related topics*, Interscience; New York, 1959.
- [L] O. LANFORD III, *The evolution of large classical system*, *Lect. Notes in Physics*. Springer, (J. Moser ed.), **35** (1975), 1-111.
- [M] C. B. MORREY, *On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 279-326.
- [S] H. SPOHN, *The Lorentz flight process converges to a random flight process*, *Comm. Math. Phys.*, **60** (1978), 277-290.
- [U] K. UCHIYAMA, *On the Boltzmann-Grad limit for the Broadwell model of the Boltzmann equation*, *J. Statist. Phys.*, **52** (1988), 331-355.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»
Piazzale Aldo Moro, 2 - 00185 Roma