Alessandro Musesti

Equazioni di bilancio della meccanica dei continui nell'ambito della teoria geometrica della misura

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-B** (2004), n.2, p. 305–317.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7B_2_305_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
(8) **7**-B (2004), 305-318

Equazioni di bilancio della Meccanica dei Continui nell'ambito della Teoria Geometrica della Misura (*).

ALESSANDRO MUSESTI

Summary. – *We present two formulations of the balance laws of Continuum Mechanics, by means of a set-theoretic approach (Cauchy fluxes and interactions) and a distributional one (virtual powers). In particular, we show how the regularity assumptions can be weakened (we deal with fields with divergence measure). Then, by means of the Principle of Virtual Powers, we find the Cauchy's Stress Tensor in the case of a continuous body which is merely an oriented differential manifold, and finally we study the case of the so-called second gradient materials, in which edge interactions can appear.*

Sunto. – *Si dà una presentazione della formulazione delle equazioni di bilancio della Meccanica dei Continui tramite l'approccio insiemistico (flussi e interazioni di Cauchy) e quello distribuzionale (potenze virtuali), illustrando i progressi ottenuti nell'indebolimento delle ipotesi, fino a comprendere campi tensoriali a divergenza misura. Si mostra poi come l'approccio attraverso il Principio delle potenze virtuali permetta di individuare il tensore degli sforzi anche nel caso di un corpo continuo dotato semplicemente di una struttura di varietà differenziabile orientata e di studiare il caso dei cosiddetti materiali di secondo gradiente, in cui possono comparire anche interazioni di spigolo.*

1. – Introduzione.

In questa comunicazione vengono presentati i risultati di alcune ricerche [2, 6, 7, 3], condotte in collaborazione con Marco Degiovanni e Alfredo Marzocchi, che riguardano alcuni aspetti analitici dei fondamenti della Meccanica dei Continui, con particolare attenzione alla struttura delle equazioni di bilancio.

Consideriamo come esempio il bilancio della quantità di moto: denotando con ϱ la densità di massa, $\boldsymbol{a}$ il campo di accelerazione, $\boldsymbol{b}$ la densità volumetrica delle forze esterne e $\boldsymbol{t}$ la densità superficiale delle forze interne, la conserva-

(*) Comunicazione presentata a Milano in occasione del XVII Congresso U.M.I.

zione della quantità di moto si esprime assumendo

$$\frac{d}{dt}\int_A \varrho \boldsymbol{v}\, dV = \int_A \varrho \boldsymbol{b}\, dV + \int_{\partial A} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\, dS ,$$

per ogni *sottocorpo* A del corpo. Applicando poi il Teorema degli sforzi di Cauchy e il Teorema della divergenza, sotto opportune ipotesi di regolarità, e sfruttando l'arbitrarietà di A, si ottiene

$$\varrho \boldsymbol{a} = \varrho \boldsymbol{b} + \mathrm{div}\mathsf{T}$$

dove T è il tensore degli sforzi di Cauchy.

A questo punto, la scelta di opportune relazioni costitutive per T porta alla formulazione di un problema ai valori al contorno per un sistema di equazioni alle derivate parziali. Tuttavia, nello studio analitico di tali equazioni è spesso utile indebolire la regolarità della funzione incognita, mediante una formulazione debole. In questo caso, le ipotesi di regolarità introdotte per ottenere la forma locale del bilancio possono risultare superflue e quindi limitanti.

Ecco perché a partire dalla fine degli anni '50 [8] si è tentato di inserire tutta la materia in un quadro più generale, che studi direttamente la struttura delle equazioni di bilancio piuttosto che la formulazione differenziale del problema.

Un'equazione di bilancio, in un istante fissato, ha la forma

$$\dot{E}(A) = I(A, A^e),$$

dove $I(A, C)$ denota la porzione di una certa quantità (calore, sforzo, ecc.) che C trasferisce su A e si chiama *interazione* tra A e C [5].

Gli obiettivi principali sono:

- ottenere direttamente da tale *legge globale* un sistema di equazioni differenziali in forma debole;
- indebolire le ipotesi di regolarità (campi con divergenza misura);
- formulare la teoria anche mediante il Principio delle Potenze Virtuali, esaminandone i vantaggi.

2. – Alcune nozioni di teoria della misura.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Denoteremo con $\mathcal{L}^n(E)$ la misura esterna di Lebesgue n-dimensionale e con $\mathcal{H}^{n-1}(E)$ la misura esterna di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale di E. Inoltre $\mathrm{cl}\,E$, $\mathrm{int}\,E$, $\mathrm{bd}\,E$ rappresenteranno rispettivamente la chiusura, la parte interna e la frontiera topologica dell'insieme.

Introduciamo l'insieme E_*, *parte interna di E secondo la teoria della misura*, come l'insieme dei *punti di densità* di E, ovvero

$$E_* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(x) \setminus E)/r^n \to 0 \ \text{ per } \ r \to 0^+ \right\}.$$

La *frontiera di E secondo la teoria della misura* è l'insieme

$$\partial_* E = \mathbb{R}^n \setminus [E_* \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)_*].$$

Se $E_* = E$, diciamo che E è *normalizzato*. Se $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E) < +\infty$, diciamo che E ha *perimetro finito*. Per tali insiemi è possibile definire una *normale esterna* $\boldsymbol{n}^E$ su $\partial_* E$ e dimostrare il Teorema della divergenza per campi lipschitziani.

3. – La classe dei sottocorpi e delle superfici materiali.

Introduciamo in questa sezione la nostra scelta per la famiglia dei sottocorpi. Notiamo che in tale definizione l'unica ipotesi di tipo topologico è che la chiusura *topologica* di ogni sottocorpo sia contenuta nel corpo continuo.

DEFINIZIONE 1. – Il *corpo continuo* è un aperto limitato B di $\mathbb{R}^n$ che sia normalizzato e di perimetro finito. La *classe dei sottocorpi* di B è

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ normalizzato e di perimetro finito, } \mathrm{cl} A \subseteq B\}.$$

Introduciamo inoltre la classe delle *coppie separate* di sottocorpi

$$\mathfrak{D} = \{(A, C) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : A \cap C = \emptyset\}.$$

Una *superficie materiale* S in B è una coppia $(\widehat{S}, \boldsymbol{n}_S)$ tale che $\widehat{S}$ è un sottoinsieme boreliano di $\partial_* A$ per qualche $A \in \mathcal{M}$ e $\boldsymbol{n}_S = \boldsymbol{n}^A|_{\widehat{S}}$. Denoteremo con $\mathcal{S}$ la famiglia delle superfici materiali in B.

OSSERVAZIONE. – Perché scegliamo gli insiemi di perimetro finito come sottocorpi? Come già osservato in [1], risulta che gli insiemi di perimetro finito sono la classe più ampia su cui si possa formulare il Teorema della divergenza per campi regolari. Infatti, nell'ambito della teoria della misura la versione più generale di tale teorema si può scrivere come

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \cdot d\mu^E$$

per ogni $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana con supporto compatto, dove μ^E è una misura di Radon a valori vettoriali. Ma tale formula è *equivalente* al fatto che E sia di perimetro localmente finito. Da ciò segue, per noti teoremi di regolarità (vedi ad esempio [4]), che $\mu^E = \boldsymbol{n}^E(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E)$ e il Teorema della divergenza si scrive

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial_* E} \phi \cdot \boldsymbol{n}^E \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

D'altra parte, ci si può chiedere se la classe dei sottoinsiemi di perimetro finito non sia persino troppo vasta per gli scopi della teoria. Un punto di vista di questo tipo è stato sostenuto in [9] ed ha portato all'introduzione della nozione di «fit region». Si veda anche [10] per dei confronti su possibili scelte della famiglia dei sottocorpi.

Per quanto riguarda le nozioni trattate in questo intervento, si può dire (vedi [2]) che, se un'equazione di bilancio è valida per (quasi) ogni n-intervallo, allora essa è valida per (quasi) ogni sottoinsieme di perimetro finito. Analogamente, una interazione definita su quasi ogni coppia di n-intervalli si estende in modo essenzialmente unico a quasi ogni coppia di sottoinsiemi di perimetro finito (Teorema 7 più avanti). Non si vede il motivo, quindi, nell'ambito di questa teoria, di scegliere classi intermedie di sottocorpi.

4. – Campi a divergenza misura.

Richiamiamo ancora qualche nozione importante. Denotiamo con $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},+}(B)$ l'insieme delle funzioni boreliane $h: B \to [0, +\infty]$ tali che $\int_K f\, d\mathcal{L}^n < +\infty$ per ogni compatto $K \subseteq B$. Inoltre $\mathfrak{M}(B)$ indica l'insieme delle misure di Borel positive su B finite sui compatti.

DEFINIZIONE 2. – Sia $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},+}(B)$, $\eta \in \mathfrak{M}(B)$. Poniamo

$$\mathcal{M}_{h\eta} = \left\{ A \in \mathcal{M} : \int_{\partial_* A} h\, d\mathcal{H}^{n-1} < +\infty\,,\ \eta(\partial_* A) = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{D}_{h\eta} = \{ (A, C) \in \mathcal{M}_{h\eta} \times \mathcal{M}_{h\eta} : A \cap C = \emptyset \},$$

$$\mathcal{S}_{h\eta} = \{ S \in \mathcal{S} : \text{esiste } A \in \mathcal{M}_{h\eta} \text{ con } \widehat{S} \subseteq \partial_* A \}.$$

Diciamo che un insieme $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ *contiene quasi tutto* $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M}_{h\eta} \subseteq \mathcal{P}$ per qualche $\eta \in \mathfrak{M}(B)$ e $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},+}(B)$. Allo stesso modo per $\mathfrak{D}_{h\eta}$ e $\mathcal{S}_{h\eta}$.

La precedente definizione generalizza un concetto introdotto in [10] per la prima volta.

DEFINIZIONE 3. – Sia $\mathsf{T} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(B; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N))$. Diciamo che T ha *divergenza misura* su B, se $\operatorname{div} \mathsf{T}$ è una distribuzione di ordine zero su B, ovvero per ogni compatto $K \subseteq B$ esiste c_K tale che

$$\forall f \in C_0^\infty(B),\ \operatorname{supt} f \subseteq K : \left| \int_B \mathsf{T} \operatorname{grad} f\, d\mathcal{L}^n \right| \le c_K \|f\|_\infty .$$

La nozione di «quasi tutto $\mathcal{M}$» introdotta nella Definizione 2 consente di ottenere un Teorema della divergenza anche in condizioni di regolarità su T ed A che sarebbero insufficienti per la formulazione usuale.

TEOREMA 1. – *Sia* $\mathsf{T} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(B; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N))$ *un campo tensoriale con divergenza misura. Allora*

$$\int_{\partial_* A} \mathsf{T}\boldsymbol{n}^A \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_A d(\mathrm{div}\,\mathsf{T})$$

per quasi ogni $A \in \mathcal{M}$.

Tale teorema è dimostrato in [2].

5. – Interazioni e flussi di Cauchy.

DEFINIZIONE 4. – Una funzione $I : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^N$ è una *interazione di Cauchy* se su quasi tutto $\mathfrak{D}$ valgono le seguenti proprietà:

(a) I è $*$-biadditiva, ovvero

$$I((A_1 \cup A_2)_*, C) = I(A_1, C) + I(A_2, C),$$

$$I(A, (C_1 \cup C_2)_*) = I(A, C_1) + I(A, C_2),$$

per $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ e $C_1 \cap C_2 = \varnothing$;

(b) esistono $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},\,+}(B)$ e $\nu \in \mathfrak{M}(B \times B)$ tali che

$$|I(A, C)| \leq \int_{\partial_* A \cap \partial_* C} h \, d\mathcal{H}^{n-1} + \nu(A \times C);$$

(c) esiste $\lambda \in \mathfrak{M}(B)$ tale che

$$\partial_* A \subseteq \partial_* C \;\Rightarrow\; |I(A, C)| \leq \lambda(A).$$

Se si può scegliere $h = 0$, l'interazione si dirà *di volume*; se invece si può scegliere $\lambda = 0$ l'interazione si dirà *di contatto*.

Il primo teorema importante riguarda la decomposizione di un'interazione di Cauchy.

TEOREMA 2 (Decomposizione). – *Sia I un'interazione di Cauchy. Allora si possono univocamente determinare un'interazione di volume I_b e un'interazione di contatto I_c tali che*

$$I = I_b + I_c$$

su quasi tutto $\mathfrak{D}$.

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE. – Per quasi ogni $(A, C) \in \mathcal{D}$ esistono

$$I_b(A, C) = \lim_k I(A_k, C_k),$$
$$I_c(A, C) = I(A, C) - I_b(A, C),$$

dove $(A_k), (C_k)$ sono opportune successioni di pluriintervalli in $\mathcal{M}$ fatte in modo che $\mathrm{cl}\, A_k \cap \mathrm{cl}\, C_k = \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (Figura 2). Si veda [6] per i dettagli. ■

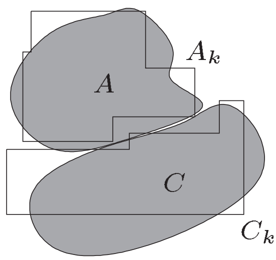

Fig. 1. – La costruzione di I_b.

DEFINIZIONE 5. – Una funzione $Q : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^N$ è un *flusso di Cauchy* se su quasi tutto $\mathcal{S}$ valgono le seguenti proprietà:

(a) Q è additiva, ovvero

$$Q(S \cup T) = Q(S) + Q(T);$$

(b) esiste $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},\,+}(B)$ tale che

$$|Q(S)| \leqslant \int_S h \, d\mathcal{H}^{n-1};$$

(c) esiste $\lambda \in \mathfrak{M}(B)$ tale che

$$|Q(\partial_* A)| \leqslant \lambda(A).$$

Tra le interazioni di contatto e i flussi di Cauchy esiste il seguente notevole legame, dimostrato in [6].

PROPOSIZIONE. – *Valgono i seguenti fatti:*

(i) per ogni interazione di contatto I_c esiste un flusso di Cauchy Q tale che

$$Q(\partial_* A \cap \partial_* C) = I_c(A, C) \quad \textit{su quasi tutto } \mathcal{D};$$

(ii) per ogni flusso di Cauchy Q esiste un'interazione di contatto I_c tale che

$$Q(\partial_* A \cap \partial_* C) = I_c(A, C) \quad \text{su quasi tutto } \mathfrak{D} \, ;$$

(iii) se I_1, I_2 sono due interazioni di contatto e Q_1, Q_2 sono due flussi di Cauchy tali che

$$j = 1, 2: \quad Q_j(\partial_* A \cap \partial_* C) = I_j(A, C) \quad \text{su quasi tutto } \mathfrak{D} \, ,$$

allora $Q_1 = Q_2$ su quasi tutto $\mathcal{S}$ se e solo se $I_1 = I_2$ su quasi tutto $\mathfrak{D}$.

6. – Rappresentazione integrale e forma distribuzionale.

In [2, 6] sono dimostrate le seguenti rappresentazioni.

PROPOSIZIONE. – *Sia Q un flusso di Cauchy. Allora esiste un campo tensoriale $\mathsf{T} \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(B; \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^N))$ con divergenza misura tale che*

$$Q(S) = \int_S \mathsf{T} \boldsymbol{n}_S \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

su quasi tutto $\mathcal{S}$. Inoltre, T è univocamente determinato $\mathcal{L}^n$-quasi ovunque.

PROPOSIZIONE. – *Sia I_b un'interazione di volume. Allora esistono una funzione boreliana $\boldsymbol{r} : B \times B \to \mathbb{R}^N$ e una misura $\mu \in \mathfrak{M}(B \times B)$ tali che $|\boldsymbol{r}(x, y)| = 1$ per μ-quasi ogni $(x, y) \in B \times B$ e*

$$I_b(A, C) = \int_{A \times C} \boldsymbol{r} \, d\mu$$

su quasi tutto $\mathfrak{D}$. Inoltre, tale rappresentazione è unica.

Grazie alle proposizioni precedenti si possono dimostrare i due teoremi principali sulle interazioni di Cauchy.

TEOREMA 3 (Rappresentazione integrale). – *Sia I un'interazione di Cauchy. Allora si ha*

$$I(A, C) = \int_{A \times C} \boldsymbol{r} \, d\mu + \int_{\partial_* A \cap \partial_* C} \mathsf{T} \boldsymbol{n}^A \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

su quasi tutto $\mathfrak{D}$.

TEOREMA 4 (Forma distribuzionale). – *Esistono e sono uniche una misura* $\gamma \in \mathfrak{M}(B)$ *e una funzione boreliana* $\dot{\boldsymbol{e}} : B \to \mathbb{R}^N$ *tali che* $|\dot{\boldsymbol{e}}(x)| = 1$ *e*

$$\int_B \varphi\, \dot{\boldsymbol{e}}\, d\gamma = \iint_{B \times B} \varphi(x)\, \boldsymbol{r}(x, y)\, d\mu(x, y) - \int_B \mathsf{T}\, \mathrm{grad}\, \varphi\, d\mathcal{L}^n$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B)$.

Nel caso $N = n$ è inoltre possibile dimostrare l'equivalenza tra la simmetria del tensore T e il bilancio debole del momento angolare.

TEOREMA 5. – *Sia* $\mathsf{T} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(B; \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$ *un campo tensoriale con divergenza misura. Allora sono fatti equivalenti:*

(i) esiste una misura $\nu \in \mathfrak{M}(B)$ *tale che per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e per quasi ogni* $A \in \mathcal{M}$ *si abbia*

$$\left| \int_{\partial_* A} (x - x_0) \wedge (\mathsf{T}(x)\, \boldsymbol{n}^A(x))\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right| \leqslant \left(\sup_{x \in A} |x - x_0| \right) \nu(A),$$

dove $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$;

(ii) $\mathsf{T}(x)$ *è simmetrico per* $\mathcal{L}^n$*-quasi ogni* $x \in B$.

7. – Interazioni definite sui pluriintervalli.

Dimostriamo in questa sezione, come abbiamo già anticipato, che un'interazione di Cauchy è univocamente determinata su quasi tutto $\mathfrak{D}$ a partire dai pluriintervalli.

DEFINIZIONE 6. – Una *griglia piena* è un insieme

$$G = \widehat{G} \times \ldots \times \widehat{G} \subseteq \mathbb{R}^n$$

dove $\widehat{G} \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \setminus \widehat{G}) = 0$. Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}^n$ è un *G-intervallo*, se è aperto e i suoi estremi appartengono a G. Un *G-pluriintervallo* è la parte interna secondo la teoria della misura di un'unione finita di G-intervalli. Denotiamo con $\mathcal{M}_G$ la famiglia dei G-pluriintervalli in $\mathcal{M}$ e con $\mathfrak{D}_G$ le coppie di elementi disgiunti di $\mathcal{M}_G$.

È possibile dimostrare che per ogni $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},+}(B)$ e $\eta \in \mathfrak{M}(B \times B)$ esiste una griglia piena G tale che $\mathcal{M}_G \subseteq \mathcal{M}_{h\eta}$. Quindi la famiglia $\mathcal{M}_G$ definisce un concetto di «quasi ogni» sulla classe $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^n}$ di tutti i pluriintervalli. Tale concetto risulta in un certo modo naturale, in quanto è ereditato direttamente dall'usuale concetto di «quasi ogni» rispetto alla misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$.

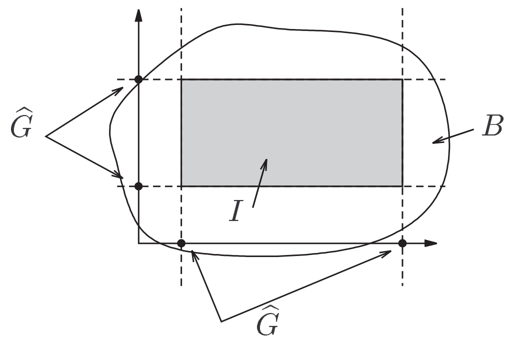

Fig. 2. – Un G-intervallo.

Definizione 7. – Sia G una griglia piena e I_0: $\mathfrak{D}_G \to \mathbb{R}^N$ una funzione tale che, per ogni $(A, C) \in \mathfrak{D}_G$:

(a) I_0 è $*$-biadditiva;

(b) esistono $h \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc},+}(B)$ e $\nu \in \mathfrak{M}(B \times B)$ tali che

$$|I_0(A, C)| \leq \int_{\partial_* A \cap \partial_* C} h \, d\mathcal{H}^{n-1} + \nu(A \times C);$$

(c) esiste $\lambda \in \mathfrak{M}(B)$ tale che

$$\partial_* A \subseteq \partial_* C \Rightarrow |I_0(A, C)| \leq \lambda(A).$$

Come si vede confrontando questa definizione con la Definizione 4, I_0 corrisponde ad una interazione di Cauchy il cui dominio è estremamente ridotto, in quanto è definita soltanto sulle coppie disgiunte di particolari pluriintervalli. Tuttavia, in [6] è provato il seguente risultato.

Teorema 6 (Teorema di estensione). – *Per ogni funzione I_0 che soddisfa la Definizione 7 esistono una griglia piena $\widetilde{G} \subseteq G$ e un'interazione di Cauchy I tale che il dominio di I contenga $\mathfrak{D}_{\widetilde{G}}$ e*

$$I(A, C) = I_0(A, C) \quad \textit{per ogni } (A, C) \in \mathfrak{D}_{\widetilde{G}}.$$

Inoltre, tale estensione è essenzialmente unica, nel senso che due estensioni così fatte coincidono su quasi tutto $\mathfrak{D}$.

8. – Potenze di ordine k.

Vogliamo ora brevemente presentare un approccio alternativo, esaminato in [7, 3], alla formulazione delle equazioni di bilancio. In questo caso, la funzione oggetto delle nostre considerazioni è la *potenza virtuale* e dipende sia dal sottocorpo che da un campo di velocità di classe C^∞, la *velocità virtuale*. È naturale in questo ambito partire direttamente dalla formulazione generale di potenze di ordine k, che tengono conto di possibili interazioni attraverso sottoinsiemi di codimensione k. In particolare, per $k = 2$ tali potenze descrivono le *interazioni di spigolo*.

DEFINIZIONE 8. – Una funzione $P : \mathcal{M}_G \times C^\infty(B; \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ è detta *potenza di ordine* k, se valgono le proprietà seguenti:

(a) $P(\cdot, \boldsymbol{v})$ è numerabilmente $*$-additiva e $P(A, \cdot)$ è lineare;

(b) esistono $\mu_0, \ldots, \mu_k \in \mathfrak{M}(B)$ tali che

$$\forall A \in \mathcal{M}_G,\ \forall \boldsymbol{v} \in C^\infty(B; \mathbb{R}^N):\ |P(A, \boldsymbol{v})| \leq \sum_{j=0}^{k} \int_A |\mathrm{grad}^{(j)} \boldsymbol{v}|\, d\mu_j,$$

dove $\mathrm{grad}^{(j)} \boldsymbol{v}$ denota il gradiente di ordine j di $\boldsymbol{v}$;

(c) esiste $\lambda \in \mathfrak{M}(B)$ tale che

$$\forall A \in \mathcal{M}_G,\ \forall \boldsymbol{v} \in C_c^\infty(A; \mathbb{R}^N):\quad |P(A, \boldsymbol{v})| \leq \int_A |\boldsymbol{v}|\, d\lambda\,.$$

La potenza P si dice *di volume* se ha ordine 0; si dice *di contatto* se $\lambda = 0$.

Si noti in particolare che una potenza di contatto è nulla sui campi di velocità che si annullano in un intorno della frontiera del sottocorpo.

Il seguente risultato, presentato in [3], fornisce una prima rappresentazione generale delle potenze. Lo enunceremo per comodità per $N = 1$. Il caso vettoriale generale può essere ricostruito per componenti. Denotiamo con Sym_j lo spazio delle forme j-lineari e simmetriche su $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 7 (Rappresentazione integrale di una potenza). – *Sia P una potenza di ordine k. Allora per $j = 0, \ldots, k$ esistono dei campi tensoriali boreliani e limitati $F_j \in L^1_{\mathrm{loc}}(B, \mathrm{Sym}_j; \mu_j)$ tali che*

$$P(A, v) = \sum_{j=0}^{k} \int_A F_j \cdot \mathrm{grad}^{(j)} v\, d\mu_j$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_G$ e ogni $v \in C^\infty(B)$.

In particolare, $P(\cdot, v)$ si estende in modo unico a tutti i boreliani di B.

Denoteremo nel seguito con lo stesso simbolo P tale estensione.

OSSERVAZIONE. – Si noti che il viceversa del precedente teorema è banalmente vero.

Torniamo ora al caso vettoriale di dimensione N. Il seguente risultato mostra che nel caso di potenze di ordine 1 è possibile ritrovare il Teorema degli sforzi di Cauchy nella forma debole vista in precedenza.

PROPOSIZIONE. – *Sia P una potenza di contatto di ordine* 1. *Allora esiste un campo tensoriale* $\mathsf{T} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(B;\, \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n;\, \mathbb{R}^N))$ *con divergenza misura tale che*

$$P(A,\, \boldsymbol{v}) = \int_{\partial_* A} \mathsf{T}\boldsymbol{n}^A \cdot \boldsymbol{v}\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in C_c^\infty(B;\, \mathbb{R}^N)$ *e per quasi ogni* $A \in \mathcal{M}$.

9. – Il caso in cui il sottocorpo sia una varietà.

L'approccio mediante le potenze virtuali risulta molto utile nel caso in cui il corpo meccanico non abbia una struttura geometrica forte ma sia semplicemente una varietà differenziabile orientata. Sia $\mathcal{X}_c(B)$ l'insieme dei campi vettoriali lisci su B a supporto compatto. In [7] si dimostra che su B è possibile definire i concetti di punto di densità, insieme di perimetro finito, classe di quasi tutti i sottocorpi, in modo intrinseco. In questo ambito, tratteremo il caso di potenze di ordine 1.

DEFINIZIONE 9. – Una funzione $P : \mathcal{M} \times \mathcal{X}_c(B) \to \mathbb{R}$ è una *potenza di contatto* sulla varietà B, se valgono le proprietà:

(a) $P(\cdot,\, \boldsymbol{v})$ è additiva e $P(A,\, \cdot)$ è lineare;

(b) per ogni struttura riemanniana su B, esiste $\lambda \in \mathfrak{M}(B)$ tale che

$$|P(A,\, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{v}\|_\infty\, \lambda(A) + \mathrm{Lip}\,(\boldsymbol{v})\ \mathcal{H}^n(A)$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}_c(B)$ e per quasi ogni $A \in \mathcal{M}$, dove $\mathrm{Lip}\,(\boldsymbol{v})$ denota la costante di Lipschitz di $\boldsymbol{v}$ nella struttura riemanniana;

(c) per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}_c(A)$ e per quasi ogni $A \in \mathcal{M}$ si ha $P(A,\, \boldsymbol{v}) = 0$.

OSSERVAZIONE. – Si noti che se la proprietà (b) è soddisfatta per una struttura riemanniana, allora lo è per tutte.

DEFINIZIONE 10. – Sia $\boldsymbol{a}$ un vettore e T una n-forma; definiamo la $(n-1)$-forma $\boldsymbol{a} \lrcorner T$ come

$$\langle \boldsymbol{a} \lrcorner T,\, \xi \rangle = \langle T,\, \xi \wedge \boldsymbol{a} \rangle$$

per ogni $(n-1)$-vettore ξ.

Allo stesso modo, se $\mathcal{T}$ è una forma differenziale di grado n e $\boldsymbol{v}$ un campo vettoriale, definiamo la forma differenziale $\boldsymbol{v} \lrcorner \mathcal{T}$ di grado $(n-1)$ come

$$(\boldsymbol{v} \lrcorner \mathcal{T})(x) = \boldsymbol{v}(x) \lrcorner \mathcal{T}(x) \quad \text{per ogni } x \in B\,.$$

In questa teoria, l'oggetto che corrisponde a un tensore a divergenza misura risulta essere una forma differenziale di grado n il cui bordo sia rappresentabile per integrazione, come spiega il seguente risultato.

TEOREMA 8 (Rappresentazione integrale su varietà). – *Sia P una potenza di contatto sulla varietà B. Allora esiste una forma differenziale $\mathcal{T}$ di grado n e di classe L^1_{loc} su B tale che*

$$P(A, \boldsymbol{v}) = \int_{\partial_* A} \boldsymbol{v} \lrcorner \mathcal{T}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathcal{X}_c(B)$ e per quasi ogni $A \in \mathcal{M}$. Inoltre, $\partial\mathcal{T}$ è rappresentabile per integrazione.

10. – Potenze di contatto di ordine 2.

Da ultimo, enunciamo un risultato di rappresentazione integrale sulla frontiera per potenze di ordine 2. Per questo dobbiamo prima introdurre una particolare sottoclasse degli insiemi di perimetro finito.

DEFINIZIONE 11. – Sia $A \in \mathcal{M}$. Diciamo che A ha *curvatura misura* se esistono una misura $\lambda_A \in \mathfrak{M}(\partial_* A)$ e un campo tensoriale boreliano $\mathsf{U} : \partial_* A \to \mathrm{Sym}_2$ tali che $|\mathsf{U}(x)| = 1$ per λ_A-q.o. $x \in \partial_* A$ e

$$-\int_{\partial_* A} [-(\operatorname{div} \mathsf{F}) \cdot \boldsymbol{n}^A + ((\operatorname{grad} \mathsf{F})\, \boldsymbol{n}^A \boldsymbol{n}^A) \cdot \boldsymbol{n}^A]\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial_* A} \mathsf{F} \cdot \mathsf{U}\, d\lambda_A$$

per ogni $\mathsf{F} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathrm{Sym}_2)$.

In particolare, gli n-intervalli hanno curvatura misura, così come in generale gli insiemi con frontiera C^2 a tratti.

Consideriamo ora una potenza di contatto P di ordine 2 tale che $\mu_1 = \mu_2 = \mathcal{L}^n$, dove le μ_i vengono dalla definizione di potenza di ordine k. A patto di assumere alcune ipotesi piuttosto tecniche (per maggiori dettagli si veda [3]), si può dimostrare il seguente risultato, formulato per comodità nel caso $N = 1$, dove i campi F_1 e F_2 sono stati introdotti nel Teorema 7.

TEOREMA 9. – *Vale la formula*

$$P(A, v) = \int_{\partial_* A} v[(F_1 - 2 \operatorname{div} F_2) \cdot \boldsymbol{n}^A + (\operatorname{grad} F_2 \boldsymbol{n}^A \boldsymbol{n}^A) \cdot \boldsymbol{n}^A]\, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial_* A} \frac{\partial v}{\partial n} (F_2 \boldsymbol{n}^A \cdot \boldsymbol{n}^A)\, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial_* A} v F_2 \cdot \mathsf{U}\, d\lambda_A$$

per ogni $v \in C^\infty(B)$ e per quasi ogni $A \in \mathcal{M}$ con curvatura misura.

Nel primo integrale di questa formula possiamo riconoscere la densità di sforzo

$$t(\boldsymbol{n}) = (F_1 - 2\,\mathrm{div}\, F_2 + (\mathrm{grad}\, F_2)\, \boldsymbol{nn})\cdot \boldsymbol{n}\ ;$$

si noti che tale scalare non è lineare rispetto alla normale. Il secondo integrale esprime una eventuale distribuzione superficiale di micro-coppie, che non poteva essere individuata con potenze del primo ordine. Nell'ultimo integrale, se la misura di curvatura λ_A e per esempio assolutamente continua rispetto ad $\mathcal{H}^{n-2}$, compaiono le *forze di spigolo*. Si noti il vantaggio di tale rappresentazione, che non è costretta ad indagare sulla geometria degli spigoli ma demanda tale compito all'integrazione con una misura che può essere singolare rispetto alla misura di area $\mathcal{H}^{n-1}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Banfi - M. Fabrizio, *Sul concetto di sottocorpo nella meccanica dei continui*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **LXVI** (1979), 136-142.

[2] M. Degiovanni - A. Marzocchi - A. Musesti, *Cauchy fluxes associated with tensor fields having divergence measure*, Arch. Ration. Mech. Anal., **147** (1999), 197-223.

[3] M. Degiovanni - A. Marzocchi - A. Musesti, *Edge force densities and second order powers*, preprint (2003).

[4] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser, Boston, 1984.

[5] M. E. Gurtin - W. O. Williams - W. P. Ziemer, *Geometric measure theory and the axioms of continuum thermodynamics*, Arch. Ration. Mech. Anal., **92** (1986), 1-22.

[6] A. Marzocchi - A. Musesti, *Decomposition and integral representation of Cauchy interactions associated with measures*, Cont. Mech. Thermodyn., **13** (2001), 149-169.

[7] A. Marzocchi - A. Musesti, *Balanced virtual powers in Continuum Mechanics*, Meccanica, **38** (2003), 369-389.

[8] W. Noll, *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics*, in *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics* (Berkeley, 1957/58), 266-281, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1959.

[9] W. Noll - E. G. Virga, *Fit regions and functions of bounded variation*, Arch. Ration. Mech. Anal., **102** (1988), 1-21.

[10] M. Šilhavý, *Cauchy's stress theorem and tensor fields with divergences in L^p*, Arch. Ration. Mech. Anal., **116** (1991), 223-255.

Dipartimento di Matematica e Fisica
Università Cattolica del Sacro Cuore
Via dei Musei 41, 25121 Brescia

Pervenuta in Redazione
il 4 novembre 2003