Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandro Trombetta

Sull'integrazione di funzioni a valori in semigruppi uniformi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **7-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2004), n.3, p. 583–586.

Unione Mastematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2004_8_7A_3_583_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Mastematica Italiana, 2004.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. VII-A, Dicembre 2004, 583-586

Sull'integrazione di funzioni a valori in semigruppi uniformi.

ALESSANDRO TROMBETTA

1. – Introduzione.

Lo studio delle misure a valori in gruppi topologici e semigruppi uniformi si è sviluppato nel secolo scorso principalmente fra il 1970 e il 1985. Nello sviluppo della teoria sono stati coinvolti vari matematici ed una esposizione sistematica di alcuni dei risultati ottenuti può trovarsi in C. Constantinescu [1] e P. de Lucia [2]. Diversa è la situazione per la teoria dell'integrazione vera e propria. In essa possiamo distinguere da un lato lo studio dell'integrazione per funzioni a valori in spazi di Banach o in spazi topologici convessi, dall'altro quello dell'integrazione per funzioni a valori in gruppi topologici o semigruppi uniformi. Quest'ultima parte della teoria, con la mancanza della struttura vettoriale, presenta notevoli difficoltà. Oltre alla monografia di M. Sion [5] e alla nota di J. C. Massè [3] i lavori in proposito sono pochi. Fra essi citiamo la nota di H. Millington [4]. Ci siamo quindi proposti di fare uno studio accurato dell'integrale di Sion che, anche se trascurato in questi ultimi anni, sembra particolarmente promettente. Abbiamo a tale scopo ripreso lo studio delle funzioni sezionabili e integrabili secondo Sion e successivamente fissato la nostra attenzione soprattutto sui teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

2. – Funzioni sezionabili e funzioni integrabili.

Iniziamo con il richiamare le nozioni di funzione sezionabile e di funzione integrabile. Siano Ω un insieme ed $\mathcal{R}$ un anello di parti di Ω. Siano $(S_1, +, \mathcal{U}_1)$, $(S_2, +, \mathcal{U}_2)$ ed $(S, +, \mathcal{U})$ semigruppi uniformi di Hausdorff ed $\mathcal{R}_0$ un σ-ideale in $\mathcal{R}$. Una funzione $f: \Omega \to \mathcal{P}(S_1)$ si dice sezionabile se per ogni $U \in \mathcal{U}_1$ esiste una famiglia P disgiunta e numerabile in $\mathcal{R}$ tale che $\Omega \setminus \cup_{X \in P} X \in \mathcal{R}_0$ e $f[X] \times f[X] \subseteq U$, per ogni $X \in P$, dove $f[X] = \bigcup_{x \in X} f(x)$. Si dimostra che il limite puntuale di una successione di funzioni sezionabili è sezionabile. Nel seguito denoteremo con $\bullet$ un prodotto di $S_1 \times S_2$ in S cioè una funzione $\bullet: (a, b) \in S_1 \times S_2 \to a \bullet b \in S$ tale che per ogni $a \in S_1$ e $b_1, b_2 \in S_2$ risulta $a \bullet (b_1 + b_2) = a \bullet b_1 + a \bullet b_2$, $a \bullet 0 = 0$. Per ogni $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ poniamo

$$\mathcal{P}_X = \left\{ P \in \mathcal{P}(\mathcal{R}) : P \ \textit{numerabile}, \ \textit{disgiunto e} \ X \subseteq \bigcup_{Y \in P} Y \right\}. \tag{1}$$

Per ogni P, $Q \in \mathcal{P}_X$ sia $P \leq Q$ se Q è più fine di P, ovvero se ogni elemento di Q

è contenuto in qualche elemento di P. La coppia $(\mathcal{P}_X, \leqslant)$ è un insieme orientato. Sia D l'insieme delle funzioni che ad ogni famiglia numerabile di parti di $\mathcal{R}$ associano una sua parte finita. Poniamo

$$\mathcal{D}_X = \{(P, \Delta) : P \in \mathcal{P}_X, \Delta \in D\}, \tag{2}$$

e, per ogni $(P, \Delta), (Q, \Gamma) \in \mathcal{D}_X$, sia $(P, \Delta) \leqslant (Q, \Gamma)$ se $P \leqslant Q$ e se $\Delta(R) \subseteq \Gamma(R)$ per ogni $R \in \mathcal{P}_X$. La coppia $(\mathcal{D}_X, \leqslant)$ è un insieme orientato. Una funzione $f : \Omega \to \mathcal{P}(S_1)$ si dice integrabile in $X \subseteq \Omega$ rispetto a μ, o più semplicemente integrabile in X, se esiste ed è unico al variare di $\varphi : \mathcal{R} \to S_1$ scelta per f (i. e. $\varphi(X) \in f[X]$ per ogni $X \in \mathcal{R}$) il limite della rete

$$\Big(\sum_{Y \in \Delta(P)} \varphi(Y) \bullet \mu(Y)\Big)_{(P, \Delta) \in (\mathcal{D}_X, \leqslant)}. \tag{3}$$

In tal caso l'elemento di S

$$\int_X f \bullet d\mu = (P, \Delta) \in (\mathcal{D}_X, \leqslant) \lim \sum_{Y \in \Delta(P)} \varphi(Y) \bullet \mu(Y), \tag{4}$$

dove $\varphi : \mathcal{R} \to S_1$ è una scelta per f, si dice integrale di f in X rispetto a μ, o integrale di f in X. Diremo poi che una funzione $f : \Omega \to \mathcal{P}(S_1)$ è integrabile rispetto a μ, o integrabile, se f è integrabile in X per ogni $X \subseteq \Omega$. È di notevole interesse stabilire in questo contesto condizioni sufficienti per l'integrabilità di una funzione. A tale proposito richiamiamo brevemente alcune definizioni. Una funzione $f : \Omega \to \mathcal{P}(S_1)$ si dice limitata rispetto a $\bullet$ se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esistono $\Omega_0 \in \mathcal{R}_0$ e $U_2 \in \mathcal{U}_2$ tali che per ogni $a_1, \dots, a_n \in f[\Omega \backslash \Omega_0]$ e per ogni $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in U_2$, tali che $(\sum_{i \in I} b_i, \sum_{i \in I} c_i) \in U_2$ per ogni $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, risulti

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i \bullet b_i, \sum_{i=1}^n a_i \bullet c_i\Big) \in U. \tag{5}$$

Una funzione $\mu : \mathcal{R} \to S_2$ si dice limitata rispetto a $\bullet$ se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $U_1 \in \mathcal{U}_1$ tale che per ogni $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in S_1$ con $(a_i, b_i) \in U_1 (i = 1, \dots, n)$ e per ogni $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{R}$ a due a due disgiunti risulta

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i \bullet \mu(X_i), \sum_{i=1}^n b_i \bullet \mu(X_i)\Big) \in U. \tag{6}$$

Ricordiamo infine che una funzione $\mu : \mathcal{R} \to S_2$ finitamente additiva si dice esaustiva se per ogni successione disgiunta $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in $\mathcal{R}$ risulta $\lim_{n \to \infty} \mu(X_n) = 0$.

TEOREMA 1 *(cfr. [5, teorema 4.2]). – Supponiamo che* $(S, +, \mathcal{U})$ *sia completo. Inoltre, siano* $\mu : \mathcal{R} \to S_2$ *una funzione finitamente additiva esaustiva limitata rispetto a* $\bullet$ *e* $f : \Omega \to \mathcal{P}(S_1)$ *una funzione sezionabile limitata rispetto a* $\bullet$. *Allora* f *è integrabile rispetto a* μ.

3. – Passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Il prossimo teorema è il principale risultato ottenuto e stabilisce una condizione sufficiente per il passaggio al limite sotto il segno di integrale analoga a quella di Caccioppoli-Vitali. Come corollari si ottengono i teoremi di passaggio al limite di M. Sion e H. Millington. Siano Ω un insieme, $\mathcal{R}$ un σ-campo di parti di Ω, $\mathcal{R}_0$ un σ-ideale in $\mathcal{R}$ e siano $(S_1, +, \mathcal{U}_1)$, $(S_2, +, \mathcal{U}_2)$ ed $(S, +, \mathcal{U})$ semigruppi uniformi di Hausdorff. Un insieme $\mathcal{F}$ di funzioni finitamente additive di $\mathcal{R}$ in S si dice uniformente continuo rispetto all'ordine se per ogni successione decrescente $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in $\mathcal{R}$ tale che $\cap_{n\in\mathbf{N}} X_n = \emptyset$ risulta $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ uniformente per $\mu \in \mathcal{F}$.

TEOREMA 2. – *Sia $\mu : \mathcal{R} \to S_2$ una funzione finitamente additiva limitata rispetto a $\bullet$ e tale che $\mu(X) = 0$ per ogni $X \in \mathcal{R}_0$ e sia $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di funzioni sezionabili di Ω in $\mathcal{P}(S_1)$ convergente puntualmente ad una funzione $f_0 \colon \Omega \to \mathcal{P}(S_1)$. Supponiamo che*

a) $(S, +, \mathcal{U})$ *sia completo*;

b) f_n *sia integrabile per ogni* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;

c) l'insieme di funzioni

$$\left\{X \in \mathcal{R} \mapsto \int_X f_n \bullet d\mu : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\right\}, \tag{7}$$

sia uniformemente continuo rispetto all'ordine.

Allora per ogni $X \in \mathcal{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \bullet d\mu = \int_X f_0 \bullet d\mu. \tag{8}$$

Il teorema precedente è stato successivamente esteso al caso di integrali rispetto a funzioni finitamente additive variabili con gli integrandi. Sia $\mathcal{F}$ un insieme di funzioni di $\mathcal{R}$ in S_2. Si dice che $\mathcal{F}$ è uniformemente limitato rispetto a $\bullet$ se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $U_1 \in \mathcal{U}_1$ tale che per ogni $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in S_1$ con $(a_i, b_i) \in U_1 (i = 1, \dots, n)$ e per ogni $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{R}$ a due a due disgiunti risulta

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \bullet \mu(X_i), \sum_{i=1}^n b_i \bullet \mu(X_i)\right) \in U, \tag{9}$$

per ogni $\mu \in \mathcal{F}$.

TEOREMA 3. – *Sia $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di funzioni finitamente additive esaustive di $\mathcal{R}$ in S_2 convergente puntualmente ad una funzione $\mu_0 \colon \mathcal{R} \to S_2$ esaustiva tale che $\mu_n(X) = 0$ per ogni $X \in \mathcal{R}_0$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Inoltre sia $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di funzioni sezionabili di Ω in $\mathcal{P}(S_1)$ convergente puntualmente ad una funzione $f_0 \colon \Omega \to \mathcal{P}(S_1)$ limitata rispetto a $\bullet$. Supponiamo che* *a*) $(S, +, \mathcal{U})$ *sia completo*;

b) f_n *sia integrabile rispetto a* μ_n *per ogni* $n \in \mathbf{N}$;

c) *l'insieme di funzioni* $\{\mu_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ *sia uniformemente limitato rispetto a* $\bullet$;

d) *l'insieme di funzioni*

$$\left\{ X \in \mathcal{R} \mapsto \int_X f_n \bullet d\mu_n : n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right\}, \tag{10}$$

sia uniformemente continuo rispetto all'ordine.

Allora f_0 *è integrabile rispetto a* μ_0 *e per ogni* $X \in \mathcal{R}$ *risulta*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \bullet d\mu_n = \int_X f_0 \bullet d\mu_0 . \tag{11}$$

Nell'ultima parte della tesi si affronta il problema della riduzione degli integrali nei semigruppi. In particolare, utilizzando la definizione di integrale data da M. Sion in [5] ed un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale da noi provato, si ottiene un risultato di esistenza per misure prodotto nei semigruppi analogo ad un teorema provato da H. Millington in [4] nel caso dei gruppi. Infine si prova un teorema alla Fubini per funzioni a valori nei semigruppi analogo ad un risultato ottenuto nei gruppi dallo stesso H. Millington in [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Constantinescu, *Spaces of Measures*, de Gruyter, Berlin, 1984.

[2] P. de Lucia, *Funzioni finitamente additive a valori in un gruppo topologico*, Quaderni UMI, Pitagora, Bologna, 1984.

[3] J.C. Massè, *Integration dans les semi-groupes*, Studia Math., **66** (1979), 57-80.

[4] H. Millington, *Products of group-valued measures*, Studia Math., **54** (1975), 7-27.

[5] M. Sion, *A theory of semigroup valued measures*, Lect. Notes in math. Springer Verlag, Berlin, 1973.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi della Calabria
e-mail: aletromb@unical.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Napoli) - Ciclo XIV
Direttore di ricerca: Prof. Paolo de Lucia, Seconda Università di Napoli